

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

П.Р.Кантор, Ж.М.Работ

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

(Методические разработки для учащихся I курса ВЗМШ)

Москва, 1980

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

П р е д и с л о в и е

При выполнении заданий по этой теме обратите особое внимание на оформление решений.

Все основные соотношения между элементами фигуры, на которых основано решение (параллельность, равенство и т.п.), все вспомогательные построения должны быть ясно и кратко обоснованы. При этом надо ссылаться либо на теоремы школьного учебника, либо на ранее встречавшиеся в тексте задачи (доказывая, что выполнены условия этих теорем или задач).

К некоторым задачам в тексте даны указания. В них, как правило, описываются дополнительные построения или наводящие соображения, помогающие решить задачу. Факты, приводимые в этих указаниях, также должны быть вами обоснованы.

В виде приложения помещена статья Н.Б.Васильева "Вокруг формулы Пика" ("Квант", № 12, 1974г.). Это - необязательный материал, предназначенный для тех, у кого хватит терпения и настойчивости разобраться в довольно трудном, но интересном материале и подумать над решением задач, близких к олимпиадным.

В конце помещены контрольные задания.

В в е д е н и е

Здесь собраны некоторые задачи, связанные с понятием площади многоугольника. Мы не будем определять, что называется площадью многоугольника, а опишем это понятие, перечислив те его свойства, которые нам нужны.

- А-1. Площадь многоугольника - положительное число.
- А-2. Площади конгруэнтных многоугольников равны.
- А-3. Если многоугольник разрезан на несколько частей, то его площадь равна сумме площадей этих частей.
- А-4. Площадь треугольника равна половине произведения длины его основания на длину его высоты. (Единицу масштаба мы считаем заданной; можно показать, что это произведение не зависит от того, какую именно сторону и соответствующую ей высоту мы возьмем).

Буква "А" выбрана нами потому, что с неё начинается слово "Аксиома".

I. Разрезаем и складываем.

Из приведенных четырех свойств - аксиом можно вывести все теоремы о площадях многоугольников, которые Вы изучаете в школе. Так как любой многоугольник можно разбить на треугольники (докажите это!), то мы сможем теперь вычислить площадь любого многоугольника.* Например,

площадь параллелограмма равна произведению длины его основания на длину высоты; **)

площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

Подумайте, как доказать эти теоремы (вывести их из наших аксиом А1 - А4).

Мы сейчас докажем еще одну формулу для вычисления площади трапеции.

I-1. Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ - данная трапеция ($AD \parallel BC$), K - середина стороны CD и KN - перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AB (см. рис. I). Проведем через точку K прямую, параллельную прямой AB . Пусть M и P - точки её пересечения с прямыми BC и AD . Параллелограмм $ABMP$ равновелик данной трапеции, так как пятиугольник $ABCKP$ является для них общим, а треугольник CMK конгруэнтен треугольнику KPD , т.е. трапеция и параллелограмм составлены из одинаковых частей. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания $|AB|$ на высоту $|KN|$, утверждение доказано.

Замечание. Последний абзац решения можно (более формально) записать так:

$$\begin{aligned} S_{ABMP} &= S_{ABCKP} + S_{CMK}, \\ S_{ABCD} &= S_{ABCKP} + S_{KPD} \end{aligned} \quad (\text{по построению}),$$

* Вместо А4 можно считать основным такое свойство, из которого А4 выводится: площадь квадрата со стороной 1 равна 1. Значительно труднее доказать, что, действительно, каждому многоугольнику M на плоскости можно сопоставить положительное число $S(M)$ - его площадь так, чтобы выполнялись свойства А1-А4. В школьном курсе это обычно не доказывается и считается очевидным.

** В дальнейшем мы вместе слов "длина основания", "длина высоты" и т.д. в подобных случаях будем говорить просто "основание", "высота", и т.д.

$$\triangle KPD \cong \triangle CMK$$

(по стороне и двум прилежащим углам),

поэтому $S_{AKP} = S_{AMK}$, следовательно $S_{ABCD} = S_{ABMP}$.

Дальше в тексте приводятся задачи, которые мы советуем Вам решать подряд. В каждом параграфе они расположены, в основном, в таком порядке, что решения предыдущих задач помогают решать последующие. Некоторые из этих задач сопровождаются указаниями или даже решениями (как задача I-1, которую мы только что разобрали). Впрочем, не обязательно в точности следовать этим указаниям: задачи могут допускать и другие решения, ничуть не хуже тех, которые мы имели в виду. В некоторых местах Вы найдете замечания общего характера, которые помогут Вам в решении задач.

I-2. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка K , середина отрезка AB , соединена с вершинами C и D . Найдите отношение площади треугольника KCD к площади трапеции.

I-3. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делится ими на четыре параллелограмма. Два из них пересекаются диагональю AC . Докажите, что два других равновелики.

Указание. Воспользуйтесь тем, что диагональ делит параллелограмм на два конгруэнтных треугольника.

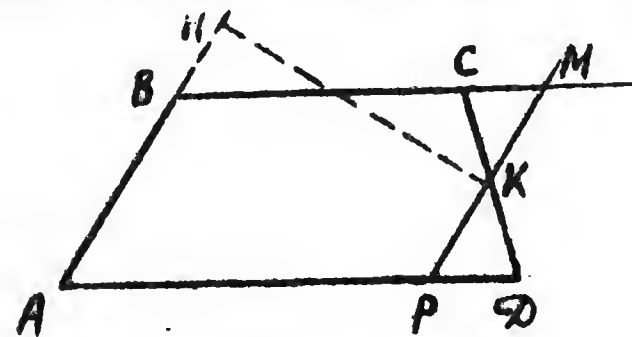


Рис. 1

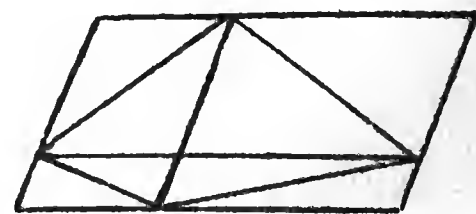


Рис. 2

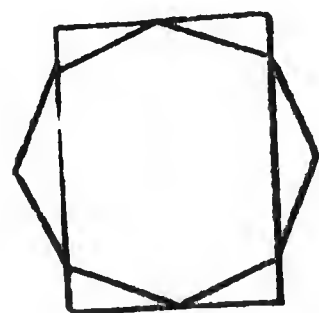


Рис. 3

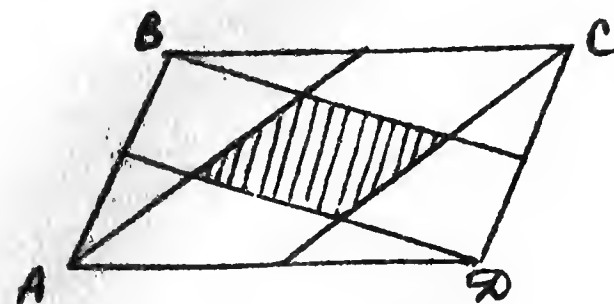


Рис. 4

I-4. Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная его диагонали (рис. 2). Докажите, что полученный параллелограмм по площади вдвое больше четырехугольника (то, что получается параллелограмм, достаточно очевидно; это можно не доказывать).

I-5. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников диагонали соответственно равны и пересекаются под равными углами, то четырехугольники равновелики.

I-6. а) Произвольная точка M плоскости отражается центрально-симметрично относительно середин сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$. Полученные при этом точки являются вершинами нового четырехугольника. Определите его вид и найдите отношение его площади к площади четырехугольника $ABCD$.

б) Где надо взять точку M (см. задачу I-6а), чтобы после отражений получить параллелограмм, о котором говорится в задаче I-4?

I-7. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

Указание. Взгляните на рис. 3.

I-8. В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка (см. рис. 4): вершина B соединена с серединой $[CD]$, вершина A — с серединой стороны BC , вершина D — с серединой стороны AB , вершина C — с серединой стороны AD . Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками, — параллелограмм и что его площадь в пять раз меньше площади данного параллелограмма. (Посмотрев на рис. 4, подумайте, как из девяти частей, на которые разрезан параллелограмм $ABCD$, сложить пять конгруэнтных параллелограммов).

I-9. На сторонах угла A взяты точки B и C . Через середину отрезка BC проведена прямая, пересекающая стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Докажите, что площадь треугольника ADE больше площади треугольника ABC . Решение этой задачи позволяет через данную точку K внутри данного угла провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей возможной площади. Подумайте, как это сделать.

Заметим, что в решениях задач, которые нам встречались, можно было обойтись приемом "разрезания и складывания". В принципе этим приемом можно пользоваться всегда, когда нужно доказать равенство

площадей двух многоугольников; верна такая теорема:

Т-1. Если два многоугольника равновелики, то один из них можно разрезать на части, из которых составляется другой многоугольник.

Эта теорема доказывается не очень сложно (вы можете познакомиться с её доказательством, например, по книге В.Г.Болтянского "Равновеликие и равносоставленные фигуры" из 22 выпуска серии "Популярные лекции по математике").

§ 2. Простейшие следствия из аксиом.

Практически для того, чтобы установить равенство или найти отношение площадей, вовсе не обязательно "разрезать и складывать". Например, очень часто бывает удобно сравнивать площади двух треугольников, пользуясь формулой А-4. Мы сейчас приведем некоторые очевидные, но важные следствия из А-4.

С-1. Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной его основанию, то его площадь при этом не меняется (см. рис.5, там треугольники ABC и ABD имеют общее основание AB и конгруэнтные высоты, опущенные на это основание).

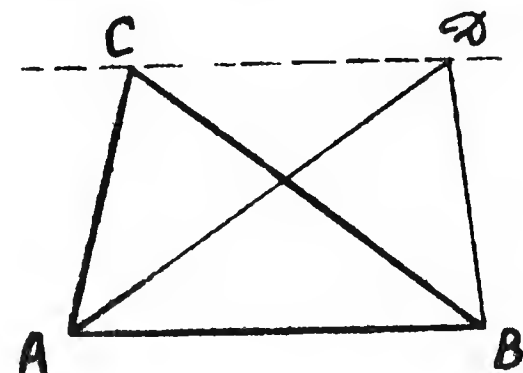


Рис. 5

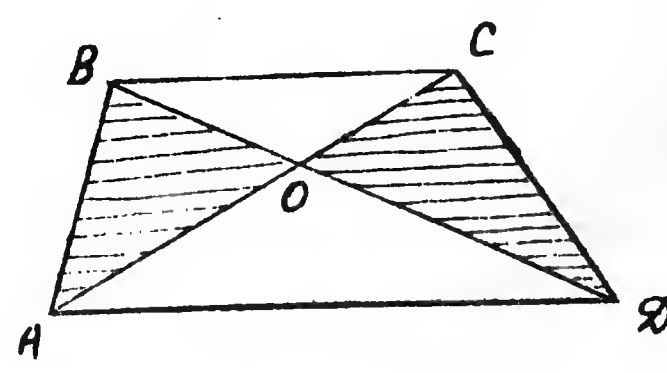


Рис. 6

[2-1.] Пусть O — точка пересечения отрезков $[AC]$ и $[BD]$ (см. рис.6). Докажите, что для того, чтобы площади треугольников AOB и DOC были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.

Замечание. Для того, чтобы решить эту задачу, нужно доказать два утверждения: (1) — если прямые BC и AD параллельны, то площади треугольников AOB и DOC равны, (2) — если площади треугольников AOB и DOC равны, то прямые BC и AD параллельны.

Вообще, если нужно доказать утверждение: "Для того, чтобы выполнялось A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось B ", то надо доказывать две теоремы: (1) — "если верно A , то верно B ", (2) — "если верно B , то верно A ". (Иногда вместо слов "необходимо и достаточно" употребляют слова "тогда и только тогда" или "утверждения A и B эквивалентны друг другу").

[2-2.] Докажите, что выпуклый четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждая из его диагоналей делит его площадь пополам.

Утверждение С-1 можно переформулировать следующим образом.

С-1'. Пусть дан отрезок AB . Множество точек M таких, что площадь треугольника AMB равна заданной величине S , есть две прямые, параллельные отрезку AB и находящиеся от него на расстоянии $h = 2S/|AB|$ (см. рис.7).

Замечание. Для того, чтобы доказать С-1, надо доказать две теоремы: а) если точка M такова, что $S_{AMB} = S$, то она лежит на одной из двух указанных прямых; б) все точки указанных прямых образуют с отрезком AB треугольники, площади которых равны S .

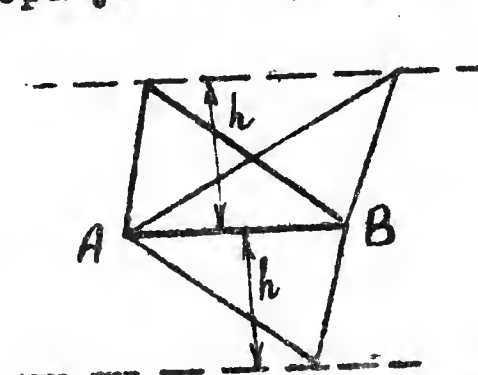


Рис. 7

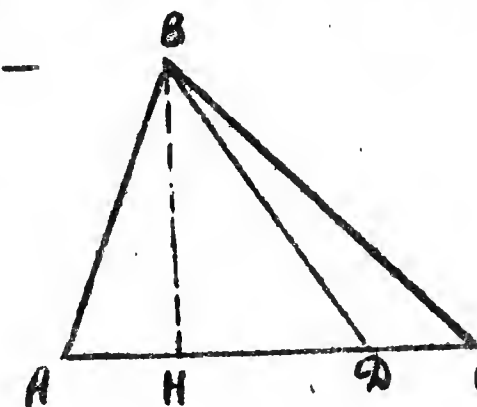


Рис. 8

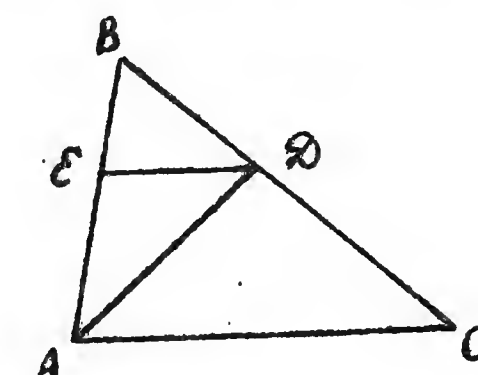


Рис. 9

Приведем еще одно следствие из А-4.

С-2. Если одну из сторон треугольника, прилежащих к данному его углу, увеличить в K раз, то площадь его также увеличится в K раз.

Для доказательства заметим, что треугольники ABC и ABD (см. рис.8) имеют общую высоту BH , поэтому отношение их площадей равно отношению оснований $S_{ABC} : S_{ABD} = |AC| : |AD| = K$. Запишем важные частные случаи С-2.

Медиана делит треугольник на две равновеликие части.

Биссектриса угла треугольника, заключенная между его сторонами a и b , делит его на два треугольника, площади которых относятся как $a:b$.

Из С-2 следует более общее соотношение:

С-3. Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол. Это следует из того, что (см. рис. 9).

$$S_{ABC} : S_{ABD} = |BC| : |BD|,$$

$$S_{ABD} : S_{EBD} = |AB| : |EB|,$$

поэтому $S_{ABC} : S_{EBD} = \frac{|AB| \cdot |BC|}{|EB| \cdot |BD|}.$

В частности, имеет место следующее утверждение:

Если два треугольника подобны и стороны одного из них в k раз больше соответствующих сторон другого, то его площадь в k^2 раз больше площади второго.

В следующих задачах решение основано как раз на этих соображениях: сравнении площадей треугольников, у которых равны по величине или основания, или высоты, или углы. Постарайтесь в этих задачах найти самый простой и красивый путь решения.

2-3. Пусть диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно (см. рис. 10). Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Указание. Используя С-2, легко доказать, что $\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_2}{S_3}$ (или, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$).

2-4. Точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC , а точка C_1 — на его стороне AB , причем отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O (см. рис. 11). Пусть площади треугольников A_1OC , COA и AOC_1 равны S_1 , S_2 и S_3 соответственно. Найдите площади треугольника A_1BC_1 .

Указание. Найдя площадь треугольника A_1OC , (см. задачу 2-3) и используя С-2, легко получить, что

$$\frac{S_{A_1BC_1}}{S_{AA_1C_1}} = \frac{S_{BCC_1}}{S_{C_1CA}}$$

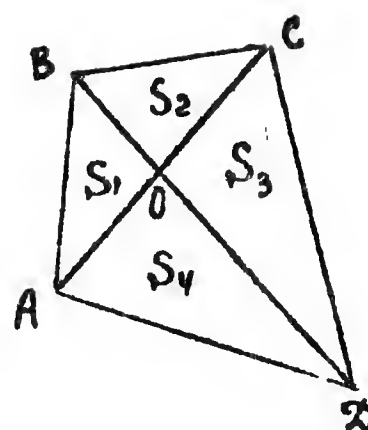


Рис. 10

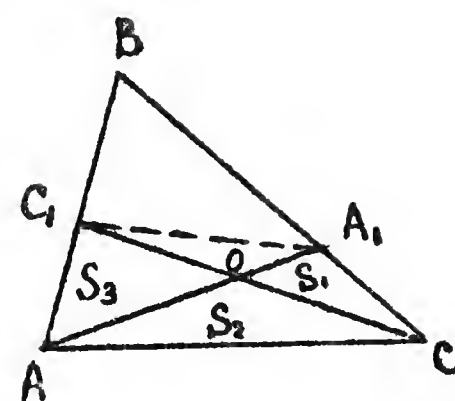


Рис. 11

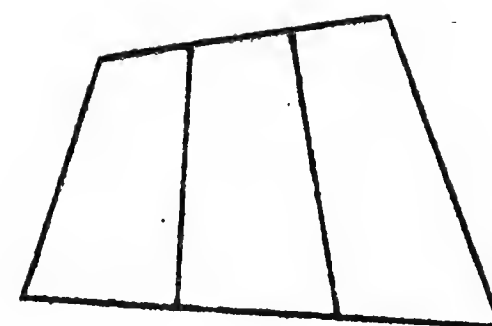


Рис. 12

2-5. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

2-6. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые делят треугольник на 6 частей, три из которых — треугольники с площадями S_1 , S_2 и S_3 . Найдите площадь исходного треугольника.

2-7. Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три конгруэнтные части (см. рис. 12). Докажите, что между этими прямыми заключена $1/3$ часть площади четырехугольника.

Замечание. Верно и более общее утверждение. Пусть $n-1$ прямых делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на n конгруэнтных частей. Тогда они разбивают данный четырехугольник на n четырехугольников, площади которых образуют арифметическую прогрессию.

2-8. Прямая, параллельная диагонали AC четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD , пересекает сторону AD в точке E . Докажите, что прямая EC делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

Указание. Проведите медианы треугольников BCD и BAD из вершин C и A соответственно.

2-9. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка

пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят четырехугольник на четыре равновеликие части.

Указание. Сделайте крупный чертеж. Пусть дан четырехугольник $ABCD$. Обозначим середины сторон AB , BC , CD , AD через M, T, P, K соответственно, а середину диагонали AC — через H . Чтобы доказать, что площадь одного из полученных четырехугольников, например, $МОКА$, равна $1/4$ площади всего четырехугольника $ABCD$, заметьте, что четырехугольниками $МОКА$ и $МНКА$ равновелики (O — точка пересечения проведенных прямых, параллельных диагоналям).

2-10. Пусть K и L — середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AK и AL пересекаются в точке P , отрезки CK и CL — в точке Q . Докажите, что сумма площадей треугольников APQ и BQC равна площади четырехугольника PQL (рис. 13).

2-11. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $|AD| = 57$ см, $|BC| = 33$ см, $\angle BAD = 60^\circ$, E и F — середины сторон BC и AD соответственно. Площадь трапеции равна 180 см². Пусть отрезки AE и BF пересекаются в точке M , а $[E\bar{D}]$ и $[FC]$ — в точке N . Найдите площадь четырехугольника $FMEH$. Подумайте, какие из данных этой задачи можно отбросить так, чтобы при этом не изменился ответ.

2-12. Внутри треугольника ABC лежит точка M . Докажите, что площади треугольников ABM и CBM равны тогда и только тогда, когда точка M находится на медиане BK .

Решение. Если точка M находится на медиане BK , то $S_{ABK} = S_{CBK}$, $S_{AMK} = S_{CMK}$ и поэтому $S_{ABM} = S_{CBM}$. В одну сторону утверждение задачи доказано. Осталось доказать обратное: если $S_{ABM} = S_{CBM}$, то точка M лежит на медиане BK . Предположим, что M не лежит на $[BK]$. Тогда один из отрезков MA или MC пересекает $[BK]$. Пусть это будет $[MC]$ (если медиану пересекает отрезок MA , то рассуждение аналогично), и пусть N — точка пересечения $[MC]$ и $[BK]$. Тогда (см. рис. 14) $S_{ABM} < S_{ABN}$, поскольку треугольник ABM лежит внутри треугольника ABN .

$S_{CBM} > S_{CBN}$, поскольку треугольник CBM лежит внутри треугольника CBN . Но $S_{ABN} = S_{CBN}$ — ведь точка N лежит на медиане, поэтому $S_{ABM} = S_{CBM}$. Но мы предпо-

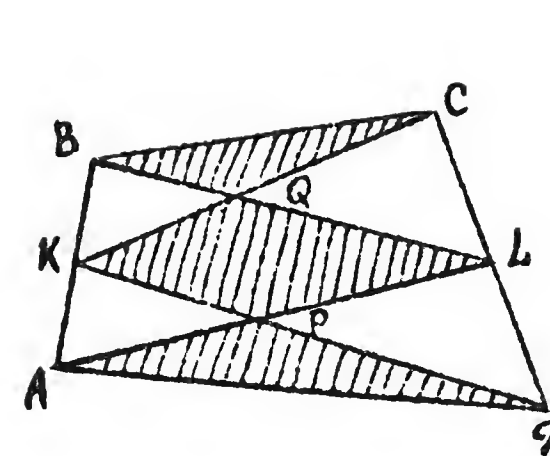


Рис. 13

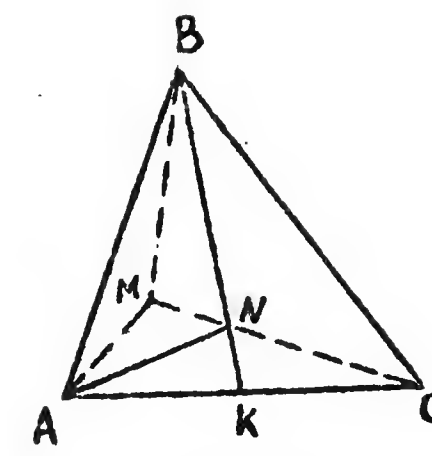


Рис. 14

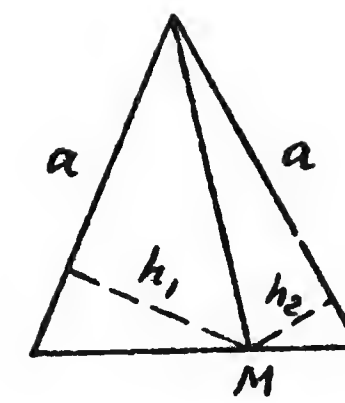


Рис. 15

жили, что $S_{ABM} = S_{CBM}$. Получили противоречие. Задача полностью решена.

Подумайте, как с её помощью решить следующую задачу, перекликающуюся с задачей 2-9.

2-13. а) Докажите, что если внутри четырехугольника найдется такая точка O , что отрезки OA , OB , OC , OD делят его на четыре равновеликие части, то хотя бы одна из диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит другую диагональ пополам.

2-14. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

2-15. Дан треугольник ABC . Продолжим его сторону AB за вершину B отрезком BP таким, что $|BP| = |AB|$, сторону AC за вершину A отрезком AM таким, что $|AM| = |CA|$, сторону BC за вершину C отрезком CK таким, что $|CK| = |BC|$. Во сколько раз площадь треугольника PKM больше площади треугольника ABC ?

Указание. Соедините точки B и M , P и C , A и K .

2-16. Сформулируйте задачу, аналогичную предыдущей, для четырехугольника и решите её. Выведите из неё результат задачи 1-8.

В нескольких следующих задачах Вы увидите, как, используя площади, можно доказывать различные соотношения в геометрических фигурах.

2-17. Докажите, что в равнобедренном треугольнике расстояние от любой точки основания до боковых сторон равно высоте треугольника, опущенной на его боковую сторону.

Решение. Пусть боковая сторона данного треугольника равна a .

высота, опущенная на неё - h , расстояния от произвольной точки M на основании до боковых сторон - h_1 и h_2 (рис. 15).

Соединим точку M с вершиной треугольника. При этом он разобьётся на два треугольника, площади которых равны $ah_1/2$ и $ah_2/2$. Но в сумме эти площади составляют площадь всего исходного треугольника, равную $ah/2$, то есть $\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{ah}{2}$, откуда $h_1 + h_2 = h$.

2-18. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного треугольника или на его границе, до его сторон равна высоте треугольника.*

2-19. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до его сторон заключена между наибольшей и наименьшей из его высот. (Сравните с задачей 2-18).

2-20. Докажите, что площадь многоугольника, описанного около окружности, равна половине произведения радиуса этой окружности на периметр многоугольника, (частный случай этой формулы для треугольника, описанного около окружности, хорошо известен).

Указание. Соедините центр вписанного круга с вершинами многоугольника и воспользуйтесь тем, что радиусы, проведенные в точки касания, являются высотами образовавшихся треугольников.

2-21. Прямая AD делит треугольник ABC на два треугольника. Докажите, что радиус r круга, вписанного в треугольник ABC , меньше суммы радиусов r_1 и r_2 кругов, вписанных соответственно в треугольники ABD и ACD .

Указание. Докажите, что периметры треугольников ACD и ABD меньше периметра треугольника ABC , и воспользуйтесь формулой, выражающей площадь треугольника через радиус вписанного круга и периметр.

2-22. а) Пусть r - радиус круга, вписанного в треугольник, h_a, h_b, h_c - его высоты, опущенные на стороны a, b, c соответственно. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

* Аналогично можно доказать и более общую теорему: сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного n -угольника или на его границе, до его сторон равна апофеме, умноженной на количество сторон (в правильном треугольнике высота равна утроенной апофеме).

Указание. Воспользуйтесь тем, что $S = \frac{r(a+b+c)}{2} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$.

б) В треугольник со сторонами a, b, c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне a , касающийся сторон b и c . Найдите радиус этого полукруга.

2-23. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC , причем прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке O (см. рис. 16). Обозначим площади треугольников $AOC_1, COB_1, BOA_1, AOB_1, AOC_1, COB_1, BOA_1, AOB_1$ через $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ соответственно.

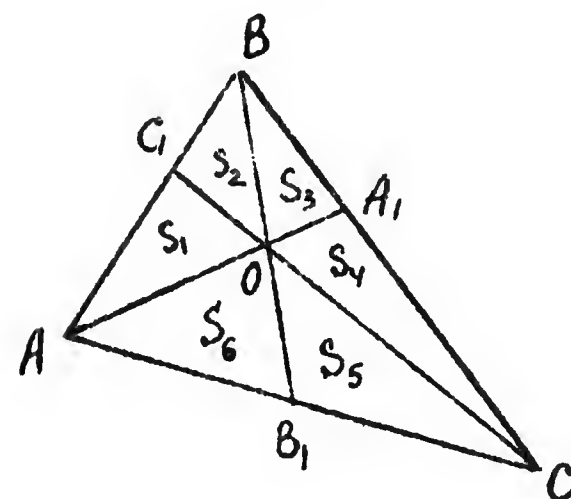


Рис. 16

Докажите, что

$$a) S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6 ; (1)$$

$$б) \frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 ; (2)$$

(теорема Чевы).

$$в) \frac{|CB_1|}{|B_1A|} + \frac{|CA_1|}{|A_1B|} = \frac{|CO|}{|OC_1|} ; (3)$$

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} + \frac{|AB_1|}{|B_1C|} = \frac{|AO|}{|OA_1|} ; (4)$$

$$\frac{|BC_1|}{|C_1A|} + \frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{|BO|}{|OB_1|} ; (5)$$

(теорема Ван-Обеля);

$$г) \frac{|OA_1|}{|AA_1|} + \frac{|OB_1|}{|BB_1|} + \frac{|OC_1|}{|CC_1|} = 1 ; (6)$$

$$д) \frac{|AO|}{|AA_1|} + \frac{|BO|}{|BB_1|} + \frac{|CO|}{|CC_1|} = 2 ; (7)$$

Доказательство. а) С помощью 3-2 получаем $\frac{S_{ABO_1}}{S_{B,OC}} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} = \frac{S_1}{S_2}$, откуда $\frac{S_1 + S_2 + S_6}{S_3 + S_4 + S_5} = \frac{S_6}{S_5}$ или $S_5(S_1 + S_2) = S_6(S_3 + S_4)$ (8)

Аналогично получаем соотношения:

$$\frac{S_2 + S_3 + S_4}{S_1 + S_5 + S_6} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{или} \quad S_1(S_3 + S_4) = S_2(S_5 + S_6) (9)$$

$$\text{и} \quad \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_4 + S_5 + S_6} = \frac{S_3}{S_4} \quad \text{или} \quad S_4(S_5 + S_6) = S_3(S_1 + S_2) (10)$$

Перемножив почленно равенства (8), (9), (10), получим:

$$S_1 \cdot S_3 \cdot S_5 = S_2 \cdot S_4 \cdot S_6$$

б) Перемножив почленно равенства $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} = \frac{S_1}{S_2}$; $\frac{|BA_1|}{|A_1C|} = \frac{S_3}{S_4}$;

$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{S_5}{S_6}$ (см. решение п. а) этой задачи), получим:

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{S_1 \cdot S_3 \cdot S_5}{S_2 \cdot S_4 \cdot S_6} = 1$$

(мы здесь воспользовались равенством (I)).

в). Из С-2 имеем $\frac{|CO|}{|OC_1|} = \frac{S_{AOC}}{S_{AOC_1}} = \frac{S_5 + S_6}{S_1}$ (II)

Поскольку $\frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{S_5}{S_6}$ и $\frac{|CA_1|}{|A_1B|} = \frac{S_4}{S_3}$, то

$$\begin{aligned} \frac{|CB_1|}{|B_1A|} + \frac{|CA_1|}{|A_1B|} &= \frac{S_5}{S_6} + \frac{S_4}{S_3} = \frac{S_5 \cdot S_3 + S_4 \cdot S_6}{S_3 \cdot S_6} = \frac{S_2 \cdot S_4 \cdot S_5 + S_4 \cdot S_6}{S_3 \cdot S_6} = \\ &= \frac{S_4 \cdot S_6 (S_2 + 1)}{S_3 \cdot S_6} = \frac{S_4 (S_1 + S_2)}{S_1 \cdot S_3} = \frac{S_4 \cdot S_3 (S_5 + S_6)}{S_1 \cdot S_3 \cdot S_3} = \frac{S_5 + S_6}{S_1} = \end{aligned}$$

$\frac{|CO|}{|OC_1|}$ (при переходе (*) мы воспользовались равенством (I), при переходе (***) - равенством (II), при переходе (****) - равенством (II)).

Таким образом, равенство (3) доказано. Аналогично доказываются равенства (4) и (5).

г) Преобразуем левую часть (6):

$$\begin{aligned} \frac{|OA_1|}{|AA_1|} + \frac{|OB_1|}{|BB_1|} + \frac{|OC_1|}{|CC_1|} &= \frac{1}{\frac{|AA_1|}{|OA_1|}} + \frac{1}{\frac{|BB_1|}{|OB_1|}} + \frac{1}{\frac{|CC_1|}{|OC_1|}} = \\ &= \frac{1}{\frac{|OA_1| + |AO|}{|OA_1|}} + \frac{1}{\frac{|OB_1| + |BO|}{|OB_1|}} + \frac{1}{\frac{|OC_1| + |CO|}{|OC_1|}} = \frac{1}{1 + \frac{|AO|}{|OA_1|}} + \frac{1}{1 + \frac{|BO|}{|OB_1|}} + \frac{1}{1 + \frac{|CO|}{|OC_1|}} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{|AC_1|}{|C_1B|} + \frac{|AB_1|}{|B_1C|}} + \frac{1}{1 + \frac{|BC_1|}{|C_1A|} + \frac{|BA_1|}{|A_1C|}} + \frac{1}{1 + \frac{|CB_1|}{|B_1A|} + \frac{|CA_1|}{|A_1B|}}. \end{aligned}$$

Заметим, что в знаменателях трех полученных дробей стоят отношения тех же отрезков, что и в равенстве (2).

Обозначим $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}$ через α , $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}$ - через β , $\frac{|CB_1|}{|B_1A|}$ - через γ . Тогда соотношение (2) запишется так: $\alpha\beta\gamma = 1$. Преобразовывая дальше левую часть (6), получим:

$$\frac{1}{1+\alpha+\frac{1}{\gamma}} + \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}+\beta} + \frac{1}{1+\gamma+\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1+\alpha+\beta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}+\beta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1+\alpha+\beta} + \frac{1}{1+\alpha+\beta} + \frac{1}{1+\alpha+\beta} = 1.$$

Таким образом формула (6) доказана.

д) Формула (7) легко получается из (6). Докажите это самостоятельно.

Сформулируем теперь теорему, обратную к теореме Чевы: если точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC , причем выполнено соотношение (2) задачи 2-23, то прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (эти прямые называются "чевианами" треугольника). Докажем эту теорему.

Предположим, что утверждение теоремы неверно, т.е. прямая CC_1 не проходит через точку O пересечения прямых AA_1 и BB_1 (см. рис. 17). Пусть прямая OC_1 пересекает сторону AB в точке C_2 . Тогда для точек A_1, B_1, C_2 выполнены условия теоремы Чевы, поэтому

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \quad (I)$$

Но по условию $\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1 \quad (2)$

Приравняв левые части (I) и (2), получим: $\frac{|AC_2|}{|C_2B|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|}$, откуда следует, что точки C_2 и C_1 совпадают. Мы получили противоречие с исходным предположением, поэтому теорема доказана.

2-24. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

а) Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Указание. Воспользуйтесь теоремой, обратной к теореме Чевы.

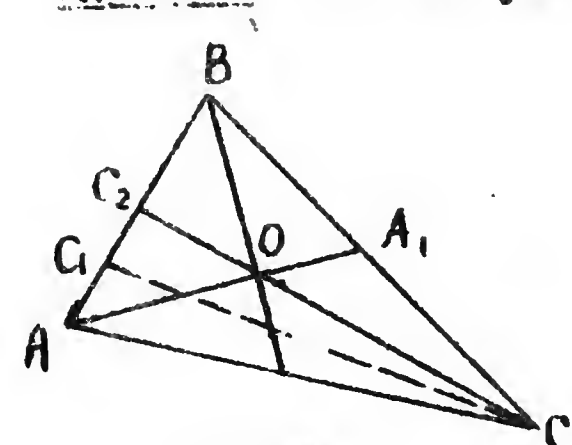


Рис. 17

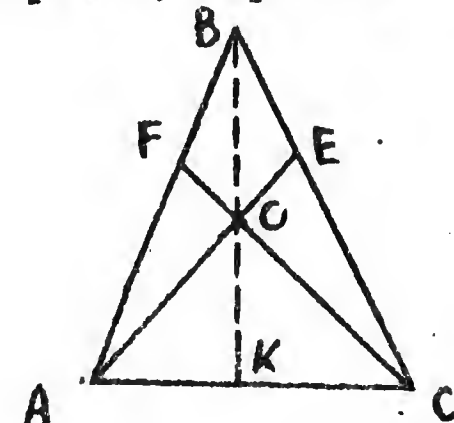


Рис. 18

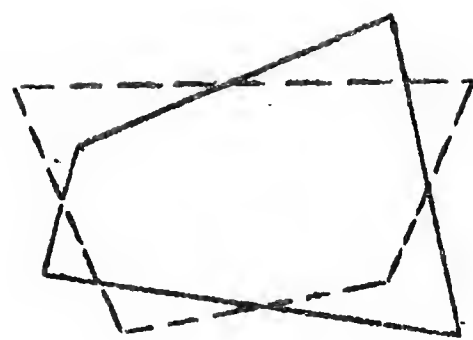


Рис.19

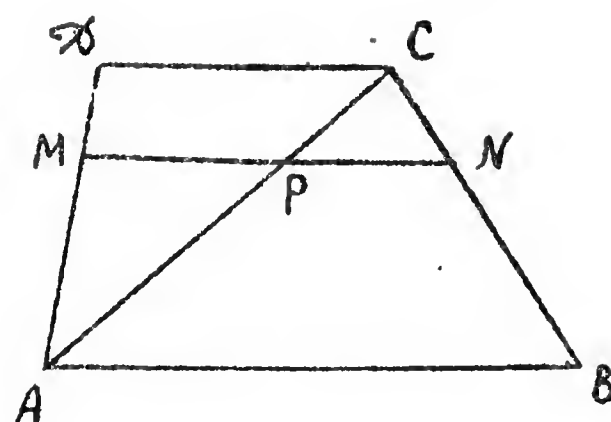


Рис.20

3. Более сложные задачи.

3-1. На продолжении стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ найдите такую точку O , чтобы площадь четырехугольника $ABCO$ равнялась площади треугольника ABO (эта задача помогает превратить любой выпуклый многоугольник в равновеликий ему, но имеющий на одну сторону меньше). Подумайте, как это сделать).

Указание. Проведите через точку O прямую, параллельную диагонали AC . Всегда ли задача имеет решение? Всегда ли оно единственно?

3-2. В треугольнике ABC на медиане BM взята точка K так, что $|BK|:|KM| = 1:2$. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC .

3-3. Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие её с вершинами основания (см. рис.18). Какую часть площади треугольника составляет каждая из 6 частей, на которые эти две прямые разрезают треугольник?

Указание. При решении этой задачи удобно использовать те же методы, что и в задаче 3-2.

3-4. В выпуклом четырехугольнике последовательно соединены середины соседних сторон. Найдите отношение площадей полученного и исходного четырехугольника.

Указание. Проведите диагонали данного четырехугольника и определите вид полученного четырехугольника, воспользовавшись свойством средней линии треугольника.

3-5. Докажите, что если два выпуклых четырехугольника расположены так, что середины их сторон совпадают, то их площади равны (см. рис.19).

3-6. Точки P, Q, R расположены соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC так, что $|AP| = \frac{1}{3}|AB|, |BQ| = \frac{1}{3}|BC|, |CR| = \frac{1}{3}|CA|$. Найдите площадь треугольника MNL , ограниченного прямыми AQ, BR, CP , если площадь треугольника ABC равна S .

3-7. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки M, P, K, N так, что $|AM|:|MB| = 3:5, |BP|:|PC| = 1:3, |CK|:|KD| = 4:5, |DN|:|NA| = 1:8$.

Найдите отношение площади шестиугольника $MВРКDN$ к площади четырехугольника $ABCD$. Подумайте, при любых ли отношениях $|AM|$ к $|MB|, |BP|$ к $|PC|$ и т.д. можно решать эту задачу?

Указание. Проведите диагональ BD .

3-8. В трапеции $ABCD$ ($(AB) \parallel (CD)$) на диагонали AC взята точка P и через нее проведена прямая $(MN) \parallel (AB)$ (M лежит на $(AD), N$ - на (BC)) (см. рис.20). Где на (AC) надо взять точку R , чтобы сумма площадей треугольников APM и CPN была наименьшей?

Указание. Докажите, что если P - точка пересечения диагоналей, то $|MP| = |PN|$. Выведите отсюда, что искомая точка - точка пересечения диагоналей.

3-9. а). Докажите, что если прямая делит квадрат на две равновеликие части, то она проходит через его центр.

б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Указание. Не забудьте рассмотреть все случаи: прямая пересекает смежные стороны квадрата, противоположные стороны, вершину и т.д.

3-10. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ параллельны. Докажите, что площадь треугольника ACE составляет не менее половины площади шестиугольника.

3-II. Докажите, что если середины сторон выпуклого многоугольника последовательно соединить, то площадь полученного многоугольника составит не менее половины площади исходного.

§ 4. Площади и метод координат.

Все задачи, которые встречались выше, приходилось решать чисто геометрически. Но Вы знаете, что часто на помощь при решении геометрических задач приходит метод координат. Поэтому мы сейчас выведем формулу, выражающую площадь многоугольника через координаты его вершин.

Начнем с самого простого многоугольника — треугольника. Пусть дан треугольник ABC , причем координаты точки $A - (x_1; y_1)$, точки $B - (x_2; y_2)$, точки $C - (x_3; y_3)$ (см. рис. 21). Легко видеть, что $S_{ABC} = S_{ACEB} + S_{BCEB} - S_{ABED}$ (1).

Из рис. 21 видно, что

$$S_{ACEB} = |DE| \cdot \frac{|AD| + |CE|}{2} = \frac{(x_3 - x_1)(y_3 + y_1)}{2};$$

$$S_{ABED} = |DF| \cdot \frac{|AD| + |BF|}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{2}$$

Подставляя найденные значения площадей в правую часть (1), получим

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_1)(y_3 + y_1)] \quad (2)$$

4-I. Докажите, что формула (2) верна для любого расположения точек A, B и C на плоскости, а не только такого, как на рис. 21, при условии, что обход вершин треугольника $A \rightarrow B \rightarrow C$ совершается против часовой стрелки.

Указание. Эту задачу можно решать по-разному. Можно отдельно рассмотреть все возможные случаи расположения точек A, B и C в различных четвертях, но это очень долго (таких случаев слишком много). Разумнее поступить иначе. При любом расположении треугольника ABC на плоскости существует (и не один!) такой параллельный перенос, который переводит треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$

расположенный в I четверти (при этом, конечно, если обход $A \rightarrow B \rightarrow C$ совершался против часовой стрелки, то и обход $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ также идет против часовой стрелки). Поэтому если мы

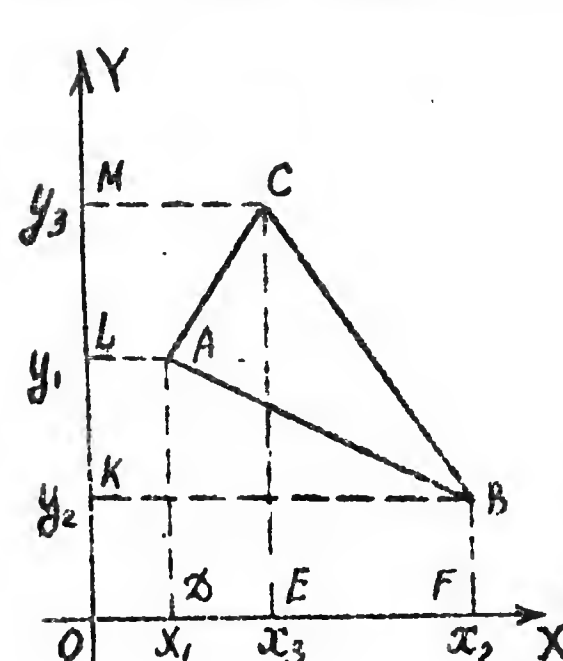


Рис. 21

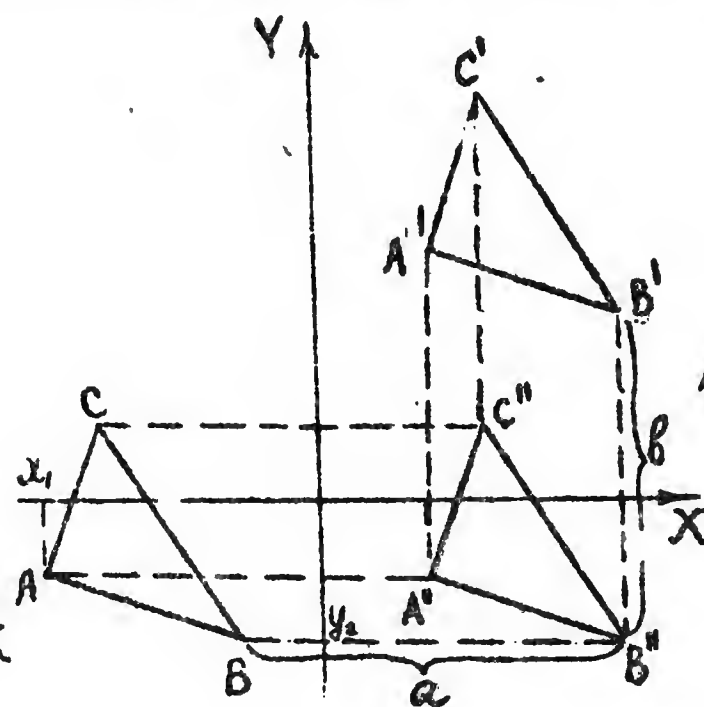


Рис. 22

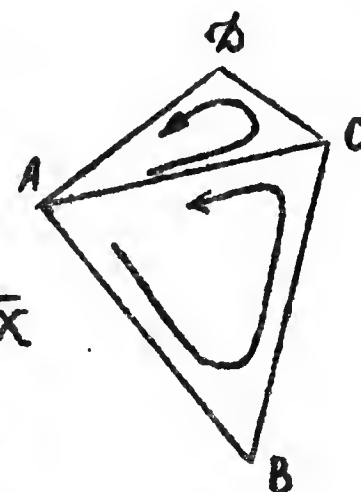


Рис. 23

докажем, что при параллельном переносе треугольника ABC правая часть (2) не меняется, задача 6-I будет решена. Но для доказательства этого надо записать формулы преобразования координат при параллельном переносе и подставить их в правую часть (2). Вот эти формулы:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Подумайте, как их получить (см. рис. 22).

4-2. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, причем обход вершин $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ совершается против часовой стрелки и $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), (x_4; y_4)$ — координаты вершин A, B, C, D соответственно. Докажите, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 + y_4) + (x_4 - x_1)(y_4 + y_1)] \quad (3)$$

Указание. Проведите диагональ четырехугольника и рассмотрите площади двух треугольников, на которые эта диагональ разбивает $ABCD$. Вы увидите, что при сложении площадей этих треугольников «лишние» слагаемые, соответствующие проведенной диагонали, взаимно уничтожаются, так как при обходе треугольников против часовой стрелки эта диагональ будет пройдена дважды, но в противоположных

направленных (см. рис. 23). Вы, наверное, уже поняли, как можно вывести формулу площади любого выпуклого многоугольника. Надо взять какую-нибудь его вершину и провести из неё все возможные диагонали. При этом многоугольник разобьётся на треугольники, причем, если складывать площади этих треугольников, набедающие по формуле (2), все "лишние" слагаемые взаимно уничтожаются, как в случае четырехугольника.

Итак, если $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), \dots, (x_n; y_n)$ — координаты вершин выпуклого n -угольника, взятых в таком порядке, что его обход по этим вершинам происходит против часовой стрелки, то для площади S_n этого n -угольника имеет место формула

$$S_n = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)]. \quad (4)$$

Замечания. 1. Подумайте, почему при выводе формулы мы требовали, чтобы n -угольник (и четырехугольник в задаче 6-2) был выпуклым: где мы использовали это условие. На самом деле выведенная нами формула верна и для невыпуклых многоугольников, но доказательство её в этом случае несколько сложнее. Желающие могут попробовать её вывести. (Аналогичная ситуация возникает при выводе формулы суммы внутренних углов многоугольника — см. школьный учебник).

2. При выводе формул (2) — (4) мы спроектировали вершины многоугольника на ось OX и получили трапеции с основаниями, параллельными оси OY . Но, что можно было проектировать вершины на ось OY , тогда получились бы аналогичные формулы. Выведите их.

ВОКРУГ ФОРМУЛЫ ПИКА

Н.Б.Васильев

Чтобы оценить площадь многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу). Точнее, если S — площадь многоугольника, N_1 — число клеток, которые целиком лежат внутри многоугольника, и N_2 — число клеток, которые имеют с внутренностью многоугольника хотя одну общую точку, то $N_1 \leq S \leq N_2$. (Этот факт можно использовать для того, чтобы дать точное определение площади многоугольника и дру-

гих фигур).

Мы будем рассматривать ниже только такие многоугольники, все вершины которых лежат в узлах клетчатой бумаги — в точках, где пересекаются линии сетки. Оказывается, что для таких многоугольников можно указать простую формулу: $S = \frac{Z}{2} + L - 1$, где S — площадь, Z — число узлов, которые лежат на границе многоугольника (то есть на сторонах и в вершинах), L — число узлов, которые лежат строго внутри многоугольника.

Эту формулу называют иногда "формулой Пика" — по имени математика, открывшего её в 1899 году. (Впрочем, нельзя быть уверенным в том, что эту естественную формулу, допускающую целый ряд различных доказательств, не придумал никто раньше).

В нашей заметке и доказательство, и применения формулы Пика отчасти будут связаны с некоторыми задачами из "Задачника "Кванта"

Простые треугольники.

Напомним, что мы рассматриваем только многоугольники, — в частности, треугольники — с вершинами в узлах клетчатой бумаги; каждый раз это специально не оговаривается. Лист клетчатой бумаги мы считаем бесконечным во всех направлениях, клетки — их частями со стороны I.

Площадь любого треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив её как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершину нарисованного треугольника. Прделав это, например, для треугольников, изображенных на рисунке 24, вы убедитесь, что площадь получается всегда равной "полуполому" числу — числу вида $m/2$, где m — целое.

Назовем треугольник простым, если ни внутри него, ни на его сторонах нет узлов сетки, за исключением вершин. (Такое название выбрано потому, что любой другой треугольник можно составить из простых; это одно из тех утверждений, которые понадобятся нам ниже). Обратите внимание, что все простые треугольники на рисунке 24 имеют площадь $1/2$. Мы увидим, что это не случайно.

В решении задачи M226, опубликованной в "Кванте", 1974, № 6, читателям предлагалось подумать над такой задачей. Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают "играть в чехарду": каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 25, ясно что после любого

группе; a и b могут принимать значения 1, 2, 3, 4. Будем проводить дуги так:

1) в каждой группе соединим первую точку со второй, вторую - с третьей, третью - с четвертой, четвертую - с первой;

2) соединим теперь точки: $(1,1)-(2,2)-(3,3)-(4,4)-(1,1)$
 $(1,4)-(2,1)-(3,2)-(4,3)-(1,4)$
 $(1,3)-(2,4)-(3,1)-(4,2)-(1,3)$
 $(1,2)-(2,3)-(3,4)-(4,1)-(1,2)$;

3) наконец, соединим каждую точку с индексом $(1, b)$ с соответствующей точкой $(3, b)$ и каждую точку $(2, b)$ с соответствующей точкой $(4, b)$.

Полученная схема, как легко проверить, удовлетворяет условию задачи (см. рис. 21).

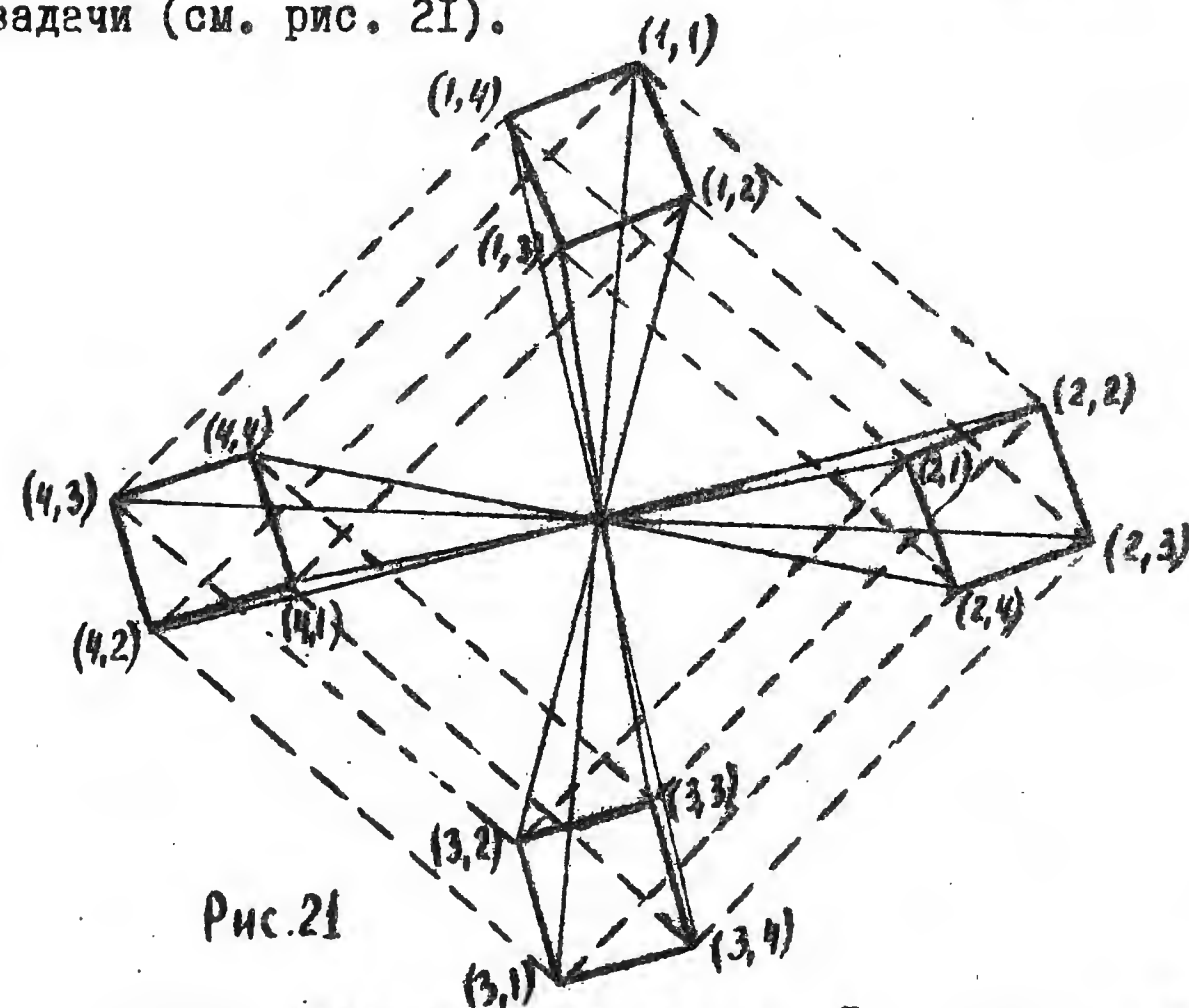


Рис. 21

4.35 (Н. Бурбаки). В множестве E , состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для любых двух элементов из E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

а). Докажите, что $m \geq n$.

б). В каких случаях возможно равенство $m = n$ (это пока никому не известно)?

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
 СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ АПН СССР

НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ
 (Сборник заданий для учащихся УШ - IX классов)

Москва, 1976.

О Г Л А В Л Е Н И Е

§ 1 . Включения и исключения	5
Приложение к §I	9
§ 2 . Одна комбинаторная задача	14
Контрольные задачи к §2	17
§ 3 . Геометрическое изображение задачи 2.0 и несколько задач о графах	19
Контрольные задачи к §3	21
§ 4 . Разные задачи	25

П Р Е Д И С Л О В И Е

Цель этого задания состоит прежде всего в том, чтобы научиться записывать решения математических задач.

Задание состоит из четырех параграфов. Задачи первого параграфа приводят читателя к важной формуле "включения и исключения". Эта формула, как вы увидите, часто применяется при решении самых разнообразных задач.

Второй параграф этого задания касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных K - значных чисел, цифры которых в десятичной записи расположены в убывающем порядке? Путь к решению этой задачи состоит в том, чтобы разобратся в условии задачи для небольших значений K и разбить задачу на более простые.

Третий параграф начинается с геометрической интерпретации задачи 2.0 из §2. Далее он продолжается задачами, условия которых удобно изображать в виде "графов" (т.е. комбинациями точек и соединяющих их дуг).

Четвертый параграф - разные задачи.

Сборник подготовил В.Л.Гутенмахер по материалам лекций И.М.Гельфанда.

Л - 36197

Подписано к печати 29.12.75 Заказ 32

Тираж 10000 экз. Объем 2 п.л. Цена 5 коп.

Ротапринт института содержания и методов обучения АНН СССР

ул. Макаренко д.5/16

§ I. ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ.

Этот параграф состоит из нескольких задач, которые приведут нас к важной формуле "включения и исключения".

Сначала - небольшая разминка - совсем простые упражнения.

Упражнение I.0. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, которые делятся: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 6?

Приведем сразу ответы на все четыре вопроса а), б), в), г) упражнения I.0.

Ответы: а) 49, так как $99=49 \cdot 2+1$.

б) 33, так как $99=33 \cdot 3$.

в) 19, так как $99=19 \cdot 5+4$.

г) 16, так как $99=16 \cdot 6+3$.

Проверьте наши ответы и быстро напишите сами ответы на вопросы следующего аналогичного упражнения.

Контрольное упражнение I.1. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые делятся: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 7?

Ответы на вопросы упражнений I.0 и I.1 понадобятся при решении задач этого параграфа.

Задача I.2. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, которые:

а) делятся одновременно на 2 и на 3;

б) делятся на 2, но не делятся на 3;

в) делятся на 3, но не делятся на 2;

г) делятся на 3 или на 2;

д) не делятся ни на 2, ни на 3?

К этой задаче мы не только сразу дадим ответы, но и покажем решения, которые привели нас к этим ответам. Задача читателя будет состоять в том, чтобы проверить нас и внимательно проследить за нашими рассуждениями.

Ответы: а) 16, б) 33, в) 17, г) 66, д) 33.

Решение задачи I.2 а). Числа, которые делятся и на 2, и на 3, это числа, которые делятся на 6. Количество таких чисел мы подсчитали в упражнении I.0 г).

Решение задачи I.2 б). Для наглядности ситуацию можно изобразить двумя пересекающимися кругами (см. рис. I). В первом круге - множество чисел, которые делятся на 3, во втором - множество чисел, которые делятся на 2, а их пересечение (общая часть) - множество чисел, кото-

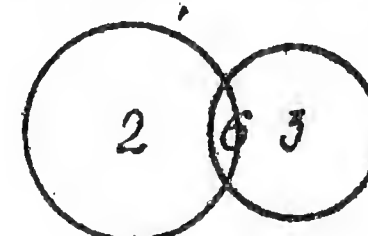


Рис. I

рые делятся на 6.

Нам нужны числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3 - это числа, которые делятся на 2, но не делятся на 6.

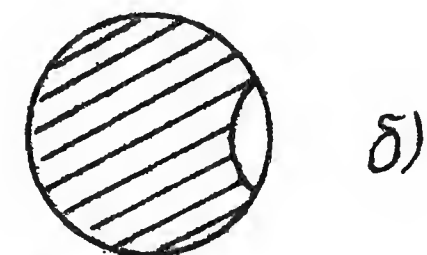
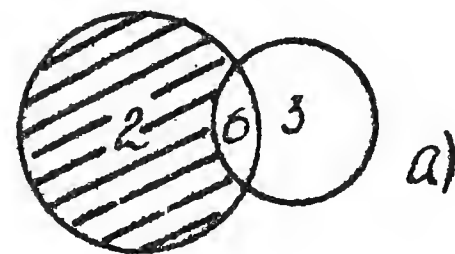
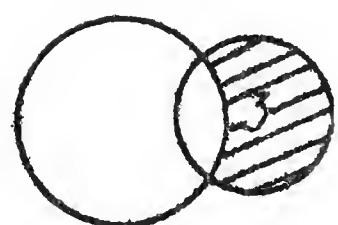


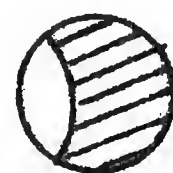
Рис. 2

На рисунках 2а) и 2б) мы заштриховали нужное множество чисел. Очевидно, их количество равно $49 - 16 = 33$ (из 49 чисел, делящихся на 2, 16 делятся на 6).

Решение задачи 1.2в). аналогично решению 1.2 б), только в этом случае нам нужно другое заштрихованное множество (см. рис.3а) и 3б).



а)



б)

Рис. 3

Решение задачи 1.2 г). В этом случае мы также заштрихуем нужное нам множество. Это объединение двух кругов (см. рис.4).

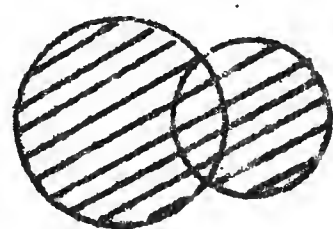


Рис. 4

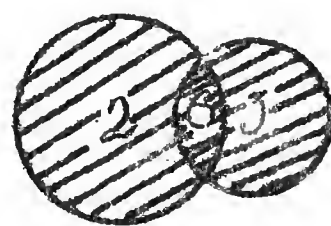


Рис. 5

Если сложить количество чисел, которые делятся на 3, с количеством чисел, которые делятся на 2, то мы два раза посчитаем числа, которые делятся на 6 (см. рис.5). Таким образом, от полученной суммы нам еще надо отнять количество чисел, которые делятся на 6.

Итак, ответ: $33 + 49 - 16 = 66$.

Решение задачи 1.2 д). Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см. рис.6). Квадрат - это множество всех целых положительных чисел, меньших 100, а круги - это множества чисел, делящихся соответственно на 2 и на 3. Нужно нам количество чисел заштриховано на

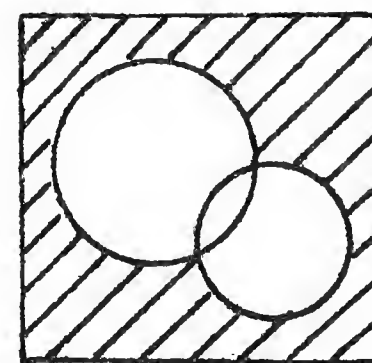


Рис. 6

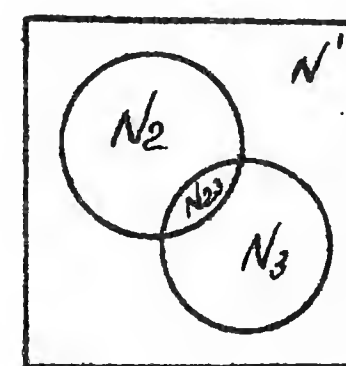


Рис. 7

рис. 6. Количество таких чисел будет равно количеству чисел, находящихся в дополнении к объединению двух кругов. Сколько чисел в объединении двух кругов, мы уже подсчитали в задаче г). ▽

Ответ: $99 - 66 = 33$.

Вывод. Обозначим через N количество всех чисел, меньших 100, через N_2 , N_3 , N_{23} - соответственно количества чисел, которые делятся на 2, делятся на 3, делятся на $2 \cdot 3$, а через N' - количество чисел, которые не попадают ни в N_2 , ни в N_3 . Тогда из наших рассуждений мы получим формулу: $N' = N - N_2 - N_3 + N_{23}$ (см. рис.7).

Итак, решение задачи 1.2 закончено, поэтому мы и поставили значок ▽.

Предлагаем теперь самостоятельно решить и записать решение следующей аналогичной задачи.

Контрольная задача 1.3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые:

- делятся и на 2, и на 3;
- делятся на 2, но не делятся на 3;
- делятся на 3, но не делятся на 2;
- делятся на 3 или на 2;
- не делятся ни на 2, ни на 3?

Дальше мы предлагаем немного более сложные задачи. Сначала задачу 1.4 для чисел, меньших 100, с решением, а затем такую же задачу 1.5 для чисел, меньших 1000, без решения.

Задача 1.4. Сколько целых положительных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение задачи 1.4. Заметим, во-первых, что если число делится и на 2, и на 5, то оно делится на 10; если оно делится и на 3, и на 5, то оно делится на 15, а если делится и на 2, и на 3, и на 5, то оно делится на 30. Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см. рис. 8), где внутри квадрата - множество чисел, меньших 100, а в кружках - соответственно множества чисел, которые делятся на 2, на 3, на 5.

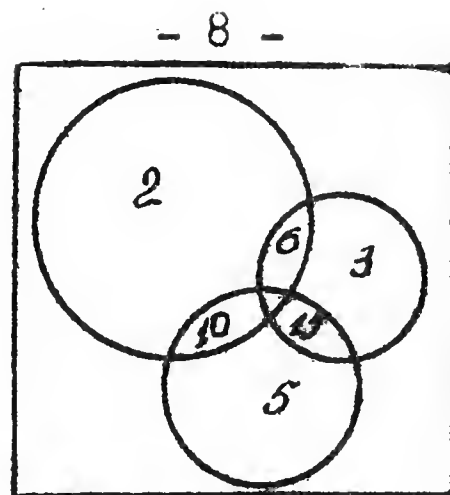


Рис. 8

Пусть N_2 - количество чисел, которые делятся на 2, N_3 - количество чисел, которые делятся на 3, N_5 - количество чисел, которые делятся на 5, $N_{2,3}$ - делящихся и на 2, и на 3, $N_{3,5}$ - делящихся и на 3, и на 5, $N_{2,5}$ - делящихся и на 2, и на 5. Наконец, $N_{2,3,5}$ - количество чисел, которые делятся и на 2, и на 3, и на 5, а N' - количество чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Оказывается, верна следующая формула:

$$N' = N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2,3} + N_{2,5} + N_{3,5} - N_{2,3,5}. (*)$$

Все числа, которые стоят в правой части равенства, легко посчитать:

$$N = 99, N_2 = 49, N_3 = 33, N_5 = 19, N_{2,3} = N_{3,5} = 16, N_{2,5} = N_{3,5} = 6, N_{2,3,5} = 9, N_{2,3,5} = 3.$$

По формуле (*) мы получаем нужное нам число $N' = 26$.

Осталось доказать формулу (*).

Мы должны посчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из N сумму $N_2 + N_3 + N_5$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга - даже три раза. Теперь к разности $N - N_2 - N_3 - N_5$ добавим сумму $N_{2,3} + N_{3,5} + N_{2,5}$. Тогда все числа, попадающие в один или два круга, мы учли правильно и только числа, попадающие во все три круга - неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды добавили. Придется из суммы $N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2,3} + N_{3,5} + N_{2,5}$ вычесть еще $N_{2,3,5}$. Теперь все числа, входящие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к формуле (*). ▽

Задача 1.5. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Наконец, приведем задачу, в которой рассматривается множество чисел по отношению уже к четырем числам.

Задача 1.6. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Указание к задаче 1.6. $N' = N - N_3 - N_5 - N_7 - N_{11} + N_{3,5} +$

$$+ N_{3,7} + N_{3,11} + N_{5,7} + N_{5,11} + N_{7,11} - N_{3,5,7} - N_{3,5,11} - N_{3,7,11} - N_{5,7,11} + N_{3,5,7,11}. (**)$$

Чисел, меньших 1000 и делящихся на $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, не существует. Поэтому $N_{3,5,7,11} = 0$.

Еще три контрольные задачи к § I.

Задача 1.7. Объединение множеств A и B состоит из 25 элементов, пересечение - из 10 элементов. Сколько элементов в A , если в B : а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

Задача 1.8. В школьной химической олимпиаде участвовал 21 человек, в физической - 26 человек, в математической - 29 человек. 14 школьников принимало участие и в химической, и в математической, 15 учащихся - и в физической, и в математической, 8 - во всех трех олимпиадах. Сколько школьников участвовало хотя бы в одной из трех олимпиад? Найдите все возможные ответы.

Задача 1.9. У меня трое друзей, за месяц с каждым из них я обедал 9 раз, с каждым двумя из них - 4 раза, со всеми тремя - 1 раз, без каждого из них - 15 раз. Сколько всего раз я обедал? Сколько раз я обедал один?

Заключение.

Формулы (*) и (**), которыми мы пользовались выше, являются частными случаями общей формулы, - так называемой "формулы включений и исключений". Она связывает такие числа: N - количество элементов некоторого множества A ; N_1, N_2, N_3, \dots - количества элементов в некоторых его подмножествах A_1, A_2, A_3, \dots ; N_{12}, N_{13}, \dots - количества элементов в попарных пересечениях этих множеств: A_1 и A_2 , A_1 и A_3, \dots ; N_{123}, \dots - количества элементов в пересечениях этих множеств по три, и так далее; наконец, N' - количество элементов множества A , которые не входят ни в одно из подмножеств A_1, A_2, A_3, \dots . Тогда, как можно доказать,

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 - \dots + N_{12} + N_{13} + \dots - N_{123} - \dots$$

(это и есть общая "формула включений и исключений"). Например, когда подмножеств одно, два и три, она принимает такой вид:

$$N' = N - N_1,$$

$$N' = N - N_1 - N_2 + N_{12},$$

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{13} - N_{123}.$$

Приложение к § I.

В прошлом году мы предложили задачу 1.9 в качестве контрольной. Мы получили самые разнообразные ответы на эту задачу. Вот три

из них.

	За месяц обедал всего	Обедал один
Цветков Коля:	24 раза	8 раз
Ильина Маша:	31 раз	15 раз
Скворцов Сережа:	16 раз	0 раз

Мы хотим обсудить эти ответы с вами. Конечно, можно сказать, что Скворцов Сережа мало ест, но всегда с друзьями, а Маша Ильина обедала в течении месяца каждый день, причем половину обедов ела одна. Поэтому, на первый взгляд, самый правдоподобный ответ у Маши.

Давайте теперь посмотрим на решения задач.

Решение Коли Цветкова. Изобразим множество всех обедов за месяц в виде квадрата, а множество обедов с первым, вторым и третьим другом — в виде кругов A_1, A_2, A_3 . Расшифруем условие задачи так:

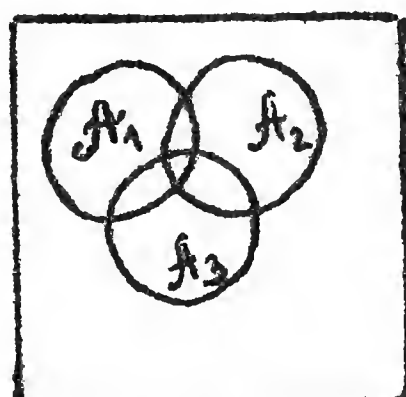


Рис. 9

"С каждым из них я обедал 9 раз" — это означает, что $N_1 = N_2 = N_3 = 9$, то есть количество элементов в каждом множестве равно 9. "С каждым двумя из них я обедал 4 раза" — это означает, что $N_{12} = N_{13} = N_{23} = 4$, то есть в пересечении любых двух множеств содержится 4 элемента. "Со всеми тремя я обедал 1 раз" — это значит, что $N_{123} = 1$.

"Без каждого из них я обедал 15 раз" означает, что дополнение к каждому из множеств состоит из 15 элементов (рис. 10).

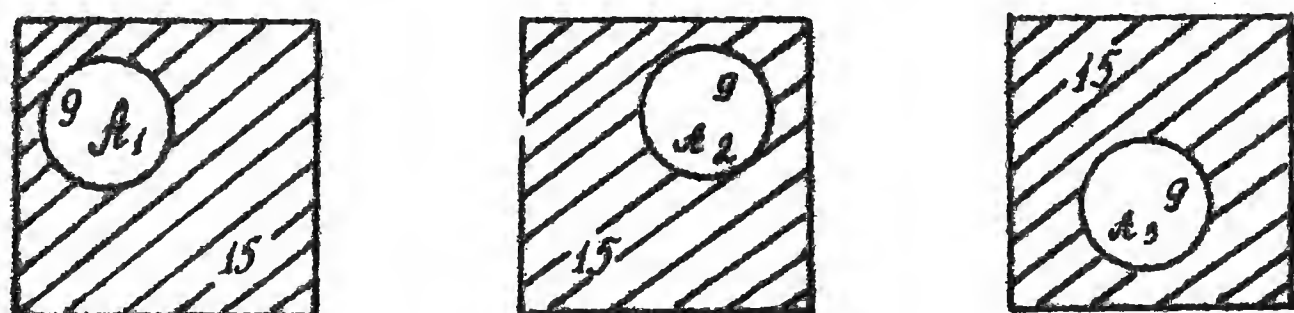


Рис. 10

Таким образом, я обедал всего 24 раза ($9 + 15$).

По формуле "включения и исключения" находим (рис. 11)

$$N' = 24 - 9 - 9 - 9 + 4 + 4 + 4 - 1 = 8.$$

Следовательно я обедал 8 раз один.

Решение Маши Ильиной. Маша так же расшифровала первые две фразы и иначе третья. "Без каждого из них я обедала

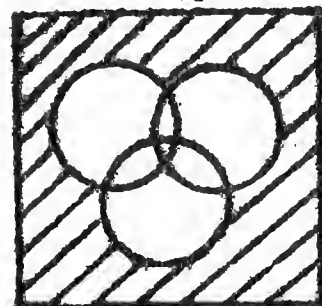


Рис. 11

15 раз" — это означает, что я обедала одна 15 раз (см. рис. 11). Тогда $N' = 15$ и по формуле $15 = N - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 - 1$. Тем самым $N = 31$, т.е. я обедала всего 31 раз. ✓

Решение Сережи Скворцова. Сережа тоже понял первые две фразы так же, как Коля и Маша, но он считал, что "без каждого из них я обедал 15 раз" означает, что множество, заштрихованное на рис. 12,

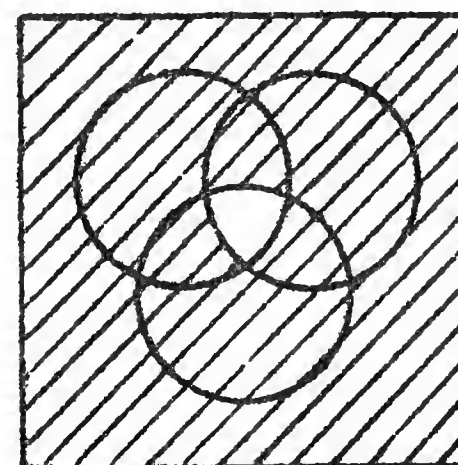


Рис. 12

состоит из 15 элементов. Тогда, значит, я обедал всего 16 раз, рассуждает Сережа. По формуле находим $N' = 16 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 - 1 = 0$ и тем самым оказывается, что я никогда не обедал один. ✓

Вопрос 1.9. Кто из ребят, по вашему, прав?

Мы убедились в том, что надо внимательно относиться к ЯЗЫКУ. Поэтому еще

Несколько слов о нашем языке.

Мы говорим, что

Число удовлетворяет условию 1), если оно делится на 2.

Число удовлетворяет условию 2), если оно делится на 3.

Мы можем назвать

Множеством A — множество чисел, удовлетворяющих условию 1).

Множеством B — множество чисел, удовлетворяющих условию 2).

Мы можем сказать, что

Число, удовлетворяющее условию 1), является элементом множества A .

Число, удовлетворяющее условию 2), является элементом множества B .

Можно представить себе (см. рис. 13)

Множество всех целых положительных чисел, меньших 100, в виде квадрата D .

Множество A в виде круга A .

Множество B в виде круга B .

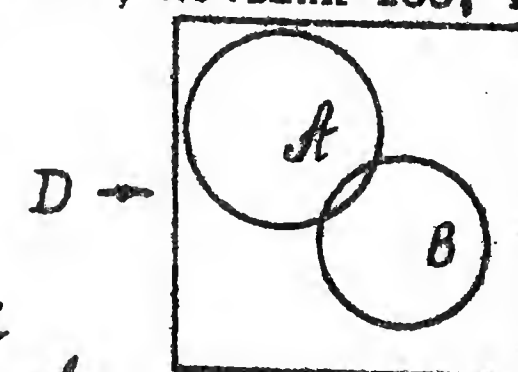


Рис. 13

Мы считаем, что

Если число удовлетворяет условиям 1) и 2), то оно принадлежит пересечению множеств A и B (пересечение заштриховано на рис. 15)

Если число удовлетворяет условию 1) или условию 2), то

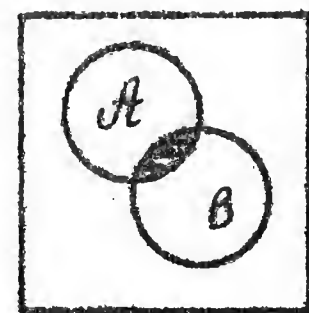


Рис. 15

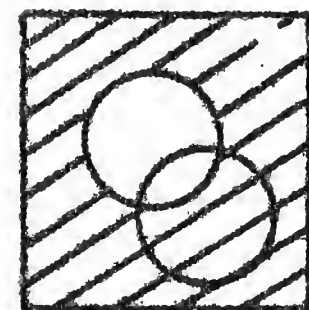


Рис. 16

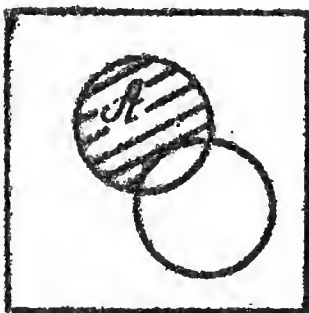


Рис. 17

оно принадлежит объединению множеств A и B (объединение заштриховано на рис. 4).

Если число не удовлетворяет условию 1), то оно принадлежит дополнению к множеству A (дополнение заштриховано на рис. 16).

Если число удовлетворяет условию 1), но не удовлетворяет условию 2), то оно принадлежит разности множеств A и B (см. рис. 17).

Надо внимательно следить

За тем, в каком смысле в условиях задач употребляются союзы "и", "или" и частица "не".

Например, союз "и" мы не раз употребили в предыдущих фразах, однако он только в одной из них имел смысл "пересечения".

Обычно обозначают

Объединение множеств A и B через $A \cup B$.

Пересечение множеств A и B через $A \cap B$.

Разность множеств A и B через $A \setminus B$.

Дополнение к множеству A через \bar{A}

(если D - множество всех чисел, то $\bar{A} = D \setminus A$).

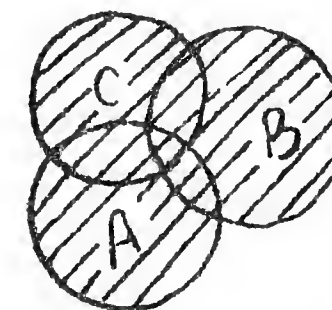
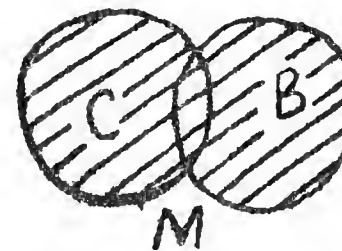
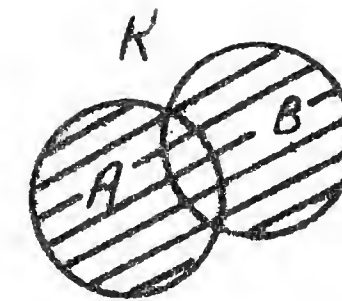
Исно, что мы можем написать: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность).

Равенство ($=$) означает, что множества состоят из одних и тех же элементов.

Рассмотрим теперь три каких-нибудь множества A , B , C .

Имеет место равенство: $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (ассоциативность).

рис. 18



Убедимся наглядно в том, что эта формула верна. Изобразим левую часть $(A \cup B) \cap C$. Нарисуем сначала множество $K = A \cup B$ (внутри скобок). А затем раскроем скобки, т.е. нарисуем множество $K \cap C = (A \cup B) \cap C$ (см. рис. 18). Теперь то же самое сделаем с правой частью.

Нарисуем множество $M = B \cap C$, а затем раскроем скобки - нарисуем $A \cup M$. Мы видим, что множества $A \cup M$ и $K \cap C$ совпадают, т.е. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Кстати, из этого равенства следует, что как бы мы ни расставляли скобки между знаками \cup , результат будет один и тот же, поэтому можно писать просто без скобок $A \cup B \cup C$, точно так же, как с числами

$$(2+3)+4=2+(3+4)=2+3+4.$$

Дальше мы предлагаем вам несколько упражнений. Надо привести наглядные доказательства следующих равенств.

I.10. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения).

Здесь можно провести аналогию с умножением $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$.

I.11. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность).

Сравните с равенством $2 \times (3+5) = 2 \times 3 + 2 \times 5$.

I.12. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$.

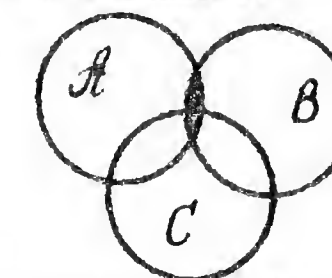
Сравните с неверным равенством $(5-3) \times 2 = 5 \times 2 - 3$.

I.13. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

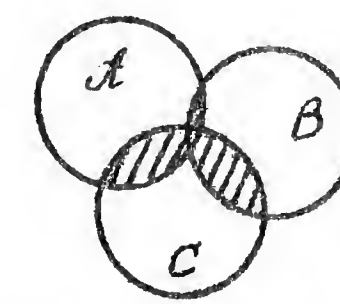
Сравните с верным равенством $(5-3) \times 2 = 5 \times 2 - 3 \times 2$.

Теперь попробуйте, наоборот, записать рисунки с помощью значков \cup , \cap , \setminus .

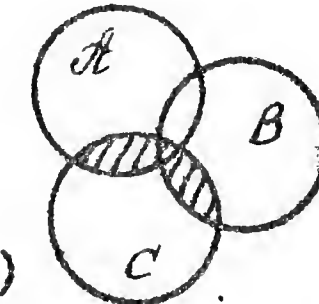
Упражнение I.14.



а)



б)



в)

Здесь надо просто привести ответ в виде формулы, например, в случае а) заштрихованное множество можно записать $(A \cap B) \setminus C$.

В заключение попробуйте сами придумать задачи такого типа (можно даже для четырех множеств).

§ 2. ОДНА КОМБИНАТОРНАЯ ЗАДАЧА.

Этот параграф касается, в основном, только одной задачи:
Сколько существует целых положительных K -значных чисел, цифры которых расположены в убывающем порядке?

Это трудная задача. Наш путь решения будет таким. Мы сначала разберемся в условии задачи для $K = 2, 3$ и разобьем задачу на более простые, а уже затем перейдем к следующим значениям $K = 4, 5, \dots$

Итак, начнем наш путь "от простого к сложному".

Задача 2.0.а) Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, цифры которых идут в возрастающем порядке?

б) Тот же вопрос для чисел, цифры которых идут в убывающем порядке.

в) Тот же вопрос для чисел, цифры которых идут в невозрастающем порядке.

Уточним условие задачи. Цифры двузначного числа идут в возрастающем порядке, когда 1-ая цифра меньше 2-ой. Однако неясно, как быть с числами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Превратим эти числа в двузначные, условившись ставить перед каждым из них нуль: $1=01$, $2=02$, ..., $9=09$. При такой записи мы не перепутаем эти числа ни с какими другими числами и отнесем их тоже к числам, цифры которых идут в возрастающем порядке. (Таким образом нумеруются билеты лотереи.) После этого уточнения мы можем приступить к решению задачи.

Решение задачи 2.0.а) Самое первое, что приходит в голову, это выписать подряд все такие числа: 01, 02, ..., 09, 12, 13, ..., 19, ..., 23, ..., 29, ..., 34, ..., 39, ..., 89 и пересчитать их. Но мы, конечно, сразу заметим, что в первом десятке их 9 штук, во втором - 8 штук, в третьем - 7 штук и т.д. В девятом десятке - 1 штука, в десятом их вообще нет. Поэтому нам нужно просто сложить числа

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = ?$$

Будет легче, если мы будем складывать числа в таком порядке:

$$(9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ? \quad \text{Ответ: 45 чисел.}$$

Решение задачи 2.0.б) Здесь, конечно, можно сделать точно такой же подсчет, как и в задаче а), но сразу становится ясно, что ответ будет таким же, как и там. В самом деле, если в каждом числе, цифры которого идут в возрастающем порядке, поменять цифры местами, то получится число, цифры которого идут в убывающем порядке, и наоборот. Итак, ответ: 45 штук.

Тут, конечно, стоит заметить, как удачно мы обозначили в задаче а) числа из первого десятка - иначе для чисел 10, 20, ..., 90

с убывающим порядком цифр не нашлось бы подходящих пар среди чисел с возрастающим порядком цифр.

Решение задачи 2.0.в). К таким числам относятся числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, и числа, обе цифры которых одинаковы. Сколько есть чисел с возрастающим порядком, мы уже знаем из задачи а) - их 45 штук.

Чисел с одинаковыми цифрами 9 штук: 11, 22, 44, ..., 99.

Итого: $45 + 9 = 54$.

ответ: 54 числа.

Снова решение задачи 2.0.а). Решая задачи а), б), в), мы заметили, что можно решить задачу а) еще более простым подсчетом. Двузначных чисел, обе цифры которых разные - 90 штук. В самом деле, целых положительных чисел, меньших 100, всего 99 штук, а чисел меньших 100, цифры которых одинаковы, 9 штук. Двузначные числа с двумя неодинаковыми цифрами разбиваются на два класса, состоящих из чисел с возрастающим порядком и из чисел с убывающим порядком, причем тех и других одинаковое количество. Следовательно, чисел с возрастающим порядком $\frac{90}{2} = 45$ штук.

Задача 2.1. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Уточнение условия. Подобно тому, как мы это сделали в задаче 1, договоримся перед однозначными числами приписывать два нуля, а перед двузначными числами приписывать один нуль, например: $5 = 005$; $21 = 021$. Тем самым все положительные числа, меньшие 10^3 , будут трехзначными.

Задача 2.2. Сколько существует целых положительных восьмизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2.3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^{11} , цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 2.1. Трехзначные числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, это числа, у которых вторая цифра больше первой, а третья - больше второй. Следовательно, у таких чисел все три цифры разные. Рассмотрим множество чисел, у которых все три цифры разные. Разобьем их на классы. Если числа состоят из одних и тех же трех цифр и отличаются только порядком, в котором они поставлены, то мы их отнесем к одному классу. Всякое число, таким образом, попадает только в один из классов.

Покажем теперь, что в каждый класс попадает ровно шесть чисел, и, кроме того, среди них есть только одно число, цифры которого идут в возрастающем порядке.

Пусть a, b, c - какие-то три разные цифры и пусть $a > b > c$. Тогда из них можно составить только шесть различных

чисел: \overline{abc} , \overline{acb} , \overline{bac} , \overline{bca} , \overline{cab} , \overline{cba} и из них только у одного числа \overline{cba} цифры идут в возрастающем порядке. Отсюда мы можем заключить, что если N — количество чисел, у которых все три цифры разные, то количество классов, на которые мы их разбили, будет равно $N/6$. Кроме того, поскольку в каждом классе есть только одно число с возрастающим порядком цифр, таких чисел будет столько же, сколько классов, то есть $N/6$ штук. Осталось найти N , то есть решить следующую задачу.

Вспомогательная задача 2.1 а) Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решая задачу 2.0, мы нашли, что двузначных чисел с разными цифрами 90 штук. Приписывая впереди к каждому такому двузначному числу по одной из 8 цифр, не содержащихся в этом числе, мы, очевидно, получим все различные трехзначные числа с разными цифрами (смотри таблицу).

Двузначные числа с разными цифрами	Трехзначные числа с разными цифрами
01	201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901
02	102, 302, 402, 502, 602, 702, 802, 902
...
10	210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910
12	012, 312, 412, 512, 612, 712, 812, 912
...
18	018, 218, 318, 418, 518, 618, 718, 918
19	019, 219, 319, 419, 519, 619, 719, 819
...
97	097, 197, 297, 397, 497, 597, 697, 897
98	098, 198, 298, 398, 498, 598, 698, 798

Таким образом, всего чисел с тремя разными цифрами будет $90 \cdot 8 = 10 \cdot 9 \cdot 8$ штук.

Вспомогательная задача решена: мы нашли, что $N = 90 \cdot 8$; разделив N на 6, мы получим ответ задачи 2.1.

Ответ к задаче 2.1. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел.

Решение задачи 2.2. Ответ: столько же, сколько двузначных, то есть 45 чисел.

Докажем это. Выпишем в строку все десять цифр в порядке убывания: 9876543210. Возьмем двузначное число, цифры которого

идут в убывающем порядке и вычеркнем его цифры из этой строки. Мы получим в результате восьмизначное число, цифры которого идут в убывающем порядке, например:

70 \rightarrow 9876543210, то есть 98654321;
62 \rightarrow 9876543210, то есть 98754310.

Таким образом, каждому двузначному числу с убывающим порядком цифр мы сопоставим одно восьмизначное число с убывающим порядком цифр. Теперь наоборот, возьмем какое-нибудь восьмизначное число, цифры которого идут в убывающем порядке, и составив двузначное число из двух цифр, которые не вошли в это восьмизначное число, поставим эти две цифры в порядке убывания, например:

9 8 7 6 4 3 2 1 \rightarrow 50.

Таким образом, каждому восьмизначному числу мы сопоставим одно двузначное число. Очевидно, что в первом и во втором случаях двум разным числам соответствуют два разных числа. И мы установили взаимнооднозначное соответствие между двузначными и восьмизначными числами с убывающим порядком цифр. Следовательно, и тех, и других одинаковое количество.

Решение задачи 2.3. Мы уловимся так же, как и раньше, записывать все числа, меньшие 10^{II} , как II -значные. Перед K — значным числом для $K < II$ мы поставим $(II - K)$ нулей.

Ответ: чисел, меньших 10^{II} , цифры которых идут в убывающем порядке, нет (в том смысле, в котором мы уточнили задачу).

В самом деле, у каждого такого числа все II цифр должны быть разными, но всего есть только 10 различных цифр.

Контрольные задачи к § 2.

Задача 2.4. Сколько существует семизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2.5. Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая цифра больше других, а вторая меньше третьей?

Сообщаем Вам сразу, что ответ в задачах 2.4 и 2.5 такой же, как и в задаче 2.1. Нужно написать убедительное объяснение, почему это так, и тогда не придется считать.

Задача 2.6. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^4 , цифры которых идут в убывающем порядке?

Мы советуем решить и записать решение этой задачи точно так же, как в задаче 2.1. Для этого Вам, конечно, понадобится решить следующие две задачи.

Задача 2.6 а) (Сравните со стр.16). Пусть a, b, c, d - какие-то четыре разных цифры. Сколько можно составить из них различных чисел?

Задача 2.6 б). Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все четыре цифры разные?

При решении каждой из этих задач мы советуем идти по тому же пути, что и при нахождении числа N в решении вспомогательной задачи 2.1 а).

Задача 2.7. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^6 , цифры которых идут в возрастающем порядке? (Уточните условие задачи).

Здесь мы тоже сразу сообщаем Вам ответ. Он такой же, как и в задаче 2.6. Напишите доказательство этого факта, разяв себе за образец наше решение задачи 2.2.

Задача 2.8. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10^K , цифры которых идут в убывающем порядке?

Будем считать, что все числа, меньшие 10^K , имеют K знаков.

$$\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 1} = 45 \text{ чисел при } K = 2;$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ чисел при } K = 3;$$

$$? \text{ чисел при } K = 4;$$

$$? \text{ чисел при } K = 5;$$

$$? \text{ чисел при } K = 6;$$

$$120 \text{ чисел при } K = 7;$$

$$45 \text{ чисел при } K = 8;$$

$$? \text{ чисел при } K = 9;$$

$$1 \text{ число при } K = 10;$$

$$0 \text{ чисел при } K = 11;$$

$$? \text{ чисел при } K > 11.$$

Задача 2.9. Сколько существует K -значных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке, в записи которых нет цифры 0?

З а к л ю ч е н и е.

При решении задачи 2.1 а) и других мы, по существу, использовали такое "правило произведения": если во множестве A всего M элементов, во множестве B - K элементов, то всевозможных пар $(a; b)$, где a - элемент A , b - элемент B , существует $N = M \cdot K$. Другой общий факт: если элементы какого-то множества C удалось разбить на K классов A_1, \dots, A_K , причем в каждом классе M элементов, то во множестве C всего $N = M \cdot K$ элементов. Нередко бывает нужно наоборот, зная N (число элементов) и M (число элементов в каждом классе), найти число классов: $K = \frac{N}{M}$.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЗАДАЧИ 2.0 И НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ О ГРАФАХ.

Вернемся снова к задаче 2.0 а) Оказывается, что ее можно представить себе геометрически.

Задача 3.0. На плоскости имеется 10 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

Ответ в этой задаче такой же, как в задаче 2.0 а), т.е. 45 отрезков. Для того, чтобы убедиться в этом, занумеруем 10 точек цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Рассмотрим теперь какой-нибудь отрезок с концами в этих точках. В концах отрезка стоят две разные цифры; поставив их в порядке возрастания, мы получим двузначное число. Таким образом, каждому отрезку будет соответствовать двузначное число с возрастающим порядком цифр.

Например, отрезку с концами в точках 2 и 3 соответствует число 23, отрезку с концами в точках 5 и 0 соответствует число 05 и так далее. При таком соответствии двум разным отрезкам соответствуют два разных числа и двум разным числам - два разных отрезка. Следовательно, между числами из задачи 2.0 а) и отрезками из задачи 3.0 установлено взаимное соответствие. Отсюда уже можно заключить, что отрезков будет столько же, сколько двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке.

Другое решение задачи 3.0. Итак, на плоскости имеется 10 точек и нужно узнать, сколько существует отрезков с концами в этих точках. Посчитаем концы всех таких отрезков. В каждой точке сходится 9 концов, поэтому всего концов будет $10 \cdot 9$. Но у каждого отрезка 2 конца, следовательно отрезков будет $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Задача 3.1. На плоскости имеется 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

В следующих задачах полезно переводить условие на язык точек и соединяющих дуг.

Как это сделать, вы узнаете из решений этих задач. Постарайтесь точно так же написать решения контрольных задач.

Задача 3.2 а) Сколько диагоналей в выпуклом 11-угольнике?

б) В тренировочном турнире участвовало 20 команд, причем между каждыми двумя командами было сыграно по одному матчу. Сколько всего было проведено матчей?

Задача 3.3 а) Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовало 11 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

б) Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовало 8 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

Задача 3.4. Доказать, что в любой компании, состоящей из 11 человек, найдутся два человека, имеющих одинаковое количество знакомых в этой компании.

Решение задачи 3.2 а) Посчитаем сначала концы всех диагоналей. В каждой вершине сходится 8 концов диагоналей, так как вершина соединена диагоналями со всеми вершинами, за исключением ее самой и двух соседних вершин. Поскольку всего 11 вершин, то число концов $11 \cdot 8$.

У каждой диагонали два конца, поэтому число диагоналей будет в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$.

Ответ: 44 диагонали.

Решение задачи 3.2 б) Сопоставим каждой команде точку, причем разным командам — разные точки. Каждому матчу между двумя командами сопоставим дугу, соединяющую две точки, соответствующие этим командам. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 20 точек, каждые две из которых соединены одной дугой. Сколько всего проведено дуг?

Посчитаем концы всех дуг. В каждой точке сходится 19 концов, поэтому всего $20 \cdot 19$ концов.

У каждой дуги два конца. Поэтому всего $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ дуг.

Возвращаясь к исходной задаче, получаем

ответ: всего было проведено 190 матчей.

Решение задачи 3.3 а) Снова сопоставим каждой команде точку, причем разным командам — разные точки. Каждые две точки соединены столькими дугами, сколько матчей сыграли соответствующие команды. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 11 точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило три дуги?

Посчитаем, какое количество дуг понадобится для этого. Как и раньше, считаем сначала концы дуг. По условию, в каждой точке должно сходиться три конца, поэтому концов должно быть $11 \cdot 3$. Дуг должно быть в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 3}{2}$. Стоп! Мы получили не целое число дуг. Такого быть не может и, следовательно, не может быть такого соединения.

Ответ: нельзя устроить.

Решение задачи 3.3 б). Такой турнир устроить можно. Команды будем обозначать точками, а матчи — дугами. На рисунке 19 приве-

дены примеры соединения восьми точек дугами, удовлетворяющего условию задачи.

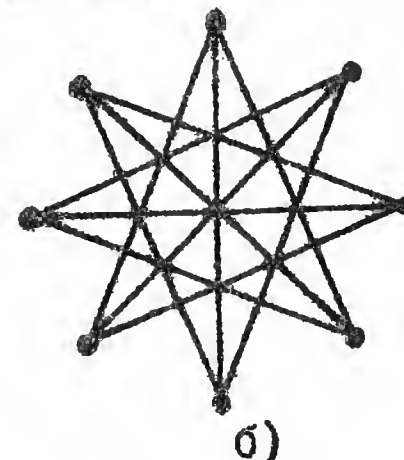
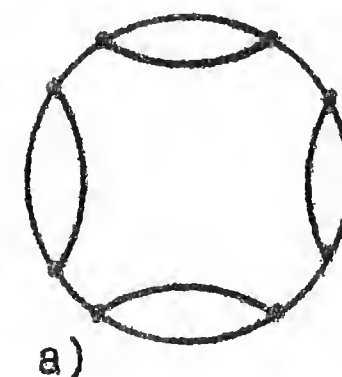


Рис. 19

Решение задачи 3.4. Допустим, что есть такая компания из 11 человек, в которой у всех разное число знакомых. Сопоставим каждому человеку число его знакомых. Поскольку всего 11 человек, то каждому человеку может быть сопоставлено только одно из 11 чисел от 0 до 10. Каждым двум должны быть сопоставлены разные числа, поэтому есть человек, у которого 0 знакомых, и есть человек, у которого 10 знакомых. Человек, у которого 10 знакомых, должен быть знаком со всеми остальными, но это противоречит тому, что у одного из них нет знакомых (у того, которому сопоставлено число 0). Таким образом, нет такой компании, и, следовательно, во всякой компании из 11 человек найдутся два человека, имеющие одинаковое количество знакомых.

Контрольные задачи к § 3.

Задача 3.5 а) Тот же вопрос, что и в задаче 3.2 а) для 50-угольника.

б) Четыре футбольных команды: A , B , C и D провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 6 матчах, команда B — в 5, команда C — в 7, D — в 10. Сколько всего состоялось матчей?

в) Три футбольных команды: A , B и C провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 6 матчах, команда B — в 7 матчах, а команда C — в 11 матчах. Сколько матчей сыграли друг с другом команды A и C ?

Задача 3.6 а) Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем участвовало 13 команд и каждая команда сыграла ровно 5 матчей?

б) Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем участвовало 10 команд и каждая команда сыграла бы ровно 5 матчей?

в) Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем участвовало 9 команд и каждая команда сыграла бы 4 матча?

Задача 3.7. Во всякой ли компании найдутся три человека, у которых одинаковое количество знакомых в этой компании?

Задача 3.8. а). В некоторой компании двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что в этой компании у каждого человека одинаковое число знакомых.

б). Попробуйте изобразить с помощью точек и соединяющих их дуг такую компанию, которая удовлетворяла бы условиям задачи 3.8а) в которой 16 человек и каждый имеет ровно 5 знакомых.

Задача 3.9. На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует выпуклых

- а) четырехугольников;
- б) пятиугольников;
- в) восьмиугольников

с вершинами в этих точках?

Замечание к задачам 3.5 б) и в). Некоторые ученики записывают решение этих задач так: приводят ответ и "граф", на котором показано, какие команды играли друг с другом и - сколько матчей. Но такое "доказательство" здесь не достаточно: а вдруг из другого рисунка получится другой ответ? Так и получается, если решать этим способом такую, например, задачу:

Задача 3.5 г). Четыре футбольных команды A, B, C и D провели друг с другом 10 тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 7 матчах, команда B - в 8. Сколько матчей сыграли друг с другом команды C и D ?

Решение. Обозначим команды точками, а матчи между ними - соединяющими эти точки дугами. Возможна такая картинка (рис. 20 а).

Однако условию задачи полностью удовлетворяет и ситуация, изображенная на рис. 20 б). Получаем (для той же задачи!) другой

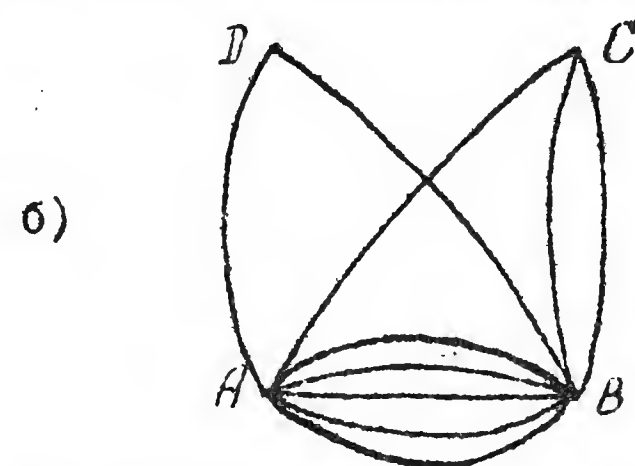
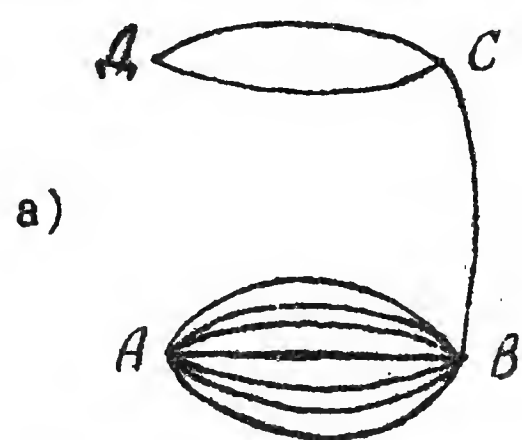


Рис. 20

ответ: команды C и D не сыграли между собой ни одного матча.

Возможен еще третий (тоже правильный) ответ на вопрос этой задачи. Подумайте сами, какой еще случай возможен.

Вы теперь видите, что для решения задачи 3.5 б) и 3.5 в) недостаточно только нарисовать соответствующий граф; нужно провести рассуждение, доказывающее, что ответ может быть только таким. Например, можно записать краткое решение задачи 3.5 г) в таком виде: "Обозначим число матчей, сыгранных командами X и Y , через n_{xy} . По условию,

$$\begin{cases} n_{AB} + n_{AC} + n_{AD} + n_{BC} + n_{BD} + n_{CD} = 10, \\ n_{AB} + n_{BC} + n_{BD} = 8, \end{cases}$$

поэтому: $n_{CD} \leq n_{CD} + n_{AD} + n_{AC} = 2$,

то есть n_{CD} может равняться только 0, 1 и 2. Примеры (см. рис. 20) показывают, что все эти случаи возможны".

Замечание к задаче 3.7. Если в задаче спрашивается "можно ли" или "всегда ли найдется", то возможны два ответа: "да" или "нет". Если Ваш ответ "нельзя" или "всегда найдется", то Вы должны привести полное доказательство, учитывающее все возможные случаи. Если Ваш ответ "можно" (в каком-нибудь случае) или "не всегда", то достаточно привести соответственно подтверждающий или опровергающий пример.

Указание к задачам 3.7 и 3.8 а). Пусть A и B знакомы. Обозначим через M_A множество знакомых A ; M_B - множество знакомых B . Докажите, что:

- 1) M_A и M_B не имеют общих элементов, кроме A и B .
- 2) каждый из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B и
- 3) каждый из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A .

Отсюда следует, что между M_A и M_B можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Указание к задаче 3.9. Каждое множество из K точек на окружности служит множеством вершин одного выпуклого K - угольника. Если занумеровать точки так, как это сделано в первом решении задачи 3.9, то каждому такому множеству можно сопоставить (взаимно-однозначным образом) K - значное число с убывающим порядком цифр.

Заключение. Изображение условия задач с помощью точек и соединяющих их дуг очень часто помогает при решении задач (так же, как наглядное изображение множеств в виде "кругов" пригодились нам в § 1). Система точек и соединяющих их дуг в математике получила специальное название: граф. С помощью графа можно изобразить ситуацию такого типа: задано некоторое множество и в нем - некоторые подмножества, состоящие из двух элементов каждое (множество команд - и пары команд, сыгравших между собой; множества людей -

и пара знакомых; множество вершин многоугольника - и пары вершин, соединенных диагоналями, и т.д.).

В решении задач 2.0 а) и 3.0 мы подсчитали число различных подмножеств из двух элементов в множестве A , состоящем из 10 цифр: 0, 1, 2, ..., 9; это число равно 45. В задаче 2.8 - основной задаче § 2 - мы по существу посчитали количество различных подмножеств из K элементов в этом множестве. В следующем параграфе мы увидим, что эти же числа возникают во многих естественных задачах на подсчет различных вариантов.

Приложение к § 3.

В прошлом году две трети всех учащихся I курса ошиблись при решении задач 3.6 б) и 3.6 в). Приведем неверное решение 3.6 б) Нины Дергачевой. Она пишет: "задача 3.6 б) сводится к такой:

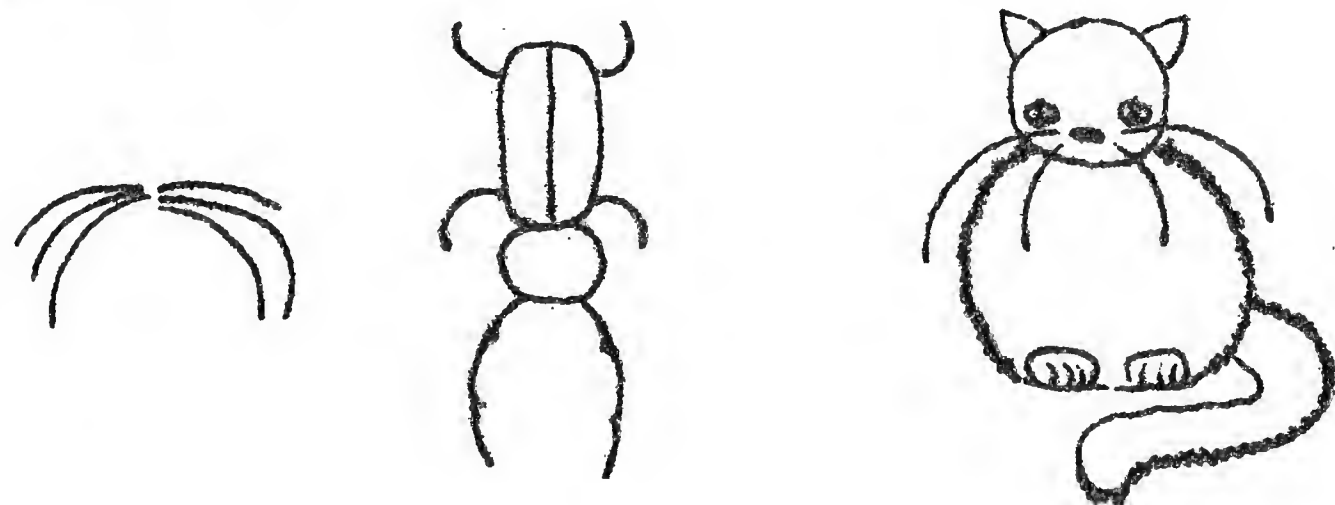
Имеется 10 точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило 5 дуг.

Дуг должно быть $\frac{10 \cdot 5}{2} = 25$. Получено целое число дуг - значит можно".

Возразим Нине образно так:

Если есть таракан - то есть усы. Но если есть усы, то это еще не значит, что есть таракан.

В этой задаче нужно привести пример: нарисовать нужное соединение.



§4. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ.

В §§1 - 3 мы познакомились с несколькими приемами решения комбинаторных задач. Мы не раз убеждались в том, насколько важно уточнить формулировку задачи, перевести ее на тот язык, на котором удобно ее решать и писать решение.

Следующие задачи лишь частично связаны с предыдущими - к каждой из них требуется свой подход. К некоторым задачам приведены указания, но вы можете, разумеется, идти своим путем.

4.1. Сколькими способами можно распределить два билета в театр среди четырех людей?

Указание. Заметим, что формулировка этой задачи далека от совершенства, ее необходимо уточнить. В самом деле, неясно:

а) может ли один человек получить оба билета (пойти в театр с женой);

б) считаем ли мы оба билета одинаковыми или нет (может быть, это билеты на соседние места, а может быть, один - в партер, а другой - на балкон)?

На каждый из этих вопросов можно ответить и так, и этак. От этого будет зависеть результат задачи. Поэтому рассмотрите разные случаи и приведите соответствующие ответы.

4.2. Элементами множеств A , B и C служат числа 1, 2, 3, 4, ..., 9. Известно следующее:

$$A \cap B = \{1, 2\}; \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\};$$

$$B \cap C = \{3, 7\}; \quad A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Найдите множества A , B и C .

Ответ: $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$; $C = \{3, 4, 5, 7, 9\}$.

Решение. В этой задаче можно рассуждать о каждом числе отдельно, фактически решая 9 независимых задач.

1). Начнем с числа 1. Поскольку 1 принадлежит пересечению A и B , то 1 принадлежит обоим множествам A и B . Если бы 1 принадлежала еще и C , то 1 принадлежала бы пересечению B и C , а это не так. Значит, 1 не принадлежит C .

2). Число 2 входит ровно в те же множества, что и 1. Поэтому для 2 проходит то же рассуждение.

3). Число 3 входит в $B \cap C$, поэтому 3 входит и в B ,

и в C . Но 3 не входит в AB , поэтому 3 не входит в A .

4). Число 4 не входит в AB , поэтому оно не входит ни в A , ни в B . Но оно входит в BC , поэтому оно входит только в C .

5). Для 5, 6, 8, 9 те же рассуждения, что и для 4.

6). Для 7 те же рассуждения, что и для 3.

Замечание. Если Вы хорошо разобрались в приведенном решении, Вам легко будет понять, что решение можно записать и гораздо короче.

1). Так как множества AB и BC не имеют общих элементов, то нет такого элемента, который принадлежал бы одновременно всем трем множествам A , B и C . Отсюда следует, что числа 1, 2 принадлежат и A , и B , но не принадлежат C , а числа 3 и 7 принадлежат и B , и C , но не принадлежат A .

2). Если элемент не принадлежит $K \cup L$, то он не принадлежит ни K , ни L , а если он одновременно принадлежит $K \cup M$, то он принадлежит M . Отсюда следует, что числа 6 и 8 принадлежат B , но не принадлежат ни A , ни C , а числа 4, 5, 9 принадлежат C , но не принадлежат ни A , ни B .

4.3. Какие из чисел 1, 2, 3, ..., 9 входят в множества A , B , C , D , если известно следующее: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$; $A \cap C = \{1\}$; $A \cup D = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$; $A \cap D = \{2, 5, 9\}$; $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B \cap C = \{6\}$?

4.4. Четыре девочки: Катя, Лена, Маша и Нина - участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен - больше, чем все остальные, а Лена - 5 песен - меньше, чем все остальные. Сколько песен было спето?

Ответ: 9 песен.

Решение. Вообразим, что каждой девочке за исполнение каждой песни давали фантик. Тогда Катя получила 8 фантиков, а Лена - 5 фантиков. Маша получила 6 или 7 фантиков, Нина - тоже. Все вместе получили не меньше, чем $5 + 6 + 6 + 8 = 25$ и не больше, чем $5 + 7 + 7 + 8 = 27$ фантиков. За каждую песню раздавали по три фантика. Значит, чтобы получить число песен, надо общее число фантиков разделить на три. Но из трех возможных значений для числа фантиков: 25, 26, 27 только 27 делится на три. Получается при этом 9.

4.5. Пятеро друзей: Витя, Нина, Лариса, Коля и Поля играли в

в прятки. Игра проходила в несколько туров. Каждый тур начинался с того, что четверо друзей прятались в разные места, а пятый их искал - водил. Как только водящий находил кого-то из спрятавшихся друзей, тур кончался. В следующем туре водил тот, кого нашли в предыдущем. Сколько раз водил Коля, если он больше всех - 11 раз - не был водящим, а меньше всех - 8 раз - не была водящей Нина?

4.6. а). Имеется 7 точек. Каждая пара из них соединена либо синей дугой, либо красной. Всегда ли можно выбрать из этих точек такие три, что все дуги, соединяющие их друг с другом, будут одного цвета?

б). Тот же вопрос для 4 точек.

в). Тот же вопрос для 5 точек.

г). Тот же вопрос для 6 точек.

4.7. Пусть каждая пара из 6 точек соединена красной или синей дугой. Всегда ли можно найти два треугольника, образованные дугами одного цвета (разрешается, чтобы эти два треугольника имели общую дугу)?

4.8. В компании из 6 человек некоторые знакомы друг с другом. Докажите, что в этой компании либо 3 незнакомых друг с другом человека, либо 3 попарно знакомых.

4.9. В выражении $(a+b)^{10}$ проведите возведение в степень и приведите подобные члены. Какие коэффициенты будут стоять при a^{10} , a^9b , a^8b^2 , a^7b^3 , a^6b^4 , ...?

Указание. $(a+b)^n$ - это произведение десяти сомножителей $(a+b)$. Занумеруем их по порядку так: $(a+b)^0 (a+b)^1 (a+b)^2 (a+b)^3 \dots (a+b)^9 (a+b)^9$

1). Если из каждой скобки взять букву a , то при умножении скобок мы получим член a^{10} .

2). Очевидно, что член a^9b получается, если из одной (любой!) скобки мы берем букву b , а из остальных - букву a . Поскольку у нас всего 10 скобок, то после перемножения мы получим 10 слагаемых вида a^9b .

3). Посчитаем теперь, сколько раз получится член a^8b^2 (это и будет коэффициент при a^8b^2). Чтобы в произведении получилось 8 раз a и два раза b , нужно из каких-то двух скобок взять букву b , а из восьми остальных - букву a . Запишем номера тех двух скобок, из которых мы выбирали букву b . Получится

двузначное число, цифры которого идут в порядке возрастания: например, если мы взяли букву b из 0-ой и 8-ой скобок, то пишем 08. Таким образом, одночлен $a^8 b^2$ при умножении встретится столько раз, сколько существует двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающей порядке, т.е. 45 раз, и поэтому коэффициент при $a^8 b^2$ равен 45. Итак,

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + \dots + a^9b + \dots \quad (*)$$

Продолжите наши рассуждения и укажите ответ.

4.10. а) Чему равна сумма всех коэффициентов $(1 + 10 + 45 + \dots + 10 + 1)$ в предыдущей задаче?

б) Чему равна сумма коэффициентов при членах с четными степенями a и b , т.е. $(1 + 45 + \dots + 1)$?

Указание. Подставьте в равенство $(*)$ $a=b=1$, а затем —

$$a=1, b=-1.$$

4.11. В выражениях: а) $(a+b)^4$; б) $(a+b)^5$ в) $(a+b)^6$ проведите возведение в степень и приведите подобные члены.

4.12. а) Сколько клеток в фигуре, изображенной на рис. 20?

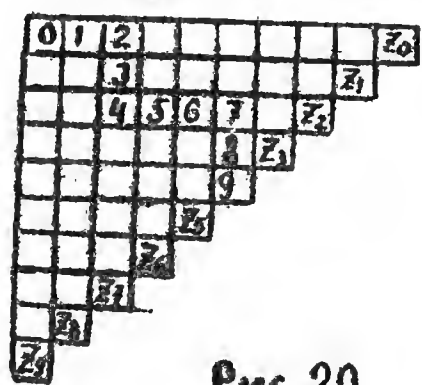


Рис. 20

б) Сколькими способами можно поместить цепочку цифр 0 1 2 ... 9 в эту таблицу так, чтобы каждые две соседние цифры помещались в клетках, имеющих общую сторону, цифра 0 стояла в левой верхней клетке, а цифра 9 — в клетке Z_k ($k = 0, 1, 2, \dots, 9$)?

Прежде чем формулировать следующую задачу, введем одно определение. Назовем разбиением целого положительного числа представление его в виде суммы целых положительных чисел. Вот, например, все разбиения числа 4:

$$4; 3 + 1; 1 + 3; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 2 + 1; 1 + 1 + 2; 1 + 1 + 1 + 1.$$

Как видно из этого примера, мы считаем разбиения разными, если они отличаются либо числами — слагаемыми, либо порядком, в каком эти числа расположены. Решим теперь такую задачу.

4.13. Сколько существует разных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?

Указание. Представим себе число 11 в виде 11 точек, расположенных в ряд. Тогда всякое разбиение этого числа на 4 слагаемых

можно отметить тремя черточками. Например, разбиение $11 = 5 + 3 + 2 + 1$ можно представить себе так: $\dots\dots/ \dots/ \dots/$.

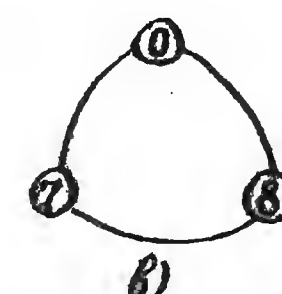
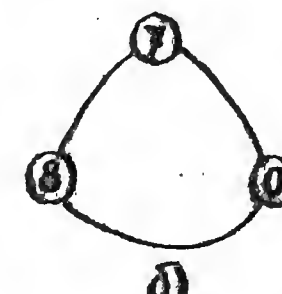
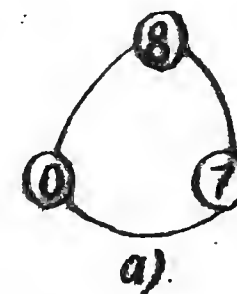
Первой черточкой мы отсекли 5 точек, второй — еще 3 точки, и третьей — следующие 2 точки, после чего осталась 1 точка.

Легко видеть, что и наоборот, расставив каким-либо образом 3 черточки между точками, мы зададим разбиение числа 11 на 4 слагаемых. Например, разбиением черточками $\dots/ \dots/ \dots/ \dots$ соответствует такое разбиение: $11 = 3 + 4 + 2 + 2$. Итак, мы видим, что задача 4.13 сводится к следующей задаче. Имеется 11 точек, расположенных в ряд. Сколькими способами можно расставить между ними 3 черточки?

4.14. Сколько существует трехзначных чисел с невозрастающим порядком цифр?

4.15. Тот же вопрос, что и в задаче 4.14, для четырехзначных чисел.

4.16. а) Три разные цифры ставятся по кругу. Сколько существует таких расстановок (две расстановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми, например, те, которые изображены на рис. а), б), в))?



б). Условие то же, что и в а), только для четырех цифр.

4.17 а) Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая цифра — самая большая и все цифры различны?

б). Тот же вопрос для четырехзначных чисел.

4.18. Номер автомашин состоит из трех букв русского алфавита (33 буквы) и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

4.19. На рояле — 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

4.20. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?

4.21. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?

4.22. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

4.23. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

4.24. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?

4.25. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?

4.26. Сколькими способами можно расставить в ряд числа 1, 2, 3, ..., n так, чтобы числа 1, 2, 3 попали рядом и притом шли в порядке возрастания?

4.27. а) Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать любое число раз?

б) Тот же вопрос, но с условием, что каждую цифру можно использовать не более одного раза.

4.29. Каждая из вершин шестиугольника раскрашивается в один из трех цветов так, чтобы две соседние вершины не оказались раскрашенными в один цвет. Сколько есть способов такой раскраски?

4.30. Сколькими способами можно составить ожерелье из 6 бусинок, из которых 2 черных, а 4 - зеленых (ожерелья, получающиеся передвижением бусинок по кругу, считаются одинаковыми)?

4.31. Мама каждый день выдает на десерт по одному фрукту. У нее есть 3 одинаковых яблока, 5 одинаковых груш, 2 одинаковых персика и 1 апельсин. Сколькими способами она может выдать эти фрукты в течение 11 дней?

4.32. Сколькими способами 20 одинаковых монет можно разложить в три кармана так, чтобы в каждом лежало не менее двух монет?

4.33. Из слова ROT перестановками букв можно получить еще такие слова: TOP, OPT, OTR, TPO, PTO. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слов: а) ЛОГАРИТМ; б) РЕЕСТР?

4.34. Из троих надо одному сделать неприятную работу. Его выбирают "морским счетом" - каждый показывает какое-либо число пальцев от одного до пяти, находится сумма показанных трех чисел и затем считают, начиная с одного из участников, подряд от 1 до того

числа, которое получилось в сумме. Докажите, что не все положения участников равноправны. Каким быть выгоднее: тем, с кого начинается счет, вторым или третьим?

В заключение приведем решение задач 3.8 а) и б) способом, отличным от данного в указании на стр. 23.

Пусть для каждого человека A через M_A обозначается множество его знакомых, через N_A - множество не знакомых с A . Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком), и нетрудно доказать, что это соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимнооднозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их $m_A(m_A-1)/2$, а всего в компании $n = 1 + m_A + \frac{m_A(m_A-1)}{2}$ людей. Это равенство верно для любого человека A . Но уравнение $n = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}$

имеет (при $n > 1$) только один положительный корень, следовательно, m_A одно и то же для всех A (аналогичное решение разобрано в книге А. Лемана "Сборник задач московских математических олимпиад", задача XXIII, II, IO, 3).

Интересно выяснить, при каких n такие компании действительно существуют. Полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Мы видели, что $n = \frac{m(m+1)}{2} + 1$, где m - количество знакомых одного человека, но не при любом n существует нужная компания. Например, нетрудно доказать, что таких компаний не существует при $m=3$, $m=4$ и вообще при $m=4k+3$. Кроме очевидных примеров таких компаний - для $m=1$, $n=2$ и $m=2$, $n=4$ - мы знаем только один: $m=5$, $n=16$.

Эту конфигурацию из 16 точек и 40 отрезков можно описать так: множество вершин, ребер и больших диагоналей четырехмерного куба*. Изобразить данную конфигурацию с помощью точек и соединяющих их дуг - это и значит решить задачу 3.8 б).

Построить эту схему можно следующим образом. Возьмем 16 точек и разобьем их на 4 группы по 4 точки в каждой; точку занумеруем парой индексов (a, b) , где a - номер группы, b - номер точки в

* О четырехмерном кубе см., например, в книге "Метод координат"

группе; a и b могут принимать значения 1, 2, 3, 4. Будем проводить дуги так:

1) в каждой группе соединим первую точку со второй, вторую - с третьей, третью - с четвертой, четвертую - с первой;

2) соединим теперь точки: $(1,1)-(2,2)-(3,3)-(4,4)-(1,1)$
 $(1,4)-(2,1)-(3,2)-(4,3)-(1,4)$
 $(1,3)-(2,4)-(3,1)-(4,2)-(1,3)$
 $(1,2)-(2,3)-(3,4)-(4,1)-(1,2)$;

3) наконец, соединим каждую точку с индексом $(1, b)$ с соответствующей точкой $(3, b)$ и каждую точку $(2, b)$ с соответствующей точкой $(4, b)$.

Полученная схема, как легко проверить, удовлетворяет условию задачи (см. рис. 21).

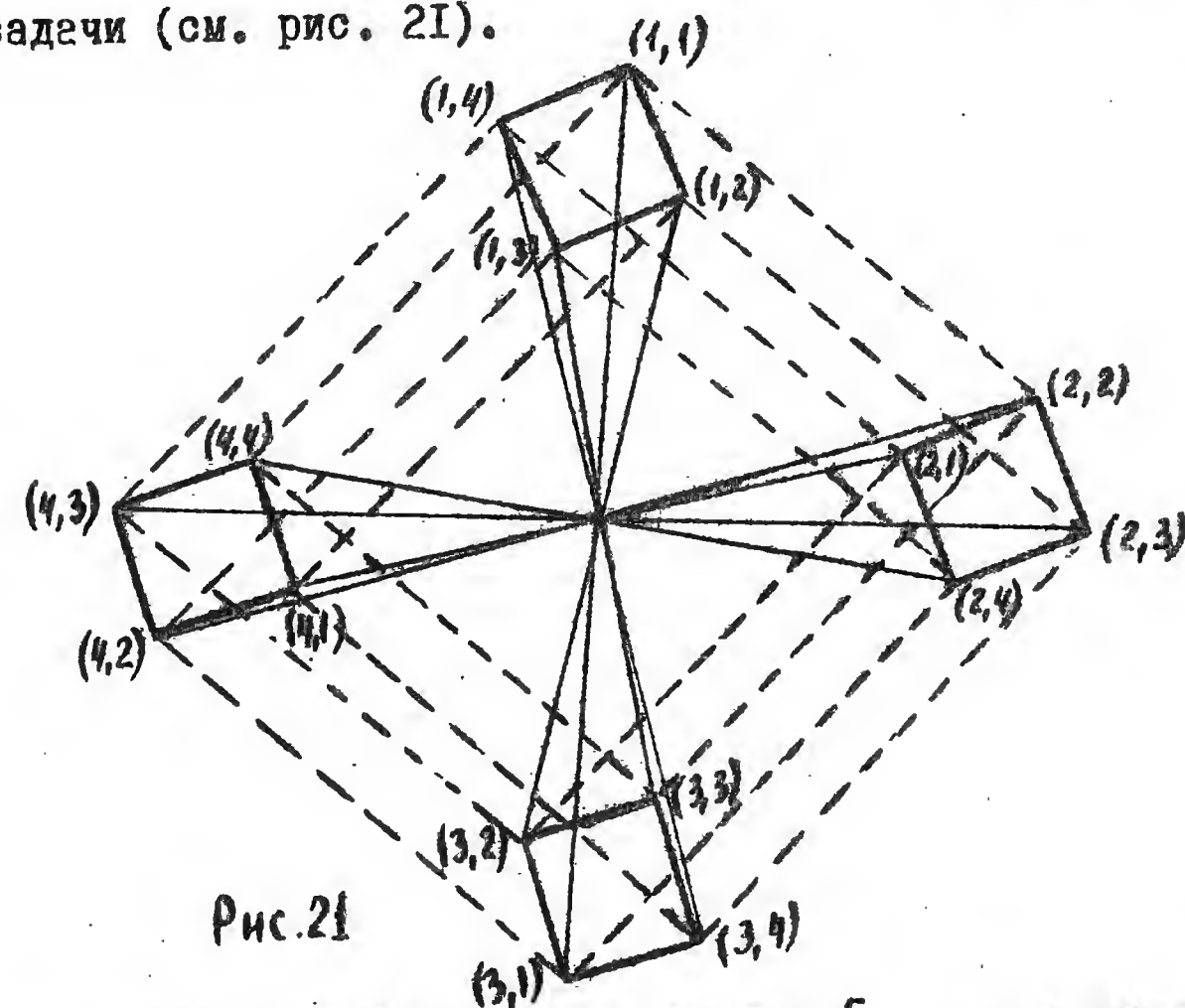


Рис. 21

4.35 (Н. Бурбаки). В множестве E , состоящем из n элементов, выделены m различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для любых двух элементов из E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

а). Докажите, что $m \geq n$.

б). В каких случаях возможно равенство $m = n$ (это пока никому не известно)?

N 2.2-4. K

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ АПИ СССР

НЕКОТОРЫЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ
(Сборник заданий для учащихся УИ - IX классов)

Москва, 1976.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся II курса ВЭМШ по заданию № 14 по теме "КОМБИНАТОРИКА"
(решения задач)

В этот раз мы посылаем Вам решения задач соответствующего задания. Советуем Вам внимательно разобрать эти решения и сравнить со своими.

Обязательные задачи.

- 1) 4.18. Номер автомашин состоит из трех букв русского алфавита (33 буквы) и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

Ответ: $33^3 \times 10^4$ номеров.

Решение. Первую букву можно выбрать 33 способами, вторая буква выбирается независимо от первой - 33 способами, следовательно, две буквы можно выбрать $33 \times 33 = 33^2$ способами; третья буква выбирается тоже 33 способами, значит, три буквы можно выбрать 33^3 способами.

Первую цифру можно выбрать 10 способами, вторую - также 10 способами, значит, 2 цифры - 10^2 способами, четыре цифры - 10^4 способами. Буквы и цифры номера выбираются независимо, следовательно, по правилу произведения, существует всего $33^3 \times 10^4$ номеров.

- 2) 4.20. Сколько есть шестизначных чисел, делящихся на 5?

Ответ: 18×10^4 чисел.

Решение. Первую цифру числа можно выбрать 9 способами (любая цифра, кроме 0), каждую следующую, кроме последней, - 10 способами, таких цифр - четыре, последняя цифра может быть только 0 или 5 - 2 способа. Так как каждая цифра выбирается независимо от остальных, то "по правилу произведения" всего может быть $9 \times 10^4 \times 2 = 18 \times 10^4$ чисел.

- 3) 4.21. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?

Ответ: 3^7 способов.

Решение. Первую монету можно положить тремя способами, вторую монету - тоже тремя способами, причем выбор кармана для второй монеты не зависит от того, куда положили первую. Значит, по "правилу произведения", 2 монеты можно разложить 3^2 способами, 3 монеты - 3^3 способами; добавление 1 монеты увеличивает число способов в 3 раза. Следовательно 7 монет можно разло-

жить 3^7 способами.

- 4) 4.22. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

Ответ: $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$.

Решение. Легко подсчитать, сколько существует пятизначных чисел, в записи которых нет цифр пять. На первом месте в таком числе может стоять любая из 8 цифр (кроме 0 и 5), на каждом из последующих — любая из 9 цифр (кроме 5), значит, пятизначных чисел, в записи которых нет цифр 5 — $8 \cdot 9^4$. Всего пятизначных чисел — $9 \cdot 10^4$. Следовательно, пятизначных чисел, в записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5, будет $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4$.

- 5) 4.24. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?

Ответ: $17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

Решение. В числе, делящемся на 5, на последнем месте стоит 0 или 5. Рассмотрим отдельно эти случаи. Пусть на последнем месте стоит 0, тогда на первом любая из оставшихся 9 цифр, на втором — из 8 неиспользованных цифр, на третьем — из 7 цифр, и на четвертом — из 6 цифр; всего пятизначных чисел, оканчивающихся 0, с разными цифрами будет $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Если на последнем месте 5, то на первом месте — одна из 8 цифр (кроме 0 и 5), на втором — одна из 8 (кроме 5 и использованной для первого места), на третьем — одна из 7, на четвертом — одна из 6, всего таких чисел будет $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, а всего чисел, отвечающих условию задачи $(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (9 + 8) = 17 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$.

- 6) 4.27а. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать любое число раз?

Ответ: 6^5 .

Решение. На первом месте в числе может стоять любая из шести данных цифр — 6 возможностей, на втором — тоже любая из 6 цифр и т.д. Всего чисел по "правилу произведения" может быть 6^5 .

4.27б. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать не более одного раза?

Ответ: $A_6^5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

Решение. Из имеющихся 6 цифр надо составить упорядоченные множества из 5 элементов — размещения из 6 элементов по 5. Число их равно $A_6^5 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$.

- 6) 4.30. Сколькими способами можно составить ожерелье из 6 бусинок, из которых 2 черных, а 4 зеленых (ожерелья, получающиеся передвижением бусинок по кругу, считаются одинаковыми)?

Ответ: 3 способа.

Решение. 2 черные бусинки можно поставить рядом, можно поместить между ними одну зеленую бусинку или 2 зеленых бусинки (см. рисунки).



- 9) 4.33 а). Сколько анаграмм можно составить из слова "логарифм"?

В слове "логарифм" все буквы разные.

Анаграмм будет столько, сколько существует перестановок из 8 букв этого слова — $P_8 = 8!$

- 10) б) Сколько анаграмм можно составить из слова "реестр"?

Ответ: $\frac{6!}{2!}$.

Решение. Занумеруем две буквы e_1 и e_2 . После нумерации все буквы стали разными, из них можно составить $6!$ анаграмм (перестановок). Если теперь стереть в каждой из этих перестановок значки при буквах e , то одна и та же перестановка (анаграмма) будет встречаться 2 раза. (буквы e можно переставить 2! способами). Значит, число различных анаграмм будет в 2 раза меньше числа перестановок из 6 элементов, т.е. $\frac{P_6}{2!} = \frac{6!}{2!}$.

Дополнительные задачи.

4.16 а). Три разные цифры ставятся по кругу. Сколько существует таких расстановок (две расстановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми)?

Ответ: $\frac{A_3}{3}$

Решение. Составим все размещения из 10 цифр по 3 и расположим элементы их по кругу. Полученные размещения разобьем на классы так, что размещения принадлежат одному классу, если они отличаются только поворотом круга. В каждый класс, очевидно, попадает 3 размещения. Таким образом, число классов равно $\frac{A_{10}}{3}$. Очевидно, что число расстановок, о которых идет речь в задаче, равно числу классов.

4.16 б). 4 разные цифры ставятся по кругу. Сколько существует таких расстановок (2 расстановки, отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми)?

Ответ: $\frac{A_4}{4}$

Решение. аналогично предыдущей задаче.

4.23. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

Ответ: 19!

Решение. Составим перестановки из 20 элементов, расположив элементы по кругу. Число перестановок будет равно $P_{20} = 20!$. Разобьем полученные перестановки на классы так, чтобы в один класс попали перестановки, которые могут быть получены одна из другой только поворотом. Искомое число способов равно числу классов, т.е. $\frac{20!}{20} = 19!$, так как в каждом классе будет 20 перестановок (см. задачу 4.16).

4.31. Мама каждый день выдает на десерт по одному фрукту. У ней есть 3 одинаковых яблока, 5 одинаковых груш, 2 одинаковых персика и 1 апельсин. Сколькими способами она может выдать эти фрукты в течение 11 дней?

Ответ: $\frac{11!}{3!5!2!}$

Решение. Пусть число искомым "расстановок" всех фруктов -- X . В каждой расстановке составим все возможные перестановки яблок, груш и персиков. Тогда число новых "расстановок" будет равно $X \cdot 3! \cdot 5! \cdot 2!$ (число перестановок яблок -- $3!$; груш -- $5!$, персиков -- $2!$). Мы получили таким способом все перестановки из 11 элементов, их число $P_{11} = 11!$, а искомое

$$X = \frac{11!}{3!5!2!}$$

говорится

Замечание. Наборы, о которых в задачах 4.33б) и 4.31, называются "перестановками с повторениями". Подробно о таких перестановках Вы можете прочесть в книге Виленкина "Комбинаторика".

Разработки подготовили: Гутенмахер В.Л., Вайсман Н.П., Юсина Г.Б.

Зач 6496

1977/78 учебный год.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
или учебника ВЗМШ по саланию № 2
(тема "Комбинаторика")

Это салание бы дукте выполнить по форме В.Л.Гутенмахера
"Некоторые комбинаторные салачи". Нике слагует снрок контроль-
них салачи.

Обязательные салачи.		
1. М1.1а) - 1).	2. М1.3а) - 1).	3. М1.5.
4. М1.6.	5. М1.7а) - в).	6. М4.3.
7. М1.12.	8. М1.14в).	9. М2.4.
10. М2.5.	11. М2.6а), в), 2.6.	12. М2.8.
13. М2.9.	14. М3.5а).	15. М3.5б).
16. М3.5в).	17. М3.6а).	18. М3.6б).
19. М3.6в).	20. М3.7.	21. М3.9а).
Дополнительные салачи.		
22. М4.1.	23. М4.5.	24. М4.6а).
25. М4.6б).	26. М4.6в).	27. М4.6г).
28. М4.7.	29. М4.8.	

Замечание. В салаче № 2.9 ответ может быть сален так
же, как и в салаче № 2.8.

Критерии оценок.

Обязательные салачи: "5" - решено не менее 20 салачи;
"4" - решено не менее 15 салачи;
"3" - решено не менее 10 салачи;
"5" - решено не менее 6 салачи;
"4" - решено не менее 4 салачи.

Срок присылки салания № 1 - 15 октября 1977 года.

Разработчи подготовили: Н.Д.Вайсман, В.Л.Гутенмахер,
Л.Г.Серебрянникова.

Методическая Комиссия ВЗМШ.

Июль 1977 г.

1977/78 учебный год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для преподавателей I курса ВЗМШ по проверке задания №2
по теме "КОМБИНАТОРИКА"

I. Общие сведения.

Цель этого задания состоит, прежде всего в том, чтобы школьники научились математически грамотно записывать решения задач.

Построено задание следующим образом. Контрольные задачи почти идентичны разобранным в тексте. Поэтому школьники должны фактически переписывать наши решения. Важно проследить за тем, сознательно или нет это сделано. Задачи в тексте, естественно, разбиты по параграфам.

II. Указания по отдельным обязательным задачам.

§ 2 (Одна комбинаторная задача).

Задача 2.4. должна быть написана на основе решения 2.2, помещенном в тексте. В этой задаче обязательно должна фигурировать идея взаимнооднозначного соответствия. Тем не менее, поставить "+", если дан верный ответ, и "-", если нет.

Задачи 2.5 и 2.6. В решении должна присутствовать идея "разбиения на классы", либо (в задаче 2.5) четкое сведение к задаче 2.1. Если эта идея понята и ответ верный, то поставить "+" или "+" при небольших недочетах.

Заметим, что задачи 2.6а) и 2.6б) являются леммами к задаче 2.6. Поэтому наиболее вероятен случай, когда решены задачи 2.6а), 2.6б) и 2.6, и невероятен случай, когда решена задача 2.6, но не решены 2.6а) и 2.6б).

Задача 2.8 состоит по существу в том, чтобы найти ответ при $K=5$.

Задача 2.9. Ответ должен быть записан так же, как в задаче 2.8.

§ 3. Графы.

Задачи 3.5 а), б), в) и 3.6 а). должны быть аккуратно выполнены школьником (т.е. учащиеся должны уметь в каждой из этих задач переводить условие на язык "точек и дуг", как в задачах 3.2а), б) и 3.3а).

Задачи 3.6 б), в). Школьник должен в этих задачах построить пример графа. Если такого примера нет, то ставить "-" и указать на замечание к задаче 3.7, поясняющее, почему нужен пример.

III. Указания по отдельным дополнительным задачам.

> § 4. Разные задачи.

> Задача № 4.1. Учащиеся могут придерживаться различных точек зрения (см. замечание к этой задаче в тексте), поэтому возможны различные ответы.

> Задача № 4.7. Возможны также различные ответы, в зависимости от того, считают ли учащиеся, что треугольники должны быть одного цвета или могут быть разного.

Указания подготовили В.Л.Гутенмахер и Л.Г.Серебрянникова.

Методическая комиссия ВЗМШ

Май 1977 года

Зак 6499

1977/78 учебный год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся II курса ВЭМШ по заданиям № 14 ("КОМБИНАТОРИКА")

Мы посылаем Вам снова задание по брошюре "Некоторые комбинаторные задачи". Надеемся, что она сохранилась у Вас с прошлого года.

В начале 9 класса в школе проходят тему "Комбинаторика". Ознакомившись с основными её понятиями: „сочетания и число сочетаний C_n^k “, „перестановки и число перестановок P_n “, „размещения и число размещений A_n^k “, Вы можете пересмотреть прошлогодние задания. Например, легко видеть, что в задании по § 2 "Одна комбинаторная задача" Вы, по существу, искали число C_{10}^k для различных k . Находили это число так: сначала искали A_{10}^k , затем P_k и, в конечном счете, $C_{10}^k = \frac{A_{10}^k}{P_k}$.

Теперь мы предлагаем Вам новые задачи из этой брошюры. При решении этих задач можно пользоваться известными Вам формулами. Однако в большинстве задач скорее всего нужны будут не формулы, а "правило произведения", о котором говорится в брошюре на стр. 18. То же правило можно сформулировать иначе: если некоторый выбор может быть сделан m различными способами, а для каждого из этих способов некоторый второй выбор может быть сделан n различными способами, то число способов для осуществления последовательности этих выборов равно произведению $m \cdot n$. Приведем пример решения задачи с использованием "правила произведения".

4.19. На рояле — 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

Решение. Мы считаем, конечно, что одни и те же звуки могут повторяться в мелодии. Первый звук можно извлечь 88 способами. Второй звук также можно извлечь 88 способами. Два звука извлекаются независимо друг от друга, поэтому по "правилу произведения" два звука можно извлечь 88^2 способами. Третий звук извлекается также независимо от первых двух. Поэтому три звука можно набрать 88^3 способами. Рассуждая точно также дальше, получаем ответ: 88^6 .

Заметим, что Вы можете сослаться при решении задач на более общее "правило произведения".

Пусть имеется K множеств $A_1, A_2, A_3, \dots, A_K$,
в каждом из них соответственно m_1, m_2, \dots, m_K элементов.

Тогда число всевозможных наборов (a_1, a_2, \dots, a_k) , где $a_i \in A_i$, равно произведению $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

Обязательные задачи.

- | | | | |
|----------|----------|----------|-----------|
| I) 4.18 | 4) 4.22 | 7) 4.27б | 10) 4.33б |
| 2) 4.20 | 5) 4.24 | 8) 4.30 | |
| 3) 4.21. | 6) 4.27а | 9. 4.33а | |

Дополнительные задачи.

- | | |
|------------|----------|
| II) 4.16 а | I3) 4.23 |
| I2) 4.16 б | I4) 4.31 |

Указания по отдельным задачам

4.18, 4.20 и др. Ответ надо записать в виде формулы, не подсчитывая его численное значение (так в разобранном выше примере мы записали 88^6 , не подсчитывая, чему равно это число).

4.21. В задаче надо считать, что не только все монеты разные, но и карманы разные.

4.20, 4.22, 4.24, 4.27. Имеется в виду, что первая цифра не 0.

Критерии оценок.

За обязательные задачи: "5" - решены все задачи,
"4" - решено не менее 7 задач,
"3" - решено не менее 4 задач.

За дополнительные задачи: "4" - решено 2-3 задачи,
"5" - решено 4 задачи.

Срок присылки задания № I4 - 20 ноября 1977 года

Разработки составили: В.Л.Гутенмахер, Н.Ю.Вайсман,
Г.Б.Юсина.

Методическая комиссия ВЭМШ

Май 1977 года

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для учащихся I курса ВЗМШ по заданию №3.

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Цель этого задания состоит, прежде всего, в том, чтобы научиться математически грамотно записывать решения задач.

Задание состоит из четырех параграфов. Задачи первого параграфа приводят читателя к важной формуле "включения и исключения". Эта формула, как Вы увидите, часто применяется при решении самых разнообразных задач.

Второй параграф этого задания касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных k -значных чисел, цифры которых в десятичной записи расположены в убывающем порядке? Путь к решению этой задачи состоит в том, чтобы разобраться в условии задачи для небольших значений k и разбить задачу на более простые.

Третий параграф начинается с геометрической интерпретации задачи №2.0 из §2. Далее он продолжается задачами, условия которых удобно изображать в виде "графов" (т.е. комбинациями точек и соединяющих их дуг).

Параграф четвертый — новые вариации на тему, начатую в §2.

С о д е р ж а н и е .

	Стр.
§1. Включения и исключения	3
§2. Одна комбинаторная задача	8
Контрольные задачи к §2	13
§3. Геометрическое изображение задачи 2.0 и несколько задач о графах	15
Контрольные задачи к §3	18
§4. Произведения, суммы, расстановки цифр	21

В конце каждого параграфа приведено заключение, обобщающее материал, изложенный в тексте.

Ваше задание состоит в том, чтобы внимательно проработать текст задания, обращая внимание на образцы записи решений, приведенные в нем. При выполнении задания следуйте этим образцам.

Обязательные задачи

- | | |
|-----------------------------|-----------------|
| 1. №1.1г). | 13. №3.6б). |
| 2. №1.3 а), б), в), г), д). | 14. №3.6в). |
| 3. №1.5. | 15. №3.9б). |
| 4. №1.7. | 16. №4.0. |
| 5. №2.4. | 17. №4.1а), б). |
| 6. №2.5. | 18. №4.4. |
| 7. №2.6, 2.6а), 2.6б). | 19. 4.8 |
| 8. №2.8. | |
| 9. №3.5а). | |

10. №3.56).
 11. №3.5в).
 12. №3.6а).

Д о п о л н и т е л ь н ы е з а д а ч и

23. №1.8. 28. №3.86).
 24. №1.9. 29. №4.2.
 25. №2.9. 30. №4.5.
 26. №3.7. 31. №4.7а), б), в).
 27. №3.8а). 32. №4.9.

С р о к п р и с ы л к и з а д а н и я № 3 - 25 ноября 1974 г.

К р и т е р и й о ц е н о к

Обязательные задачи: "3" - решено не менее 11 обязательных задач, причем среди них есть задачи из всех параграфов;

"4" - решено не менее 16 обязательных задач, среди них - задачи из всех параграфов;

"5" - решены все обязательные задачи.

Дополнительные задачи: "4" - решено не менее 5 дополнительных задач, среди них - задачи из всех параграфов;

"5" - решено не менее 8 дополнительных задач, среди них - задачи из всех параграфов.

Если дополнительные задачи не решались или их решено менее 5, вторая оценка не ставится.

Задание подготовил В.Л.Гутенмахер по материалам лекций И.М.Гельфанда.

Методическая Комиссия ВЭМШ

Август 1974 г

Мы советуем Вам подписаться на журнал "Квант", в котором помещается много материалов по математике и физике. Подписной индекс 70465.

§ 1. Включения и исключения

Этот параграф состоит из нескольких задач, которые приводят нас к важной формуле "включения и исключения".

Сначала - небольшая "разминка"-совсем простые упражнения.

Упражнение 10. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, которые делятся: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 6?

Ответы: а) 49, так как $99 = 49 \cdot 2 + 1$.

б) 33, так как $99 = 33 \cdot 3$.

в) 19, так как $99 = 19 \cdot 5 + 4$.

г) 16, так как $99 = 16 \cdot 6 + 3$.

Контрольное упражнение 11. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые делятся: а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 7?

Эти упражнения помогут нам в решении следующих задач.

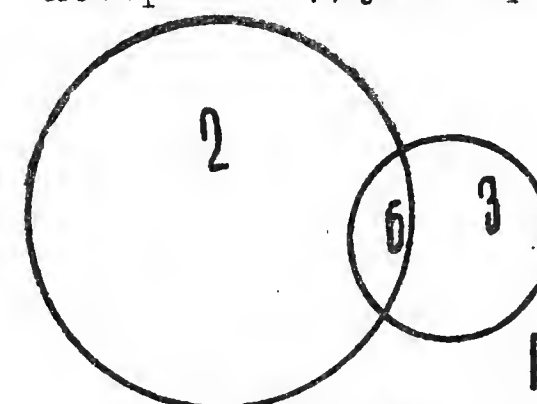
Задача 12. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, которые:

- а) делятся одновременно на 2 и на 3;
 б) делятся на 2, но не делятся на 3;
 в) делятся на 3, но не делятся на 2;
 г) делятся на 3 или на 2;
 д) не делятся ни на 2, ни на 3?

Ответы: а) 16, б) 33, в) 17, г) 66, д) 33.

Решение задачи 12а). Числа, которые делятся и на 2, и на 3, это числа, которые делятся на 6. Количество таких чисел мы подсчитали в упражнении 10г.

Решение задачи 12б). Для наглядности ситуацию можно изобразить двумя пересекающимися кругами (см. рис.1). В



первом круге - множество чисел, которые делятся на 3, во втором - множество чисел, которые делятся на 2, а их пересечение (общая часть) - множество чисел, которые делятся на 6.

Нам нужны числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3. Числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3 - это чис-

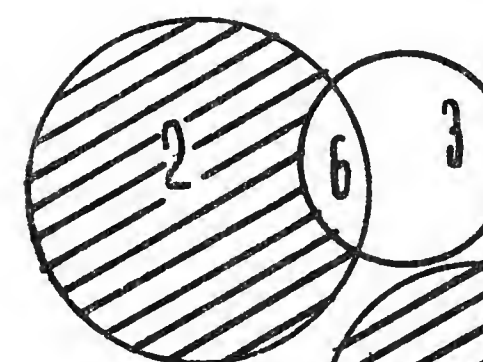


Рис. 2

ла, которые делятся на 2, но не делятся на 6. На рисунках 2а) и 2б) мы заштриховали нужное множество чисел. Очевидно, их количество равно $49 - 16 = 33$, (из 49 чисел, делящихся на 2, 16 делятся на 6).



Рис. 3а) и 3б)

Решение задачи 12в) аналогично решению б), только в этом случае нам нужно другое заштрихованное множество

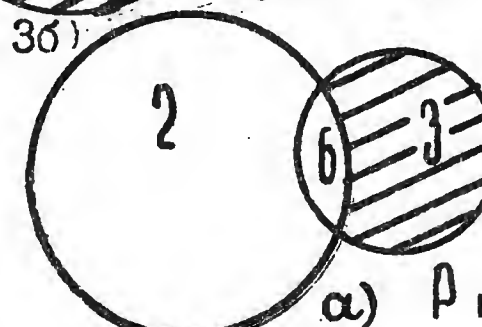
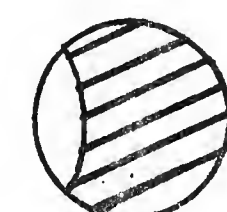


Рис. 3



б)

Решение задачи 12г). В этом случае мы также заштриховываем нужное нам множество. Это объединение двух кругов (см.рис.4).

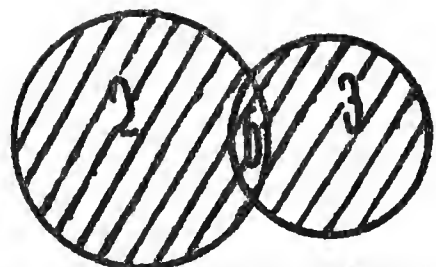


Рис. 4

Если сложить количество чисел, которые делятся на 3, с количеством чисел, которые делятся на 2, то мы два раза посчитаем числа, которые делятся на 6 (см. рис. 5). Таким образом, от полученной суммы нам еще надо отнять количество чисел, которые делятся на 6.

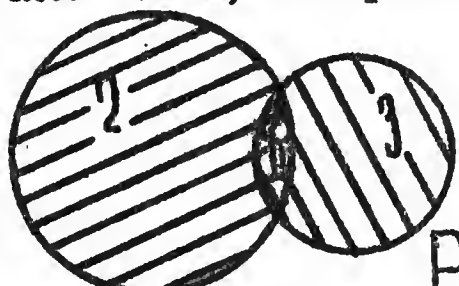


Рис. 5

Итак, ответ: $33 + 49 - 16 = 66$.

Решение задачи 12д). Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см. рис. 6). Квадрат – это множество всех целых положительных чисел, меньших 100, а круги – это множества чисел, делящихся на 2 и на 3. Нужное нам количество чисел заштриховано на рис. 6. Количество таких чисел будет равно количеству чисел, находящихся в дополнении к объединению двух кругов. Сколько чисел

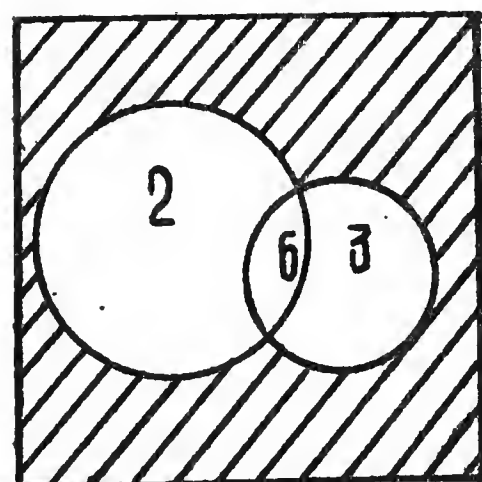


Рис. 6

в объединении двух кругов, мы уже подсчитали в задаче г).

Ответ. $99 - 66 = 33$.

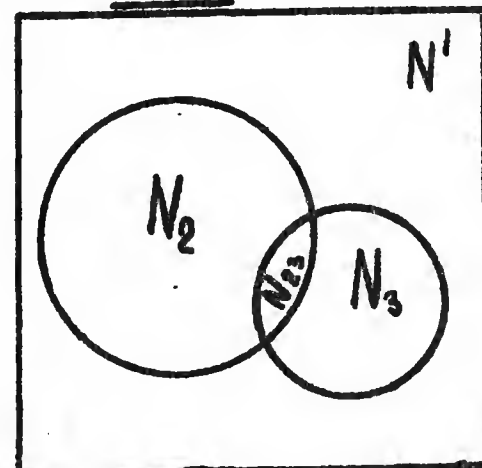


Рис. 7

Обозначим через N количество всех чисел, меньших 100, через $N_2, N_3, N_{2.3}$ соответственно количества чисел, которые делятся на 2, делятся на 3, делятся на 2·3, а через N' – количество чисел, которые не попадают ни в N_2 , ни в N_3 . Тогда из наших рассуждений мы получим формулу $N' = N - N_2 - N_3 + N_{2.3}$ (см. рис. 7).

Контрольная задача 13. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые:

- делятся и на 2, и на 3;
- делятся на 2, но не делятся на 3;
- делятся на 3, но не делятся на 2;
- делятся на 3 или на 2;
- не делятся ни на 2, ни на 3?

Более сложные задачи получатся, если мы возьмем три числа, например, 2, 3, 5.

Задача 14. Сколько целых положительных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение задачи 14. Заметим, во-первых, что если число делится и на 2, и на 5, то оно делится на 10; если оно делится и на 3, и на 5, то оно делится на 15, а если делится и на 2, и на 3, и на 5, то оно делится на 30. Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см. рис. 8), где внутри квадрата – множество чисел, меньших 100, а в кружках – соответственно множества чисел, которые делятся на 2, на 3, на 5.

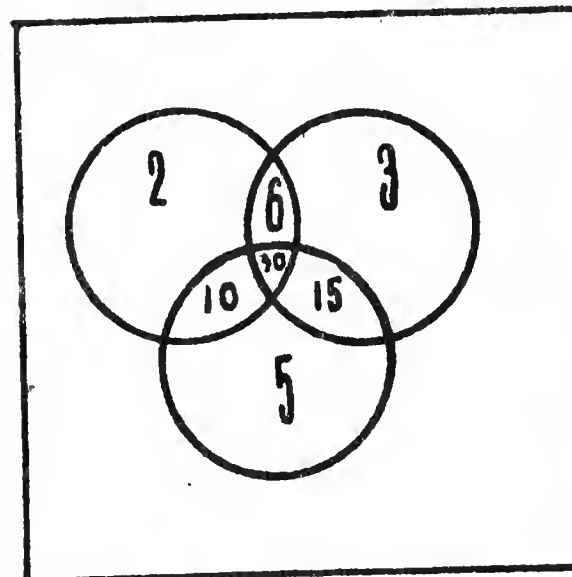


Рис. 8

Пусть N_2 – количество чисел, которые делятся на 2, N_3 – количество чисел, которые делятся на 3, N_5 – количество чисел, которые делятся на 5, $N_{2.3}$ – делящихся и на 2, и на 3, $N_{3.5}$ – делящихся и на 3, и на 5, $N_{2.5}$ – делящихся и на 2, и на 5. Наконец, $N_{2.3.5}$ – количество чисел, которые делятся и на 2, и на 3, и на 5, а N' – количество чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Оказывается, верна следующая формула:

$$N' = N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2.3} + N_{2.5} + N_{3.5} - N_{2.3.5} (*)$$

Все числа, которые стоят в правой части равенства, легко посчитать:

$$N = 99, N_2 = 49, N_3 = 33, N_5 = 19, N_{2.3} = N_{3.5} = 16, N_{2.5} = N_{3.5} = 6, N_{2.3.5} = 3.$$

По формуле (*) мы получаем нужное нам число $N' = 26$.

Осталось доказать формулу (*)

Мы должны посчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из N сумму $N_2 + N_3 + N_5$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга – даже три раза. Теперь к разности $N - N_2 - N_3 - N_5$ добавим сумму $N_{2.3} + N_{3.5} + N_{2.5}$. Тогда все числа, попадающие в один или два круга, мы учли правильно и только числа, попадающие во все три круга – неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды добавили. Придется из суммы $N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2.3} + N_{3.5} + N_{2.5}$ вычесть еще $N_{2.3.5}$. Теперь все числа, входящие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к формуле (*).

Задача 15. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Задача 16. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Указание к задаче 16. $N' = N - N_3 - N_5 - N_7 - N_{11} + N_{3 \cdot 5} + N_{3 \cdot 7} + N_{5 \cdot 7} + N_{3 \cdot 11} + N_{5 \cdot 11} + N_{7 \cdot 11} - N_{3 \cdot 5 \cdot 7} - N_{3 \cdot 5 \cdot 11} - N_{3 \cdot 7 \cdot 11} - N_{5 \cdot 7 \cdot 11} + N_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$ (**)

Чисел, меньших 1000 и делящихся на $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, не существует. Поэтому $N_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = 0$.

Еще три контрольные задачи к § I.

Задача 17. Объединение множеств A и B состоит из 25 элементов, пересечение — из 10 элементов. Сколько элементов в A , если в B : а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

Задача 18. В школьной химической олимпиаде участвовало 21 человек, в физической — 26 человек, в математической — 29 человек. 14 школьников принимало участие и в химической, и в математической, 15 учащихся — и в физической, и в математической, 8 — во всех трех олимпиадах. Сколько школьников участвовало хотя бы в одной из трех олимпиад? Найдите все возможные ответы.

Задача 19. У меня трое друзей, за месяц с каждым из них я обедал 9 раз, с каждым двумя из них — 4 раза, со всеми тремя — 1 раз, без каждого из них — 15 раз. Сколько всего раз я обедал? Сколько раз я обедал один?

Заключение

Формулы (*) и (**), которыми мы пользовались выше, являются частными случаями общей формулы, — так называемой "формулы включений и исключений". Она связывает такие числа:

N — количество элементов некоторого множества A ;
 N_1, N_2, N_3, \dots — количества элементов в некоторых его подмножествах A_1, A_2, A_3, \dots ; N_{12}, N_{13}, \dots — количество элементов в попарных пересечениях этих множеств: A_1 и A_2 , A_1 и A_3, \dots ;
 N_{123} — количество элементов в пересечениях этих множеств по три, и так далее; наконец, N' — количество элементов множества A , которые не входят ни в одно из подмножеств A_1, A_2, A_3, \dots . Тогда, как можно доказать,

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 - \dots + N_{12} + N_{13} + \dots - N_{123} \dots$$

(это и есть общая "формула включений и исключений"). Например, когда подмножество одно, два и три, она принимает такой вид:

$$N' = N - N_1$$

$$N' = N - N_1 - N_2 + N_{12}$$

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{13} - N_{123}.$$

§ 2. Одна комбинаторная задача

Этот параграф касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных k -значных чисел, цифры которых расположены в убывающем порядке?

Это трудная задача. Наш путь решения будет таким. Мы сначала разберемся в условии задачи для $k = 2, 3$ и разобьем задачу на более простые, а уже затем перейдем к следующим значениям $k = 4, 5, \dots$

Итак, начнем наш путь "от простого к сложному".

Задача 20а). Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, цифры которых идут в возрастающем порядке?

б). Тот же вопрос для чисел, цифры которых идут в убывающем порядке.

в). Тот же вопрос для чисел, цифры которых идут в невозрастающем порядке.

Уточним условие задачи. Цифры двузначного числа идут в возрастающем порядке, когда первая цифра меньше второй. Однако неясно, как быть с числами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Превратим эти числа в двузначные, условившись ставить перед каждым из них нуль: $1 = 01$, $2 = 02, \dots, 9 = 09$. При такой записи мы не перепутаем эти числа ни с какими другими числами и отнесем их тоже к числам, цифры которых идут в возрастающем порядке. (Таким образом нумеруются билеты лотереи). После этого уточнения мы можем приступить к решению задачи.

Решение задачи 20а). Самое первое, что приходит в голову, это выписать подряд все такие числа: $01, 02, \dots, 09, 12, 13, \dots, 19, \dots, 23, \dots, 29, \dots, 34, \dots, 39, \dots, 89$ и пересчитать их. Но мы, конечно, сразу заметим, что в первом десятке их 9 штук, во втором — 8 штук, в третьем — 7 штук и т.д. В девятом десятке — 1 штука, а в десятом их вообще нет. Поэтому нам нужно просто сложить числа

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = ?$$

Будет легче, если мы будем складывать числа в таком порядке:

$$(9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ? \quad \text{Ответ: 45 чисел.}$$

Решение задачи 20б). Здесь, конечно, можно сделать точно такой же подсчет, как и в задаче а), но сразу становится ясно, что ответ будет таким же, как и там. В самом деле, если в каждом числе, цифры которого идут в возрастающем порядке, поменять цифры местами, то получится число, цифры которого идут в убывающем порядке, и наоборот. Итак, ответ: 45 штук.

Тут, конечно, стоит заметить, как удачно мы обозначили в задаче а) числа из первого десятка — иначе для чисел 10, 20, ..., 90 с убывающим порядком цифр не нашлось бы подходящих пар среди чисел с возрастающим порядком цифр.

Решение задачи 19а). К таким числам относятся числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, и числа, обе цифры которых одинаковы. Сколько есть чисел с возрастающим порядком, мы уже знаем из задачи а) — их 45 штук.

Чисел с одинаковыми цифрами 9 штук: 11, 22, 44, ..., 99.

Итого: $45 + 9 = 54$. Ответ: 54 числа.

Снова решение задачи 20а). Решая задачи а), б), в), мы заметили, что можно решить задачу а) еще более простым подсчетом. Двухзначных чисел, обе цифры которых разные — 90 штук. В самом деле, целых положительных чисел, меньше 100, всего 99 штук, а чисел меньше 100, цифры которых одинаковы, 9 штук. Двухзначные числа с двумя неодинаковыми цифрами разбиваются на два класса, состоящих из чисел с возрастающим порядком и из чисел с убывающим порядком, причем тех и других одинаковое количество. Следовательно, чисел с возрастающим порядком $\frac{90}{2} = 45$ штук.

Задача 21. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Уточнение условия. Подобно тому, как мы это сделали в задаче 1, договоримся перед однозначными числами приписывать два нуля, а перед двухзначными числами приписывать один ноль, например: $5 = 005$; $31 = 031$. Тем самым все положительные числа, меньшие 10^3 , будут трехзначны.

Задача 22. Сколько существует целых положительных восьмизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 23. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^{11} , цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 21. Трехзначные числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, это числа, у которых вторая цифра больше первой, а третья — больше второй. Следовательно, у таких чисел все три цифры разные. Рассмотрим множество чисел, у которых все три цифры разные. Разобьем их на классы. Если числа состоят из одних и тех же трех цифр и отличаются только порядком, в котором они поставлены, то мы их относим к одному классу. Всякое число, таким образом, попадает только в один из классов.

Покажем теперь, что в каждый класс попадает ровно шесть чисел, и кроме того, среди них есть только одно число, цифры которого идут в возрастающем порядке.

Пусть a, b, c — какие-то три разные цифры и пусть $a > b > c$. Тогда из них можно составить только шесть различных чисел: abc , acb , bac , bca , cab , cba и из них только у одного числа, cba , цифры идут в возрастающем порядке. Отсюда мы можем заключить, что если N — количество чисел, у которых все три цифры разные, то количество классов, на которые мы их разбили, будет равно $\frac{N}{6}$. Кроме того, поскольку в каждом классе есть только одно число с возрастающим порядком цифр, таких чисел будет столько же, сколько классов, то есть $\frac{N}{6}$ штук. Осталось найти N , то есть решить следующую задачу.

Вспомогательная задача 21а). Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решая задачу 20, мы нашли, что двухзначных чисел с разными цифрами 90 штук. Приписывая спереди к каждому такому двухзначному числу по одной из 8 цифр, не содержащихся в этом числе, мы, очевидно, получим все различные трехзначные числа с разными цифрами (смотри таблицу).

Двухзначные числа с разными цифрами	Трехзначные числа с разными цифрами
01	201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901
02	102, 302, 402, 502, 602, 702, 802, 902
....
10	210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910
12	012, 312, 412, 512, 612, 712, 812, 912
....
18	018, 218, 318, 418, 518, 618, 718, 918
19	019, 219, 319, 419, 519, 619, 719, 819
....
97	097, 197, 297, 397, 497, 597, 697, 897
98	098, 198, 298, 398, 498, 598, 698, 798

Таким образом, всего чисел с тремя разными цифрами будет

$$90 \cdot 8 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ штук}$$

Вспомогательная задача решена: мы нашли, что $N = 90 \cdot 8$; разделив N на 6, мы получим ответ задачи 2.1.

Ответ к задаче 21. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел.

Решение задачи 22. Ответ: столько же, сколько двухзначных, то есть 45 чисел.

Докажем это. Выпишем в строку все десять цифр в порядке убывания: 9876543210. Возьмем двухзначное число, цифры которого идут в убывающем порядке и вычеркнем его цифры из этой строки. Мы получим в результате восьмизначное число, цифры которого идут в убывающем порядке, например:

$$70 \rightarrow 9876543210, \text{ то есть } 98654321 ;$$

$$62 \rightarrow 9876543210, \text{ то есть } 98754310 .$$

Тут, конечно, стоит заметить, как удачно мы обозначили в задаче а) числа из первого десятка – иначе для чисел 10, 20, ..., 90 с убывающим порядком цифр не нашлось бы подходящих пар среди чисел с возрастающим порядком цифр.

Решение задачи 19. К таким числам относятся числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, и числа, обе цифры которых одинаковы. Сколько есть чисел с возрастающим порядком, мы уже знаем из задачи а) – их 45 штук.

Чисел с одинаковыми цифрами 9 штук: 11, 22, 44, ..., 99.
Итого: $45 + 9 = 54$. Ответ: 54 числа.

Снова решение задачи 20а). Решая задачи а), б), в), мы заметили, что можно решить задачу а) еще более простым подсчетом. Двухзначных чисел, обе цифры которых разные – 90 штук. В самом деле, целых положительных чисел, меньше 100, всего 99 штук, а чисел меньше 100, цифры которых одинаковы, 9 штук. Двухзначные числа с двумя неодинаковыми цифрами разбиваются на два класса, состоящих из чисел с возрастающим порядком и из чисел с убывающим порядком, причем тех и других одинаковое количество. Следовательно, чисел с возрастающим порядком $\frac{90}{2} = 45$ штук.

Задача 21. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, цифры которых идут в возрастающем порядке?

Уточнение условия. Подобно тому, как мы это сделали в задаче 1, договоримся перед однозначными числами приписывать два нуля, а перед двухзначными числами приписывать один ноль, например: $5 = 005$; $21 = 021$. Тем самым все положительные числа, меньше 10^3 , будут трехзначны.

Задача 22. Сколько существует целых положительных восьмизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 23. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^{11} , цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 21. Трехзначные числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, это числа, у которых вторая цифра больше первой, а третья – больше второй. Следовательно, у таких чисел все три цифры разные. Рассмотрим множество чисел, у которых все три цифры разные. Разобьем их на классы. Если числа состоят из одних и тех же трех цифр и отличаются только порядком, в котором они поставлены, то мы их относим к одному классу. Всякое число, таким образом, попадает только в один из классов.

Покажем теперь, что в каждый класс попадает ровно шесть чисел, и кроме того, среди них есть только одно число, цифры которого идут в возрастающем порядке.

Пусть a, b, c – какие-то три разные цифры и пусть $a > b > c$. Тогда из них можно составить только шесть различных чисел: abc , acb , bac , bca , cab , cba и из них только у одного числа, cba , цифры идут в возрастающем порядке. Отсюда мы можем заключить, что если N – количество чисел, у которых все три цифры разные, то количество классов, на которые мы их разбили, будет равно $\frac{N}{6}$. Кроме того, поскольку в каждом классе есть только одно число с возрастающим порядком цифр, таких чисел будет столько же, сколько классов, то есть $\frac{N}{6}$ штук. Осталось найти N , то есть решить следующую задачу.

Вспомогательная задача 21а). Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решая задачу 20, мы нашли, что двухзначных чисел с разными цифрами 90 штук. Приписывая спереди к каждому такому двухзначному числу по одной из 8 цифр, не содержащихся в этом числе, мы, очевидно, получим все различные трехзначные числа с разными цифрами (смотри таблицу).

Двухзначные числа с разными цифрами	Трехзначные числа с разными цифрами
01	201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901
02	102, 302, 402, 502, 602, 702, 802, 902
....
10	210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910
12	012, 312, 412, 512, 612, 712, 812, 912
....
18	018, 218, 318, 418, 518, 618, 718, 918
19	019, 219, 319, 419, 519, 619, 719, 819
....
97	097, 197, 297, 397, 497, 597, 697, 897
98	098, 198, 298, 398, 498, 598, 698, 798

Таким образом, всего чисел с тремя разными цифрами будет

$$90 \cdot 8 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ штук}$$

Вспомогательная задача решена: мы нашли, что $N = 90 \cdot 8$; разделив N на 6, мы получим ответ задачи 2.1.

Ответ к задаче 21. $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел.

Решение задачи 22. Ответ: столько же, сколько двухзначных, то есть 45 чисел.

Докажем это. Выпишем в строку все десять цифр в порядке убывания: 9876543210. Возьмем двухзначное число, цифры которого идут в убывающем порядке и вычеркнем его цифры из этой строки. Мы получим в результате восьмизначное число, цифры которого идут в убывающем порядке, например:

$$70 \rightarrow 9876543210, \text{ то есть } 98654321;$$

$$62 \rightarrow 9876543210, \text{ то есть } 98754310.$$

Таким образом, каждому двузначному числу с убывающим порядком цифр мы сопоставим одно восьмизначное число с убывающим порядком цифр. Теперь наоборот, возьмем какое-нибудь восьмизначное число, цифры которого идут в убывающем порядке, и составим двузначное число из двух цифр, которые не вошли в это восьмизначное число, поставим эти две цифры в порядке убывания, например

9 8 7 6 4 3 2 1 → 50

Таким образом, каждому восьмизначному числу мы сопоставим одно двузначное число. Очевидно, что в первом и во втором случаях двум разным числам соответствуют два разных числа. И мы установили взаимоднозначное соответствие между двузначными и восьмизначными числами с убывающим порядком цифр. Следовательно, и тех, и других одинаковое количество.

Решение задачи 23. Мы условимся так же, как и раньше, записывать все числа, меньшие 10^{II} , как II -значные. Перед k -значным числом для $k < II$ мы поставим $(II-k)$ нулей.

Ответ: чисел, меньших 10^{II} , цифры которых идут в убывающем порядке, нет (в том смысле, в котором мы уточнили задачу).

В самом деле, у каждого такого числа все II цифр должны быть разными, но всего есть только 10 различных цифр.

Контрольные задачи к §2.

Задача 24. Сколько существует семизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 25. Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая цифра больше двух других, а вторая меньше третьей?

Сообщаем Вам сразу, что ответ в задачах 24 и 25 такой же, как и в задаче 21. Нужно написать убедительное объяснение, почему это так, и тогда не придется считать.

Задача 26. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^4 , цифры которых идут в убывающем порядке?

Мы советуем решить и записать решение этой задачи точно так же, как в задаче 21. Для этого Вам, конечно, понадобится решить следующие две задачи.

Задача 26а). (сравните со стр. 11). Пусть a, b, c, d — какие-то четыре разных цифры. Сколько можно составить из них различных чисел?

Задача 26б). Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все четыре цифры разные?

При решении каждой из этих задач мы советуем идти по тому же пути, что и при нахождении числа N в решении вспомогательной задачи 21а).

Задача 27. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 10^6 , цифры которых идут в возрастающем порядке? (Уточните условие задачи).

Здесь мы тоже сразу сообщаем Вам ответ. Он такой же, как и в задаче 7. Напишите доказательство этого факта, взяв себе за образец наше решение задачи 3.

Задача 28. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10^k , цифры которых идут в убывающем порядке?

Будем считать, что все числа, меньшие 10^k , имеют k знаков.

Ответ к задаче 28 должен быть записан в таком виде:

$$\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \text{ чисел при } k = 2;$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ чисел при } k = 3;$$

$$? \text{ чисел при } k = 4;$$

$$? \text{ чисел при } k = 5;$$

$$? \text{ чисел при } k = 6;$$

$$120 \text{ чисел при } k = 7;$$

$$45 \text{ чисел при } k = 8;$$

$$? \text{ чисел при } k = 9;$$

$$1 \text{ число при } k = 10;$$

$$0 \text{ чисел при } k = 11;$$

$$? \text{ чисел при } k > 11.$$

Задача 29. Сколько существует k -значных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке, в записи которых нет цифры 0?

Заключение. При решении задачи 21а) и других мы по существу использовали такое "правило произведения": если во множестве A всего M элементов, во множестве B — K элементов, то всевозможных пар (a, b) , где a — элемент A , b — элемент B , существует $N = M \cdot K$. Более общий факт: если элементы какого-то множества C удалось разбить на K классов A_1, \dots, A_k , причем в каждом классе M элементов, то в множестве C всего $N = M \cdot K$ элементов. Нередко бывает нужно наоборот, зная N (число элементов) и M (число элементов в каждом классе), найти число классов: $K = \frac{N}{M}$.

§ 3. Геометрическое изображение задачи 20 и несколько задач о графах

Вернемся снова к задаче 2.1а). Оказывается, что ее можно представить себе геометрически.

Задача 30. На плоскости имеется 10 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

Ответ в этой задаче такой же, как в задаче 20а), т.е. 45 отрезков. Для того, чтобы убедиться в этом, занумеруем 10 точек цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Рассмотрим теперь какой-нибудь отрезок с концами в этих точках. В концах отрезка стоят две разные цифры; поставив их в порядке возрастания, мы получим двузначное число. Таким образом, каждому отрезку будет соответствовать двузначное число с возрас-

тающим порядком цифр.

Например, отрезку с концами в точках 2 и 3 соответствует число 23, отрезку с концами в точках 5 и 0 соответствует число 05 и так далее. При таком соответствии двум разным отрезкам соответствуют два разных числа и двум разным числам — два разных отрезка. Следовательно, между числами из задачи 2.0а) и отрезками из задачи 3.0 установлено взаимнооднозначное соответствие. Отсюда уже можно заключить, что отрезков будет столько же, сколько двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке.

Другое решение задачи 3.0). Итак, на плоскости имеется 10 точек и нужно узнать, сколько существует отрезков с концами в этих точках. Посчитаем концы всех таких отрезков. В каждой точке сходится 9 концов, поэтому всего концов будет $10 \cdot 9$. Но у каждого отрезка 2 конца, следовательно отрезков будет $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Задача 3.1. На плоскости имеется 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

В следующих задачах полезно переводить условие на язык точек и соединяющих дуг.

Как это сделать, вы узнаете из решений этих задач. Постарайтесь точно так же написать решения контрольных задач.

Задача 3.2 а). Сколько диагоналей в выпуклом 11-угольнике?

б). В тренировочном турнире участвовало 20 команд, причем между каждыми двумя командами было сыграно по одному матчу. Сколько всего было проведено матчей?

Задача 3.3 а). Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовало 11 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

б). Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовало 8 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

Задача 3.4. Доказать, что в любой компании, состоящей из 11 человек, найдутся два человека, имеющих одинаковое количество знакомых в этой компании.

Решение задачи 3.2 а). Посчитаем сначала концы всех диагоналей. В каждой вершине сходится 8 концов диагоналей, так как вершина соединена диагоналями со всеми вершинами, за исключением ее самой и двух соседних вершин. Поскольку всего 11 вершин, то число концов $11 \cdot 8$.

У каждой диагонали два конца, поэтому число диагоналей будет в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$.

Ответ: 44 диагонали.

Решение задачи 3.2 б). Сопоставим каждой команде точку, причем разным командам — разные точки. Каждому матчу между двумя

командами сопоставим дугу, соединяющую две точки, соответствующие этим командам. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 20 точек, каждые две из которых соединены одной дугой. Сколько всего проведено дуг?

Посчитаем концы всех дуг. В каждой точке сходится 19 концов, поэтому всего $20 \cdot 19$ концов.

У каждой дуги два конца. Поэтому всего $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ дуг.

Возвращаясь к исходной задаче, получаем

Ответ: всего было проведено 190 матчей.

Решение задачи 3.3 а). Снова сопоставим каждой команде точку, причем разным командам — разные точки. Каждые две точки соединены столькими дугами, сколько матчей сыграли соответствующие команды. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 11 точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило три дуги?

Посчитаем, какое количество дуг понадобится для этого. Как и раньше, считаем сначала концы дуг. По условию, в каждой точке должно сходиться три конца, поэтому концов должно быть $11 \cdot 3$. Дуг должно быть в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 3}{2}$. Стоп! Мы получили не целое число дуг. Такого быть не может и, следовательно, не может быть такого соединения.

Ответ: нельзя устроить.

Решение задачи 3.3 б). Такой турнир устроить можно. Команды будем обозначать точками, а матчи — дугами. На рисунке 9 приведены примеры соединения восьми точек дугами, удовлетворяющего условию задачи.

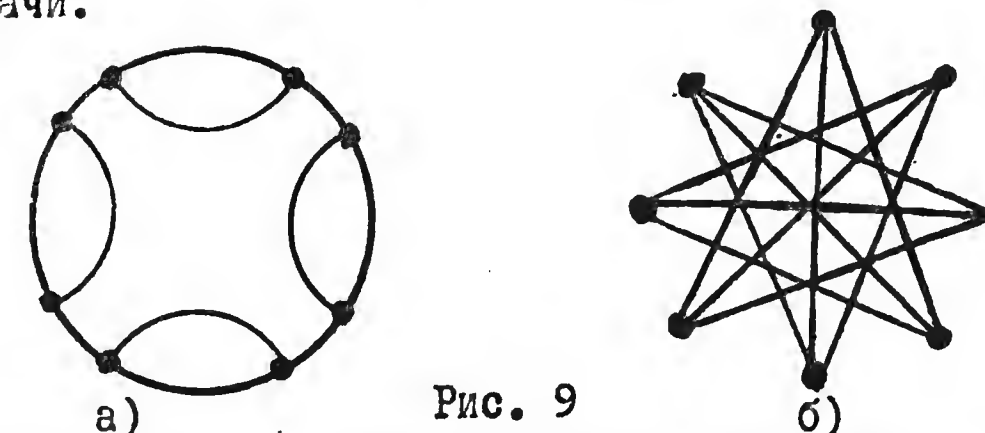


Рис. 9

Решение задачи 3.4. Допустим, что есть такая компания из 11 человек, в которой у всех разное число знакомых. Сопоставим каждому человеку число его знакомых. Поскольку всего 11 человек, то каждому человеку может быть сопоставлено только одно из 11 чисел от 0 до 10. Каждым двум должны быть сопоставлены разные числа, поэтому есть человек, у которого 0 знакомых, и есть человек, у которого 10 знакомых. Человек, у которого 10 знакомых, должен быть знаком со всеми остальными, но это противоречит тому, что у одного из них нет знакомых (у того, которому сопоставлено число 0). Таким образом, нет такой компании, и, следовательно, во всякой компании из 11 человек найдутся два человека, имеющие одинаковое количество знакомых.

Контрольные задачи к §3.

Задача 35 а). Тот же вопрос, что и в задаче 32а) для 50-угольника.
 б). Четыре футбольных команды: A, B, C и D провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 6 матчах, команда B - в 5, команда C - в 7, D - в 10. Сколько всего состоялось матчей?

в). Три футбольных команды: A, B и C провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 6 матчах, команда B - в 7 матчах, а команда C - в 11 матчах. Сколько матчей сыграли друг с другом команды A и C ?

Задача 36 а). Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем участвовало 13 команд и каждая команда сыграла ровно 5 матчей?

б). Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем участвовало 10 команд и каждая команда сыграла бы ровно 5 матчей?

в) Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем участвовало 9 команд и каждая команда сыграла бы 4 матча?

Задача 37. Во всякой ли компании найдутся три человека, у которых одинаковое количество знакомых в этой компании?

Задача 38 а) В некоторой компании двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют общих знакомых. Доказать, что в этой компании у каждого человека одинаковое число знакомых.

б) Попробуйте изобразить с помощью точек и соединяющих их дуг такую компанию, которая удовлетворяла бы условиям задачи 38 а), в которой 16 человек и каждый имеет ровно 5 знакомых.

Задача 39. На окружности выбрано 10 точек. Сколько существует выпуклых

а) четырехугольников;

б) пятиугольников;

в) восьмиугольников

с вершинами в этих точках?

Замечание к задачам 35 б) и в). Некоторые ученики записывают решение этих задач так: приводят ответ и "граф", на котором показано, какие команды играли друг с другом и - сколько матчей. Но такое "доказательство" здесь не достаточно: а вдруг из другого рисунка получится другой ответ? Так и получается, если решать этим способом такую, например, задачу:

Задача 35 с). Четыре футбольных команды A, B, C и D провели друг с другом 10 тренировочных матчей. Известно, что команда A участвовала в 7 матчах, команда B - в 8. Сколько матчей сыграли друг с другом команды C и D ?

Решение. Обозначим команды точками, а матчи между ними - соединяющими эти точки дугами. Возможна такая картинка (рис. 10а)

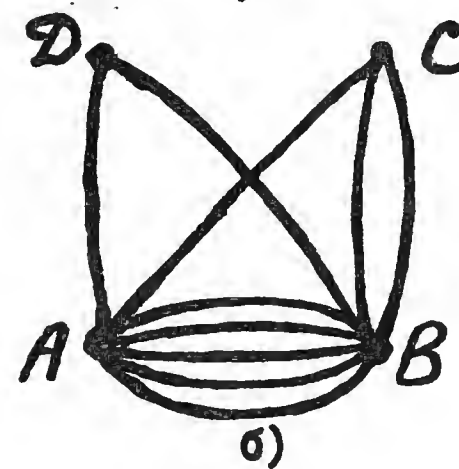
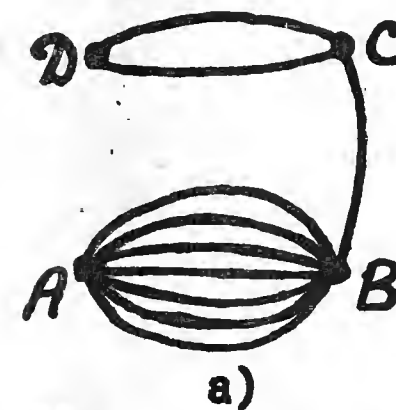


Рис. 10

Например, можно записать краткое решение задачи 35 г) в таком виде: "Обозначим число матчей, сыгранных командами X и Y , через n_{XY} . По условию,

$$n_{AB} + n_{AC} + n_{AD} + n_{BC} + n_{BD} + n_{CD} = 10,$$

$$n_{AB} + n_{BC} + n_{BD} = 8,$$

$$\text{поэтому: } n_{CD} \leq n_{CD} + n_{AD} + n_{AC} = 2,$$

то есть n_{CD} может равняться только 0, 1 и 2. Примеры (см. рис. 10) показывают, что все эти случаи возможны".

Замечание к задаче 37. Если в задаче спрашивается "можно ли" или "всегда ли найдется", то возможны два ответа: "да" или "нет". Если Ваш ответ "нельзя" или "всегда найдется", то Вы должны привести полное доказательство, учитывающее все возможные случаи. Если Ваш ответ "можно" (в каком-нибудь случае) или "не всегда", то достаточно привести соответственно подтверждающий или опровергающий пример.

Указание к задачам 31 и 38а) Пусть A и B знакомы. Обозначим через M_A множество знакомых A ; M_B - множество знакомых B . Докажите, что:

- 1) M_A и M_B не имеют общих элементов,
- 2) каждый из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B и
- 3) каждый из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A .

Стсюда следует, что между M_A и M_B можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Указание к задаче 39. Каждое множество из k точек на

окружности служит множеством вершин одного выпуклого k -угольника. Если занумеровать точки так, как это сделано в первом решении задачи 30, то каждому такому подмножеству можно сопоставить (взаимнооднозначным образом) k - значное число с убывающим порядком цифр.

Заключение. Изображение условия задач с помощью точек и соединяющих их дуг очень часто помогает при решении задач (так же, как наглядное изображение множеств в виде "кругов" пригодились нам в §1). Система точек и соединяющих их дуг в математике получила специальное название: граф. С помощью графа можно изобразить ситуацию такого типа: задано некоторое множество A и в нем - некоторые подмножества, состоящие из двух элементов каждое (множество команд - и пары команд, сыгравших между собой; множества людей - и пара знакомых; множество вершин многоугольника - и пары вершин, соединенных диагоналями, и т.д.).

В решении задач 20 а) и 30 мы подсчитали число различных подмножеств из двух элементов в множестве A , состоящем из 10 цифр: $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$; это число равно 45. В задаче 28 - основной задаче § 2 - мы по существу посчитали количество различных подмножеств из k элементов в этом множестве. В следующем параграфе мы увидим, что эти же числа возникают во многих естественных задачах на подсчет различных вариантов.

§ 4. Произведения, суммы, расстановки цифр

Задача 40. В выражении $(a+b)^{10}$ проведем возведение в степень и приведем подобные члены. Какие коэффициенты будут стоять при $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, \dots$?

Указание. $(a+b)^{10}$ - это произведение десяти сомножителей $a+b$. Занумеруем их по порядку так:

$$(a+b)^0 (a+b)^1 (a+b)^2 \dots (a+b)^8 (a+b)^9.$$

Если из каждой скобки взять букву a , то при умножении мы получим член a^{10} .

Очевидно, что член a^9b получается, когда из одной из скобок мы берем букву b , а из остальных - букву a . Поскольку у нас всего десять скобок, то после перемножения мы получим 10 слагаемых вида a^9b .

Посчитаем теперь, сколько раз получится член a^8b^2 (это и будет коэффициент при a^8b^2). Чтобы в произведении получилось восемь раз a и два раза b , нужно из каких-то двух скобок взять букву b , а из остальных - букву a . Запишем номера тех двух скобок из которых мы выбираем букву b . Получится двузначное число, цифры которого идут в порядке возрастания: (например, если мы взяли букву b из 0-ой и 8-ой скобок, то пишем 08). Таким образом, одночлен a^8b^2

при умножении встретится столько раз, сколько двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке, т.е. 45 раз и поэтому коэффициент при a^8b^2 равен 45. Итак,

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + \dots + a^7b^3 + \dots \quad (*)$$

Продолжите наши рассуждения и укажите ответ.

Задача 41. а) Чему равна сумма всех коэффициентов $(1 + 10 + 45 + \dots + 10 + 1)$ в предыдущей задаче?

б) Чему равна сумма коэффициентов при членах с четными степенями a и b ?

$$(1 + 45 + \dots + 1) ?$$

Указание. Подставьте в равенство (*) $a=b=1$ и затем $a=1, b=-1$.

Задача 42. а) Сколько всего клеток в фигуре, изображенной на рисунке 11?

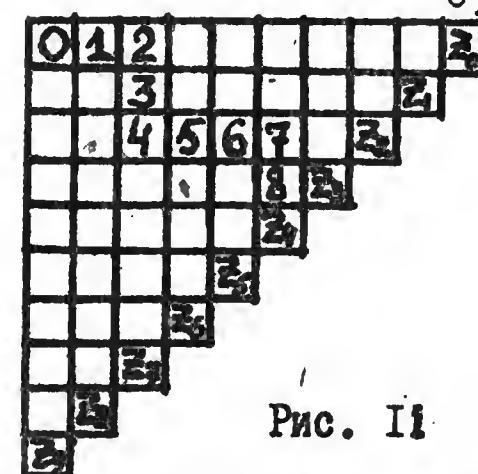


Рис. 11

б) Сколькими способами можно поместить цепочку цифр 0 1 2 ... 9 в эту таблицу

так, чтобы каждые две соседние цифры помещались в клетках, имеющих общую сторону, цифра 0 стояла в верхней левой клетке, а цифра 9 - в клетке z_k ($k=0, 1, 2, 3, \dots, 9$)?

Указание. Ответ в задаче

б) такой же, как в задаче 28:

цепочек 0 1 ... 9, оканчивающихся в z_0 - 1

" " " " " " " " в z_1 - 10

" " " " " " " " в z_2 - 45

Нужно только обосновать, почему ответ именно такой - тогда не придется считать.

Прежде чем формулировать следующую задачу, введем одно определение. Назовем разбиением целого положительного числа представление его в виде суммы целых положительных чисел. Вот, например, все разбиения числа 4:

$$4, 3+1, 1+3, 2+2, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 1+1+1+1.$$

Как видно из этого примера, мы считаем разбиения разными, если они отличаются либо числами - слагаемыми, либо порядком, в каком эти числа расположены. Решим теперь такую задачу.

Задача 43. Сколько существует разных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?

Решение задачи 4.3. Представим себе число 11 в виде 11 точек, расположенных в ряд.

Тогда всякое разбиение этого числа на 4 слагаемых можно отметить тремя черточками. Например, разбиение $11 = 5+3+2+1$ можно представить себе так $\dots \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot$.

Первой черточкой мы отсеки 5 точек, второй черточкой мы отсеки еще 3 точки, и третьей – следующие 2 точки, после чего осталась 1 точка.

Легко видеть, что и наоборот, расставив каким-нибудь способом 3 черточки между точками, мы зададим разбиение числа II на 4 слагаемых. Например, разбиению черточками

$\cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot \cdot \cdot | \cdot \cdot | \cdot \cdot$ соответствует такое разбиение: $II = 3+4+2+2$.

Таким образом, мы видим, что задача 43 сводится к следующей задаче.

Вспомогательная задача 43 а) Имеется II точек, расположенных в ряд. Сколькими способами можно расставить между ними 3 черточки?

Покажем, что эти задачи сводятся к задаче 21 из §2.

В самом деле, поставим между точками цифры

$\cdot 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot$.

Поставив три черточки, мы отмечаем трехзначное число, цифры которого идут в возрастающем порядке, количество таких чисел равно

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120. \text{ Ответ к задаче 43: } 120 \text{ разбиений.}$$

Задача 44. Сколькими способами число II можно разбить на $(k+1)$ слагаемых (где $k=0,1,2,\dots,9$)?

Указание. Ответ нужно записать так же, как в задаче 28, а обосновать, – так же, как в задаче 43.

Задача 45. а). Сколькими способами можно разбить число II на несколько слагаемых (число слагаемых больше I)?

б). Сколько всего существует выпуклых многоугольников с вершинами в некоторых из 10 данных точек на окружности (отрезок или одна точка многоугольником не считается)?

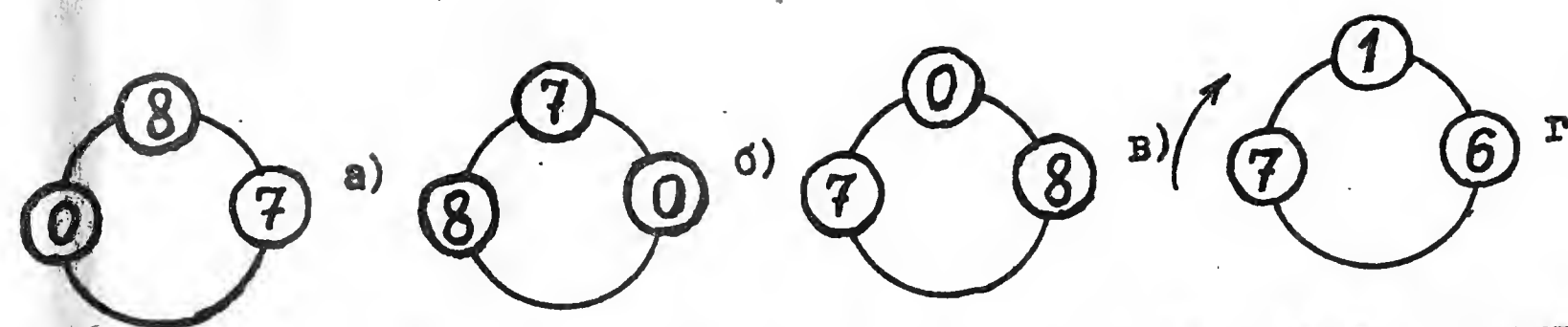
в). Сколько всего существует чисел с убывающим порядком цифр (включая однозначные числа: $0,1,2,\dots,9$)?

г). Сколько всего существует подмножеств у множества A из 10 элементов $\{0,1,2,\dots,9\}$ (все множество A а также "пустое" множество также считаются подмножествами A).

Указание. В задачах в) и г) ответ такой же, как в задаче 41а). Нужно только это обосновать.

Задача 4.6. Сколькими способами три цифры можно расставить по кругу? (Два способа, отличающиеся только поворотом круга – скажем, такие, как изображены на рисунках а), б), в) – считаются одинаковыми).

Первое решение задачи 4.6. Сначала найдем, сколько способов расставить четыре цифры в трех кружках (способы, изображенные на рисунке а) и б), пока считаем разными). Таких способов будет конечно, столько же, сколько трехзначных чисел с различными цифрами, то есть $10 \cdot 9 \cdot 8$. Но так каждую расстановку цифр по кругу мы посчитали три раза. Значит, расставить три цифры по кругу можно $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3}$ способами.



Второе решение задачи 4.6. Здесь мы сразу будем считать расстановки а), б), в) одинаковыми, не различать их. Поставим каждой расстановке в соответствие трехзначное число следующим образом: сначала запишем наибольшую цифру, а затем по порядку те цифры, которые идут за ней по часовой стрелке. Например, расстановке, изображенной на рис. а), б), в) соответствует число 870, а расстановке на рис. г) – 716. Ясно, что мы получим взаимнооднозначное соответствие между такими расстановками и трехзначными числами, у которых первая цифра – самая большая и все цифры различны. Сколько же существует таких чисел? Очевидно, что наибольшая первая цифра не меньше 2, и с двойки начинается два числа: 210 и 201. Чисел с первой цифрой 3 будет 3·2 (столько же, сколько двухзначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 0,1 и 2). Чисел с первой цифрой 4 будет 4·3, и так далее. Чисел с первой цифрой 9 будет 9·8 (столько можно составить двухзначных чисел с различными цифрами из 9 цифр 0,1,...,8). Итак, всего трехзначных чисел с разными цифрами, у которых первая цифра – самая большая, существует $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 8 \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3}$.

Итак, решая задачу, мы заодно выяснили, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 8 \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3}$.

Подчеркнем еще раз основную идею, которую мы использовали в первом решении; в первом решении мы объединили в один класс все трехзначные числа с разными цифрами, полученные перестановкой цифр "по кругу": (870, 708 и 087) и должны были посчитать число таких классов. Для этого общее количество чисел ($10 \cdot 9 \cdot 8$) мы разделили на количество чисел, попавших в один класс (на 3). Во втором решении мы выбрали по одному "представителю" в каждом классе (числу с наибольшей первой цифрой) и посчитали число таких "представителей".

Приблизительно те же идеи мы использовали в решениях предыдущих задач в §2.

Задача 4.7. Найдите суммы

а) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 7 \cdot 8 \cdot 9$;

б) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

в) Сколькими способами можно расставить пять цифр по кругу (две расстановки, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми)?

Задача 4.8. Сколько существует k -значных чисел, у которых все цифры разные и первая цифра – самая большая ($k=1, 2, \dots, 9$)?

Указание к задаче 4.8. При $k=1$ нужно взять все 10 однозначных чисел: $0,1,\dots,9$; При $k=2$ – все числа с убывающим порядком цифр (см. задачу 2.0); при $k=3$, как мы убедились в решении задачи 4.6 нужных чисел $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3} = 240$.

Ответ:

$k=1$	– 10;	$k=2$	– 45;
$k=3$	– 240;	$k=4$	– ?

Задача 4.9. Сколько существует k - значных чисел с невозрастающим порядком цифр?

Указание к задаче 4.9. Для $k=2$ мы эту задачу решили в § 2 (задача 2.0). Для $k=3$ можно рассуждать так.

Поставим три точки, разобьем их черточками на группы (как в решении задачи 4.3), а затем в каждой группе напомним какую-то одну цифру, причем в следующей группе - меньшую цифру, чем в предыдущей. Если группа одна, то во всех трех точках напомним одну и ту же цифру - получим 10 чисел

... \rightarrow $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 9 & 9 & 9 \end{matrix}$

Если группы две (разбить 3 на две группы можно 2 способами), то в них можно написать цифры любого двузначного числа с убывающим порядком цифр (всего таких чисел 45),

... / . или . / . \rightarrow $\begin{matrix} 110 \\ 220 \\ \dots \\ 998 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 100 \\ 200 \\ \dots \\ 988 \end{matrix}$

Так мы получим еще $2 \cdot 45 = 90$ чисел. Наконец, если разбить 3 на 3 группы и в каждой написать по цифре, то получим еще $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел с убывающим порядком цифр

./././ \rightarrow $\begin{matrix} 321 \\ \dots \\ 987 \end{matrix}$

Итак, всего при $k=3$ получается $10+90+120=220$ чисел. Предложите наши рассуждения и напишите.

Ответ: $\begin{matrix} k=1 & - & 10, \\ k=2 & - & 45, \\ k=3 & - & 220, \end{matrix}$

Заключение. В §2-4 мы в основном имели дело с примерами, когда "основное множество", из которого черпали элементы и их комбинации, состояло из цифр, то есть содержало 10 элементов. Конечно, аналогичные задачи можно решать и для множества из любого числа элементов (и кое-где мы с этим уже сталкивались). Скажем, найти число разбиений числа n на k слагаемых, или число расстановок n чисел (от 1 до n) по кругу, или коэффициенты разложения $(a+b)^n$ в сумму членов $a^k b^{n-k}$, или сумму чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1) + \dots + (n-k+1)(n-k+2) \cdot \dots \cdot n$.

Во многих более общих задачах принципы рассуждений (и даже вид формул, получающихся в ответе) тот же самый, что и в задачах, которые мы рассмотрели. С некоторыми общими формулами комбинаторики вы еще встретитесь в курсе математики в школе. Но чтобы решать задачи, полезнее знать не формулы, а основные приемы рассуждений и подсчетов - поэтому мы совсем не занимались здесь выведением общих формул, а только конкретными задачами.

Подписано к печати 12.IX.1974 г.

Формат 60x90 1/16 Объем 1,25 п.л.

Заказ III4 Тираж 5000 экз.

Отпечатано на ротационной машине
механики МГУ

Академия педагогических наук СССР
Всероссийская заочная математическая школа при МГУ

В.Л. Гутенмахер, Н.Б. Васильев

ВВЕДЕНИЕ В КОМБИНАТОРИКУ
(по материалам лекций академика И.М. Гельфанда)

Методические разработки
для учащихся ВЗМШ

Москва - 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

УДК 37.018.43

Введение в комбинаторику: методические разработки для учащихся ВЭМШ АПН СССР при МГУ (В.Л.Гутенмахер, Н.Б.Васильев - М.: изд. АПН СССР, 40 с.).

Разработки предназначены учащимся Всесоюзной заочной математической школы Академии педагогических наук СССР при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова (ВЭМШ).

В них рассказано о некоторых центральных идеях элементарной комбинаторики. Разобран ряд типичных задач, дано много материала для самостоятельной работы. Приведены контрольные задания и критерии оценок их выполнения.

Рецензенты: С.М.Львовский, кандидат физ-мат наук;
А.Л.Тоом, кандидат физ-мат наук.

С о д е р ж а н и е

	стр
Предисловие	3
§1. Включения и исключения	4
§2. Одна комбинаторная задача	13
§3. Геометрическое изображение задачи 2-0 и несколько задач о графах	20
§4. Произведения, суммы, расстановки цифр	27
§5. Разные задачи	34
Контрольные задания	40
Критерии оценок	40

Ротапринт НИИОП АПН СССР
129327, Москва, ул. Ленская, 4
Заказ № 143 Тираж 1000

© Академия педагогических наук СССР (АПН СССР), 1989 г.

На этих страницах Вы познакомитесь с несколькими красивыми математическими идеями.

С комбинациями различных объектов, действий над ними и т.п. мы сталкиваемся на каждом шагу. Основной задачей области математики, называемой комбинаторикой, можно считать задачу размещения объектов по специальным правилам и нахождения числа способов таких размещений.

Наша цель - познакомить читателя с основными приемами подсчета различных вариантов (среди них - формула "включений и исключений", "правило произведения") и с важными понятиями, постоянно используемыми в комбинаторике ("взаимнооднозначное соответствие", "разбиение на классы").

Текст разбит на пять параграфов. Задачи первого параграфа учат наглядно изображать условие задачи, переводить его на "язык множеств" и приводят читателя к важной формуле "включений и исключений".

Второй параграф касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных K -значных чисел, цифры которых в десятичной записи расположены в убывающем порядке? Путь к ее решению состоит в том, чтобы разобраться в условии для небольших значений K и разбить задачу на более простые.

Третий параграф начинается с новой, геометрической интерпретации первой задачи из §2. Далее он продолжается задачами, условия которых удобно изображать в виде "графов" (т.е. комбинациями точек и соединяющих их дуг).

Параграф четвертый - новые вариации на тему, начатую в §2, и их обобщения.

В конце каждого из этих параграфов приведено заключение, обобщающее материал, изложенный в тексте.

В пятом параграфе помещены разные задачи. Комбинаторика - один из тех разделов математики, где почти сразу возникают трудные и даже нерешенные вопросы (см. с.38 - 39).

Ваше задание состоит в том, чтобы внимательно проработать текст пособия, обращая внимание на образцы записи решений, приведенные в нем. При выполнении контрольной работы полезно следовать этим образцам.

Тем из Вас, кто еще этого не сделал, мы советуем подписаться

на журнал "Квант", в котором помещается много материалов по математике и физике. Подписной индекс 70465.

§ 1. Включения и исключения.

Этот параграф состоит из нескольких задач, которые приведут нас к важной формуле "включений и исключений".

Сначала небольшая "разминка" - совсем простые упражнения.

Упражнение I-0. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, которые делятся:

а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 6?

Ответы: а) 49 (так как $99 = 2 \cdot 49 + 1$);

б) 33 (так как $99 = 3 \cdot 33$);

в) 19 (так как $99 = 5 \cdot 19 + 4$);

г) 16 (так как $99 = 6 \cdot 16 + 3$).

Контрольное упражнение I-1. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые делятся:

а) на 2; б) на 3; в) на 5; г) на 7?

Эти упражнения помогут нам в решении следующих задач.

Задача I-2. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 100, которые:

а) делятся одновременно на 2 и на 3;

б) делятся на 2, но не делятся на 3;

в) делятся на 3, но не делятся на 2;

г) делятся на 3 или на 2;

д) не делятся ни на 2, ни на 3?

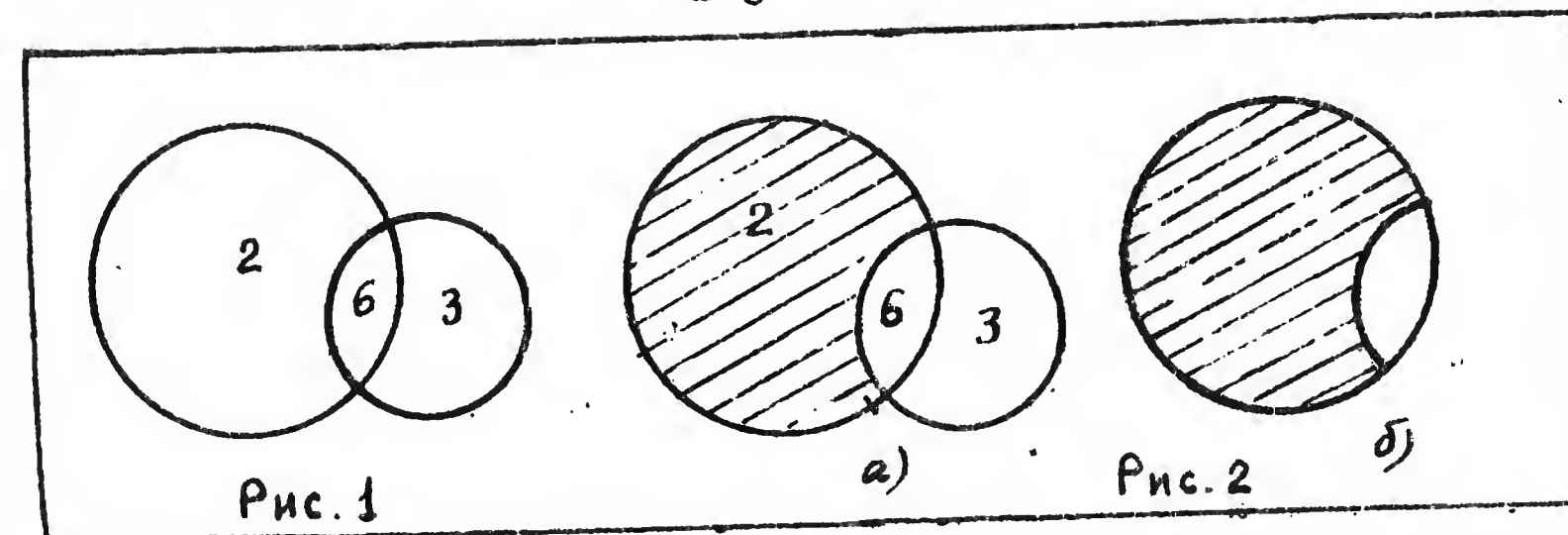
Ответы: а) 16, б) 33, в) 17, г) 66, д) 33.

Решение задачи I-2а). Числа, которые делятся и на 2, и на 3, - это числа, которые делятся на 6. Количество таких чисел мы подсчитали в упражнении I-0 г).

Решение задачи I-2 б). Для наглядности ситуацию можно изобразить двумя пересекающимися кругами (см.рис.1).

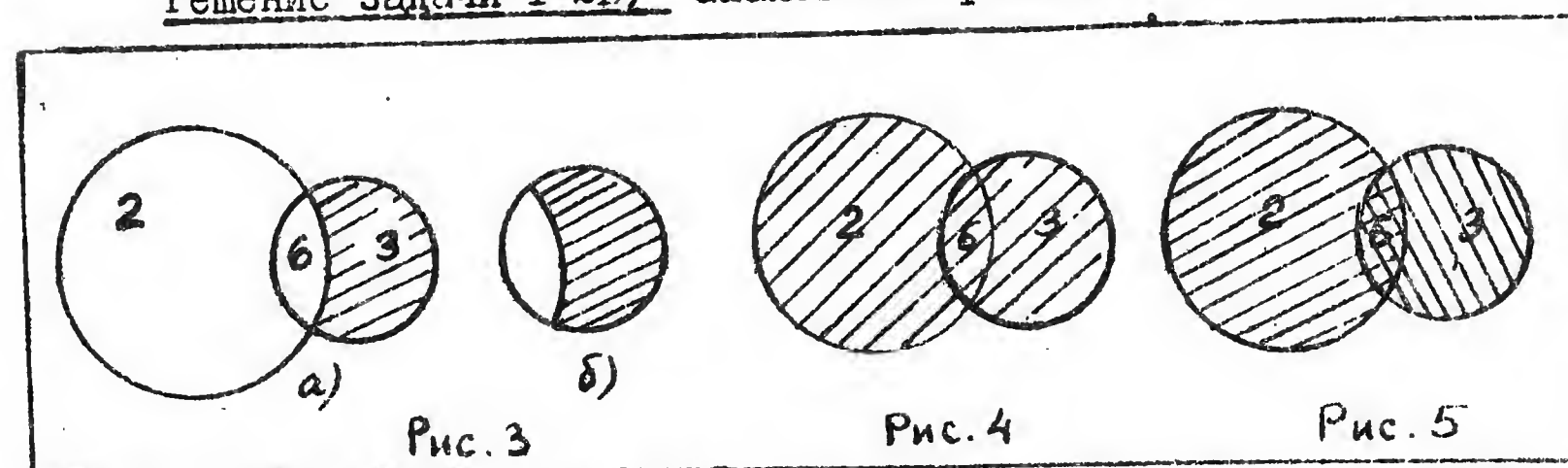
В первом круге - множество чисел, которые делятся на 3, во втором - множество чисел, которые делятся на 2, а их пересечение (общая часть) - множество чисел, которые делятся на 6.

Нам нужны числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3.



Числа, которые делятся на 2, но не делятся на 3 - это числа, которые делятся на 2, но не делятся на 6. На рисунках 2а) и 2б) мы заштриховали нужное множество чисел. Очевидно, их количество равно $49 - 16 = 33$ (из 49 чисел, делящихся на 2, 16 делятся на 6).

Решение задачи I-2в) аналогично решению б),



только в этом случае нам нужно другое заштрихованное множество (см.рис.3а) и 3б)).

Решение задачи I-2г). В этом случае мы также заштриховываем нужное нам множество. Это - объединение двух кругов (см.рис.4).

Если сложить количество чисел, которые делятся на 3, с количеством чисел, которые делятся на 2, то мы при этом два раза посчитаем числа, которые делятся на 6 (см.рис.5). Таким образом, от полученной суммы нам еще надо отнять количество чисел, которые делятся на 6.

Итак, ответ: $33 + 49 - 16 = 66$.

Решение задачи I-2д). Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см.рис.6). Квадрат - это множество всех целых положительных чисел, меньших 100, а круги - это множества чисел, делящихся на 2 и на 3. Нужное нам количество чисел заштриховано на рис.6. Количество таких чисел будет равно количеству чисел, находящихся в дополнении к объединению двух кругов. Сколько чисел в объеди-

нении двух кругов, мы уже подсчитали в задаче г).

Ответ. $99 - 66 = 33$.

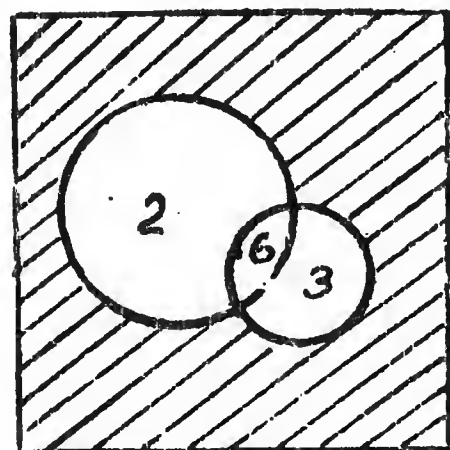


Рис. 6

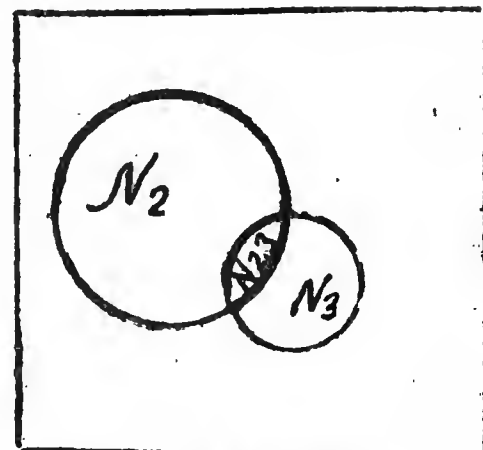


Рис. 7

Обозначим через N количество всех чисел, меньших 100, через $N_2, N_3, N_{2.3}$ - соответственно количества чисел, которые делятся на 2, делятся на 3, делятся на $2 \cdot 3$, а через N' - количество чисел, которые не попадают ни в N_2 , ни в N_3 . Тогда из наших рассуждений мы получим формулу

$$N' = N - N_2 - N_3 + N_{2.3}$$

Контрольная задача I - 3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые:

- делятся и на 2, и на 3;
- делятся на 2, но не делятся на 3;
- делятся на 3, но не делятся на 2;
- делятся на 3 или на 2;
- не делятся ни на 2, ни на 3?

Более сложные задачи получатся, если мы возьмем три числа, например, 2, 3, 5.

Задача I-4. Сколько целых положительных чисел, меньших 100, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

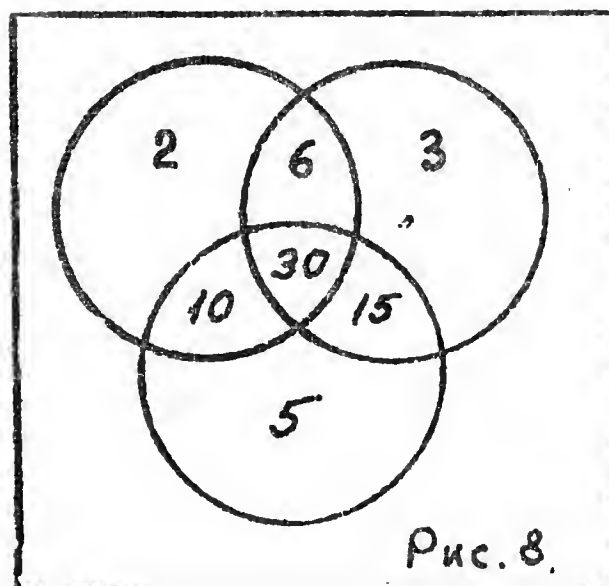


Рис. 8

Решение задачи I-4. Заметим, во-первых, что если число делится и на 2, и на 5, то оно делится на 10; если оно делится и на 3, и на 5, то оно делится на 15, а если еще и на 2, то оно делится на 30. Изобразим ситуацию в виде диаграммы (см. рис. 8), где внутри квадрата - множество чисел, меньших 100, а в кружках - соответственно множества

чисел, которые делятся на 2, на 3, на 5.

Пусть N_2 - количество чисел, которые делятся на 2, N_3 - количество чисел, которые делятся на 3, N_5 - количество чисел, которые делятся на 5. $N_{2.3}$ - делящиеся и на 2, и на 3, $N_{3.5}$ - делящиеся и на 3, и на 5. Наконец, $N_{2.3.5}$ - количество чисел, которые делятся и на 2, и на 3, и на 5, а N' - количество чисел, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Оказывается, верна следующая формула:

$$N' = N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2.3} + N_{2.5} + N_{3.5} - N_{2.3.5} \quad (*)$$

Все числа, которые стоят в правой части равенства, легко посчитать:

$$N = 99, N_2 = 49, N_3 = 33, N_5 = 19, N_{2.3} = N_6 = 16, N_{3.5} = N_{15} = 6, N_{2.3.5} = 3.$$

По формуле (*) мы получаем нужное нам число $N' = 26$. Осталось доказать формулу (*).

Мы должны посчитать, сколько чисел содержится в квадрате, но не попадает ни в один из кругов. Если мы вычтем из N сумму $N_2 + N_3 + N_5$, то числа, попавшие ровно в два из трех кругов, мы вычтем два раза, а числа, попавшие во все три круга - даже три раза. Теперь к разности $N - N_2 - N_3 - N_5$ добавим сумму $N_{2.3} + N_{3.5} + N_{2.5}$. Тогда все числа, попадающие в один или два круга, мы учли правильно и только числа, попадающие во все три круга - неправильно: их количество мы трижды вычли и вновь трижды добавили. Придется из суммы $N - N_2 - N_3 - N_5 + N_{2.3} + N_{3.5} + N_{2.5}$ вычесть еще $N_{2.3.5}$. Теперь все числа, входящие в объединение трех кругов, мы учли по разу и пришли к формуле (*).

Задача I-5. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Задача I-6. Сколько существует целых положительных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7, ни на 11?

Указание к задаче I-6. $N' = N - N_3 - N_5 - N_7 - N_{11} + N_{3.5} + N_{3.7} + N_{5.7} + N_{3.11} + N_{5.11} + N_{7.11} - N_{3.5.7} - N_{3.5.11} - N_{3.7.11} - N_{5.7.11} + N_{3.5.7.11} \quad (**)$

Чисел, меньших 1000 и делящихся на $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, не существует (как Вы думаете, почему?) Поэтому $N_{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = 0$

Еще три контрольные задачи к § I.

Задача I-7. Объединение множества A и B состоит из 25 элементов, пересечение - из 10 элементов. Сколько элементов в A , если в B :

- а) 15 элементов; б) 21 элемент; в) 10 элементов?

Задача I-8. В школьной химической олимпиаде участвовали 21 человек, в физической - 26 человек, в математической - 29 человек. 14 школьников принимали участие и в химической, и в математической, 15 учащихся - и в физической, и в математической, 8 - во всех трех олимпиадах. Сколько школьников участвовали хотя бы в одной из трех олимпиад? Найти все возможные ответы.

Задача I-9. У меня трое друзей. За месяц с каждым из них я обедал 9 раз, с каждым двумя из них - 4 раза, со всеми тремя - 1 раз, без каждого из них - 15 раз.

- а) Сколько всего раз я обедал?
б) Сколько раз я обедал один?

Заклучение.

Формулы (ж) и (жж), которыми мы пользовались выше, являются частными случаями общей формулы - так называемой "формулы включений и исключений". Она связывает такие числа: N - количество элементов некоторого множества A ; N_1, N_2, N_3, \dots - количества элементов в некоторых его подмножествах A_1, A_2, A_3, \dots ; N_{12}, N_{13}, \dots - количества элементов в попарных пересечениях этих множеств: A_1 и A_2 , A_1 и A_3, \dots ; $N_{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots$ - количества элементов в пересечениях этих множеств по три, и так далее; наконец, N' - количество элементов множества A , которые не входят ни в одно из подмножеств A_1, A_2, A_3, \dots . Тогда, как можно доказать,

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 - \dots + N_{12} + N_{13} + \dots - N_{123} \dots$$

(это и есть общая "формула включений и исключений"). Например, когда подмножеств одно, два и три, она принимает такой вид:

$$N' = N - N_1$$

$$N' = N - N_1 - N_2 + N_{12}$$

$$N' = N - N_1 - N_2 - N_3 + N_{12} + N_{23} + N_{13} - N_{123}$$

Формула "включений и исключений" относится к алгебре множеств. Подобно операциям над числами - сложению, вычитанию, умножению - можно определить операции над множествами, позволяющие из данных множеств получать новые. Между ними выполняются некоторые соотношения (тождества), напоминающие законы арифметических действий. Мы коротко познакомимся сейчас с основными обозначениями для операций над множествами и свойствами этих операций. Такое знакомство полезно, поскольку язык теории множеств служит основой всей современной математики. В комбинаторике мы занимаемся конечными множествами, а в других разделах математики имеем дело и с бесконечными множествами (чисел, точек и т.п.).

Будем считать, что все элементы рассматриваемых нами множеств мы берем из некоторого одного и того же "универсального" множества D (рис.9); как и выше, это множество мы изображаем квадратом, а рассматриваемые нами множества A, B, \dots - подмножества множества D - кругами (или другими полученными из них фигурами, которые мы выделяем штриховкой).

Приведем список основных операций над множествами (их обозначения и названия).

$A \cup B$ - объединение A и B (рис.10);

$A \cap B$ - пересечение A и B (их общая часть, рис.11);

$A \setminus B$ - разность A и B (множество элементов A , не принадлежащих B - рис.12);

\bar{A} - дополнение множества A (до множества D : $\bar{A} = D \setminus A$; рис.13).

Когда речь идет о множествах, запись $A = B$ означает, что A и B совпадают, то есть состоят из одних и тех же элементов.

Заодно упомянем и такие стандартные обозначения:

$a \in A$, то есть a принадлежит множеству A (является элементом A);

$A \subset B$, то есть A содержится в B (A - подмножество B , иначе: всякий элемент B является

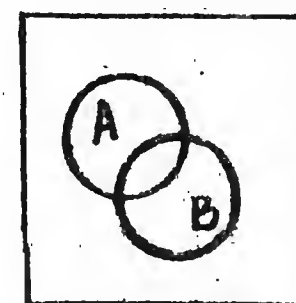


Рис. 9

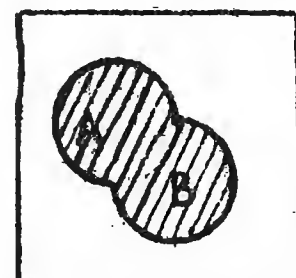


Рис. 10

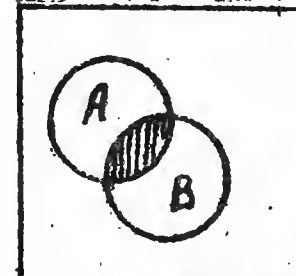


Рис. 11: $A \cap B$

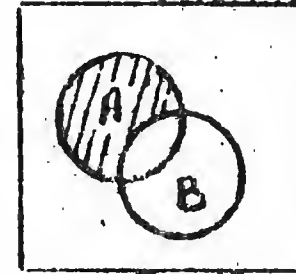


Рис. 12: $A \setminus B$

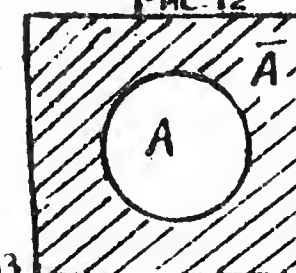


Рис. 13
и элементом A).

Когда речь идет о каком-то свойстве элементов множества A ,

удобно рассмотреть множество всех элементов, обладающих этим свойством. Тогда различным логическим комбинациям двух или нескольких свойств, которые выражаются в обычной речи с помощью союзов "и" и "или" и частицы "не", будут соответствовать операции над множествами.

Пусть α и β - два некоторых свойства, А и В - соответствующие им множества (скажем, D - множество чисел от 1 до 100, А - множество четных чисел от 1 до 100, В - множество чисел от 1 до 100, кратных числу 3). Тогда множество элементов D, для которых:

выполнены оба свойства, α и β - это пересечение $A \cap B$;

выполнено хотя бы одно из них, α или β - это $A \cup B$;

выполнено А, но не выполнено В - это разность $A \setminus B$;

выполнено ровно одно из них, либо α , либо β - это

$A \cup B \setminus (A \cap B)$ (так называемая "симметрическая разность" А и В - рис.14);

не выполнено α (то есть "выполнено не α ") - это $\bar{A} = D \setminus A$.

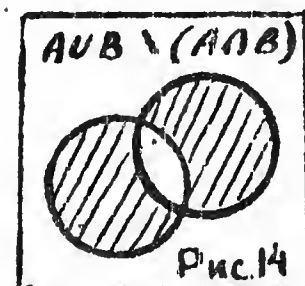
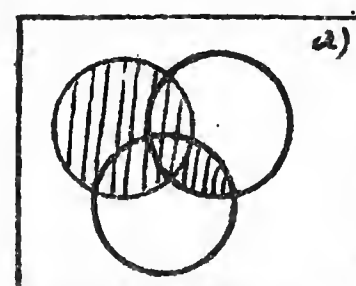


Рис.14



$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

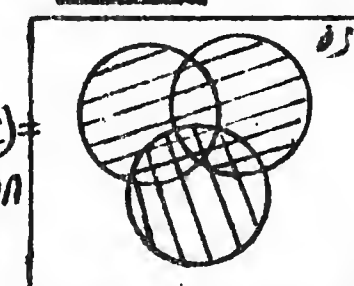


Рис.15

Добавим еще одно свойство, γ , и соответствующее ему множество С.

Пусть нас интересуют элементы D, для которых выполнено свойство α или оба свойства, β и γ . Они образуют множество, заштрихованное на рис.15а. Это множество можно записать так: $A \cup (B \cap C)$.

Заметим, что то же самое множество можно получить и иначе: оно равно $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (на рис.15б множество $A \cup B$ заштриховано в одном направлении, а $A \cup C$ - в другом, так что пересечение этих двух множеств заштриховано дважды).

Итак, для любых множеств А, В и С выполнено такое равенство:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Его можно назвать дистрибутивностью (точнее, дистрибутивностью объединения множеств по отношению к пересечению: для этих операций верен и другой закон дистрибутивности - см. ниже задачу I-II).

Иногда объединение множеств называют "сложением", а пересечение - "умножением"; некоторые законы этих операций действительно похожи; в частности, законы коммутативности и ассоциативности выполнены и для пересечения, и для объединения: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Кстати, из последних равенств вытекает, что выражение $A \cup B \cup C$ (или $A \cap B \cap C$) можно писать без скобок - точно так же, как для

чисел: $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 2 + 3 + 4$; $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4$. Далее мы предлагаем Вам несколько упражнений. Надо привести наглядные доказательства следующих равенств.

I-I0. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения. Здесь можно провести аналогию с умножением: $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$).

I-II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность). Сравните с равенством $2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$.

I-I2. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$. Сравните с неверным равенством $(5 - 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 - 3$.

I-I3. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$. Сравните с верным равенством $(5 - 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2$.

I-I4. Запишите формулами (выразите через А, В и С) множества, заштрихованные на рис.16.

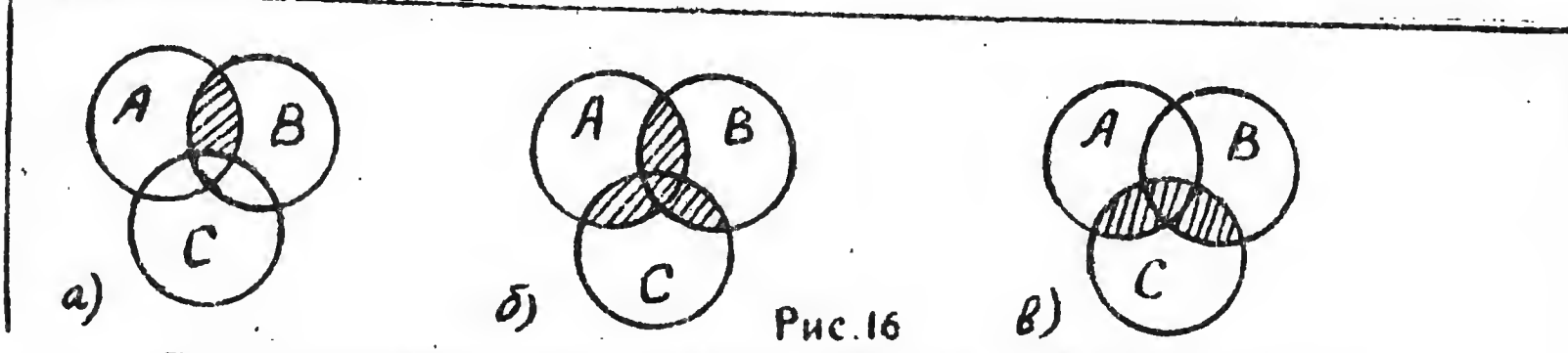


Рис.16

I-I5. Докажите, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. заштриховав соответствующие множества на рисунке.

Равенства задачи I-I5 показывают наличие своеобразной "двойственности" (симметрии) между операциями пересечения и объединения множеств. Заметим, что такой симметрии между сложением и умножением чисел нет, так что аналогия между операциями над числами и над множествами далеко не полная. Скажем, у множеств, как мы видели, есть два закона дистрибутивности, а у чисел дистрибутивности сложения относительно умножения, конечно, нет: $2 + 3 \cdot 4 \neq (2 + 3) \cdot (2 + 4)$.

* * *

Используя язык теории множеств в решении задач, надо внимательно следить за тем, чтобы не ошибиться при "переводе" условия задачи на точный математический язык. В обычной речи союзы "и", "или" (или аналогичные им по смыслу слова) далеко не всегда имеют смысл "пересечения" и "объединения", и тут возможны разночтения. Вот, например, что произошло, когда однажды задачу I-9 предложили решать ученикам заочной школы. Мы имели в виду, что условие задачи будет понято так.

Решение Вити Г. Если изображать все множество обедов в виде квадрата D, а множества обедов с первым, вторым и третьим другим соответственно в виде кругов A_1 , A_2 , A_3 , то по условию:

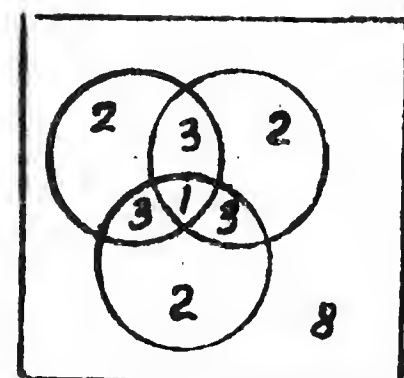


Рис. 17

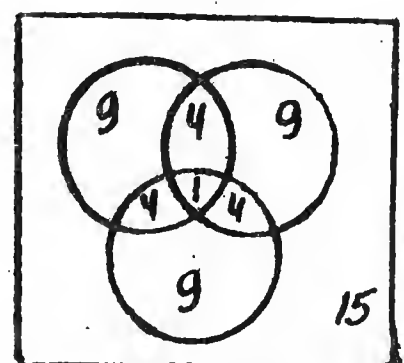


Рис. 18

- (1) в каждом круге A_i содержится 9 элементов;
- (2) в каждом попарном пересечении $A_i \cap A_j$ - 4 элемента;
- (3) в пересечении $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ - 1 элемент;
- (4) в дополнении каждого круга \bar{A}_i - 15 элементов.

Отсюда следует, что количество элементов в D равно $9 + 15 = 24$, а в дополнении к объединению трех кругов, как можно найти по формуле "включений и исключений",

$$N' = 24 - 9 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 1 = 8.$$

элементов - именно столько обедов я провел в одиночестве - см. рис.17.

Но в работах учеников мы увидели, наряду с этим, и другие решения; вот некоторые из них.

Автор	Всего обедов	В одиночестве
Сергея С.	16	0
Маша И.	31	15
Коля В.	55	15
Витя Г.	24	8

Сергея и Маша поняли условия (1)-(3) так же, как Витя, а условие (4) иначе.

Сергея считал, что "без каждого из них" - это $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$, то есть всего обедов было 16. Тогда по формуле получается

$$N' = 16 - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 - 1 = 0,$$

то есть Сергей никогда не обедал один.

Маша решила, что "без каждого из них" - это $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$, тогда $N' = 15$ и $15 = N - 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 - 1$, то есть $N = 31$.

А Коля условие (4) понял так же, как Маша, но и про условия (1)-(3) решил, что они относятся к отдельным "долям", на которые квадрат D разрезан окружностями (рис.18), поэтому у него вышло, что $N' = 15$ и $N = 15 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 1 = 55$ - почти каждый день два обеда

В случае сомнений нужно специально уточнять, как Вы понимаете условие.

Чтобы по возможности избежать подобных недоразумений, мы старались ограничиваться задачами о числах, точках, цифрах, отрезках, но и здесь иногда бывают неясности.

Например, в следующих параграфах мы часто используем такое "правило произведения": если множество A состоит из K элементов, а множество B - из m элементов, то можно образовать всего (Km) пар $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$. (Множество таких пар обозначается $A \times B$ и называется произведением множеств A и B .) Так, если A - это класс из 30 учеников, то пару (комсорг; староста) в нем можно выб-

рать $30 \cdot 30 = 900$ способами. Но пару учеников для игры в пинг-понг можно выбрать лишь $(30 \cdot 29) / 2 = 435$ способами: ведь в этом случае естественно считать, что пары $(a; b)$ и $(b; a)$ неразличимы, и уж, конечно, $a \neq b$.

§ 2. Одна комбинаторная задача

Этот параграф касается, в основном, только одной задачи: сколько существует целых положительных K -значных чисел, цифры которых расположены в убывающем порядке?

Это - трудная задача. Наш путь решения будет таким. Мы сначала разберемся в условии задачи для $K = 2, 3$ и разобьем задачу на более простые, а уже затем перейдем к следующим значениям $K = 4, 5, \dots$

Итак, начнем наш путь "от простого к сложному".

Задача 2-0а). Сколько существует двузначных чисел^{ж)} с убывающим порядком цифр?

б) Сколько существует чисел, меньших 100, цифры которых идут в возрастающем порядке?

в) Тот же вопрос для чисел, цифры которых идут в неубывающем порядке.

г) Сколько существует двузначных чисел с невозрастающим порядком цифр (то есть таких, у которых вторая цифра не больше первой)?

Решение задачи 2-0а). Первое, что приходит в голову - это выписать все такие числа: 98, 97, 90, 87, 86, ..., 80, 76, ..., 70, 65, 60, 54, ..., 10 и пересчитать их. Мы, конечно, сразу заметим, что в девятом десятке их 9, в восьмом - 8, и т.д., в первом десятке - 1 число, 10, поэтому нам просто нужно сложить числа

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = ?$$

Проще всего их складывать в таком порядке:

$$(9+1) + (8+2) + (7+3) + (6+4) + 5 = ?$$

Ответ: 45 чисел.

Уточнение. Уточним условие задачи 2-0б). Числа, меньшие 100, - это двузначные и однозначные числа. Цифры двузначного числа

^{ж)} Подчеркнем еще раз: всюду здесь мы имеем в виду натуральные (положительные целые) числа, записанные в десятичной системе.

идут в возрастающем порядке, если первая цифра меньше второй. Однако неясно, как быть с однозначными числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мы будем считать, что это - тоже числа с возрастающим порядком цифр, хотя это выглядит странно - говорить здесь о возрастающем порядке. Эти же однозначные числа мы будем считать и числами с убывающим порядком цифр. (Такие соглашения часто принимаются в математике). Так что, если Вас спросят, бывают ли числа, цифры которых одновременно идут и в возрастающем, и в убывающем порядке, Вы сможете ответить, что это числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Решение задачи 2-0б). Здесь, конечно, можно сделать такой же подсчет, как и в задаче а), однако интереснее действовать иначе. Как мы уже говорили, среди нужных нам чисел есть однозначные и двузначные. Сделаем однозначные числа тоже двузначными, приписав к ним слева ноль:

$$1=01, 2=02, \dots, 9=09.$$

При такой записи мы не перепутаем эти числа ни с какими другими двузначными числами и отнесем их тоже к числам, цифры которых идут в возрастающем порядке (таким образом нумеруются билеты лотереи). Теперь становится ясно, что ответ будет таким же, как в задаче а). В самом деле, если в каждом числе, меньшем 100, с возрастающим порядком цифр поменять цифры местами, то получится двузначное число с убывающим порядком цифр, и наоборот. Итак, ответ: 45 чисел.

Решение задачи 2-0в). К таким числам относятся числа, цифры которых идут в возрастающем порядке, и числа, обе цифры которых одинаковы.

Сколько есть чисел с возрастающим порядком цифр, мы знаем из задачи б) - их 45.

Чисел с одинаковыми цифрами всего 9: 11, 22, ..., 99.

$$\text{Итого } 45 + 9 = 54.$$

Ответ: 54 числа.

Решение задачи 2-0г). К таким числам относятся двузначные числа с убывающим порядком цифр, количество которых мы нашли в задаче 2-0а), и двузначные числа с одинаковыми цифрами, а их всего 9. Итак, получаем $45 + 9 = 54$ числа.

Ответ: 54 числа.

Снова решение задачи 2-0а). Используя решения задач б), в) и г), можно решить задачу а) еще более простым подсчетом. Двузначных чисел, включая и числа 01, 02, ..., 09, начинающиеся с нуля, цифры которых различны, всего 90. В самом деле, чисел, меньших 100, всего 99, а чисел, с одинаковыми цифрами, меньших 100, всего 9. Двузначные числа с двумя неодинаковыми цифрами разбиваются на два класса, состоящие из чисел с убывающим порядком цифр и из чисел с возрастающим порядком цифр, причем тех и других поровну. Следовательно, чисел с убывающим порядком цифр всего $90:2=45$.

Задача 2-1. Сколько существует восьмизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2-2. Сколько существует чисел, меньших 100, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2-3. Сколько существует одиннадцатизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 2-1. Сначала ответ: столько же, сколько двузначных, то есть, 45. Докажем это. Выпишем в строку все десять цифр:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Возьмем двузначное число с убывающим порядком цифр и вычеркнем его цифры из этой строки. В результате мы получим восьмизначное число с убывающим порядком цифр, например:

$$70 \rightarrow 986543210, \text{ то есть } 98654321$$

$$62 \rightarrow 987543210, \text{ то есть } 98754321$$

Таким образом, каждому двузначному числу с убывающим порядком цифр мы сопоставим одно восьмизначное число с убывающим порядком цифр. Теперь, наоборот, возьмем какое-нибудь восьмизначное число с убывающим порядком цифр. Вычеркивая его цифры из строки 9876543210, мы получим двузначное число с убывающим порядком цифр, например,

$$98764321 \rightarrow 987543210, \text{ то есть } 50.$$

Таким образом, каждому восьмизначному числу мы сопоставили одно двузначное число. Очевидно, что и в первом, и во втором случае двум разным числам соответствуют два разных числа. Тем самым мы установили взаимнооднозначное соответствие между дву-

значными и восьмизначными числами с убывающим порядком цифр. Следовательно, и тех, и других одинаковое количество.

Решение задачи 2-2. Числа, меньшие 100, с убывающим порядком цифр могут быть двузначными и однозначными. Количество таких двузначных чисел мы нашли в задаче 2-0а) - их 45. В уточнении условия задачи 2-0б) мы договорились, что все однозначные числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9-тоже удовлетворяют условию задачи 2-2. Итого: $45+9=54$.

Ответ: 54 числа.

Еще одно решение задачи 2-2. Эту задачу можно решить иначе. Новое решение, похожее на решение задачи 2-1, объяснит, почему ответ в этой задаче такой же, как в задаче 2-0г).

Дополним однозначные числа, удовлетворяющие условию задачи 2-2, (согласно уточнению условия на стр. 13, до двузначных, приписав к ним ту же цифру:

$1 \rightarrow 11, 2 \rightarrow 22, \dots, 9 \rightarrow 99$.

Тем самым каждому числу, меньшему 100, с убывающим порядком цифр мы сопоставили двузначное число с невозрастающим порядком цифр.

Наоборот, возьмем какое-нибудь двузначное число с невозрастающим порядком цифр. Если его цифры одинаковы, вычеркнем одну из них, а если разные - оставим все, как есть. Тем самым однозначному числу с невозрастающим порядком цифр мы сопоставили число, меньшее 100, с убывающим порядком цифр. Мы установили взаимнооднозначное соответствие между числами из задачи 2-2 и 2-0г). Следовательно, тех и других поровну.

Решение задачи 2-3. Сначала ответ: таких чисел нет. В самом деле, у такого числа все 11 цифр должны быть разными, но различных цифр всего 10.

Задача 2-4а). Сколько существует двузначных чисел с убывающим порядком цифр, в записи которых нет цифры 0?

б) Сколько существует двузначных чисел с возрастающим порядком цифр?

Решение задач 2-4а), б). Эти задачи похожи на задачу 2-0а), поэтому мы будем решать их аналогично. Двузначных чисел, цифры

которых различны и отличны от нуля, всего 72 (почему?). Они разбиваются на два класса, состоящие из чисел с возрастающим порядком цифр и из чисел с убывающим порядком цифр, причем тех и других поровну (почему?). Следовательно, тех и других по 36.

Ответ: 36 чисел.

Задача 2-5. Сколько существует трехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Решение задачи 2-5.

Трехзначные числа, цифры которых идут в убывающем порядке - это числа, у которых вторая цифра меньше первой, а третья - меньше второй. Следовательно, у таких чисел все цифры разные. Рассмотрим множество чисел, у которых все три цифры разные, причем будем считать, что числа могут начинаться с нуля, как в решении задачи 2-0б). Разобьем их на классы. Если числа состоят из одних и тех же трех цифр и отличаются только порядком, в котором они поставлены, то мы их относим к одному классу. Всякое число, таким образом, попадает только в один из классов.

Покажем теперь, что в каждый класс попадает ровно шесть чисел, и кроме того, среди них есть только одно число, цифры которого идут в убывающем порядке.

Пусть a, b, c - какие-то три разные цифры и пусть $a > b > c$. Тогда из них можно составить только шесть различных чисел: $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$, и из них только у одного числа, \overline{abc} , цифры идут в убывающем порядке. Стсюда мы можем заключить, что если N - количество чисел, у которых все три цифры разные, то количество классов, на которые мы их разбили, будет равно $N/6$. Кроме того, поскольку в каждом классе есть только одно число с убывающим порядком цифр, всего таких чисел будет столько же, сколько классов, то есть $N/6$ штук. Осталось найти N , то есть решить следующую задачу.

Вспомогательная задача 2-5а). Сколько существует трехзначных чисел с разными цифрами?

Решая задачу 2-0, мы нашли, что двузначных чисел с разными цифрами 90 штук. Приписывая спереди к каждому такому двузначному числу по одной из 8 цифр, не содержащихся в этом числе, мы, очевидно, получим все различные трехзначные числа с разными

ми цифрами.

Двузначные числа с разными цифрами		Трехзначные числа с разными цифрами
90	01	201, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901
	02	102, 301, 401, 501, 601, 701, 801, 901

	10	210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910
	12	012, 312, 412, 512, 612, 712, 812, 912

	18	018, 218, 318, 418, 518, 618, 718, 918
	19	019, 219, 319, 419, 519, 619, 719, 819

	97	097, 197, 297, 397, 497, 597, 697, 897
	98	098, 198, 298, 398, 498, 598, 698, 798

Таким образом, всего чисел с тремя разными цифрами будет

$$90 \cdot 8 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \text{ штук.}$$

Вспомогательная задача решена: мы нашли, что $N = 90 \cdot 8$; разделив N на 6, мы получим ответ задачи 2-5.

Ответ к задаче 2-5: $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел.

Контрольные задачи к § 2

Задача 2-6. Сколько существует семизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Задача 2-7. Сколько существует трехзначных чисел, у которых первая цифра больше двух других, а вторая — меньше третьей?

Сообщаем Вам сразу, что ответ в задачах 2-6 и 2-7 такой же, как и в задаче 2-5. Нужно написать убедительное объяснение, почему это так, и тогда не придется считать.

Задача 2-8. Сколько существует четырехзначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Мы советуем решить и записать решение этой задачи точно так же, как в задаче 2-5. Для этого Вам, конечно, понадобится решить следующие задачи.

Задача 2-8а) (сравните с решением задачи 2-5). Пусть a, b, c, d — какие-то четыре разных цифры. Сколько можно составить из них различных чисел?

Задача 2-8б). Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все четыре цифры разные?

При решении каждой из этих задач мы советуем идти по тому же пути, что и при нахождении числа N в решении вспомогательной задачи 2-5а).

Задача 2-9. Сколько существует шестизначных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Здесь мы тоже сразу сообщаем Вам, ответ. Он такой же, как и в задаче 2-8. Напишите доказательство этого факта, взяв себе за образец наше решение задачи 2-1.

Задача 2-10. Сколько существует K -значных чисел, цифры которых идут в убывающем порядке?

Будем считать, что все числа, меньшие 10^K , имеют K знаков. Ответ к задаче 2-10 должен быть записан в таком виде:

$$\frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ чисел при } K = 2;$$

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \text{ чисел при } K = 3;$$

? чисел при $K = 4$;

? чисел при $K = 5$;

? чисел при $K = 6$;

120 чисел при $K = 7$;

45 чисел при $K = 8$;

? чисел при $K = 9$;

1 число при $K = 10$;

0 чисел при $K = 11$;

? чисел при $K > 11$.

Задача 2-11а). Сколько существует чисел, меньших 1000, с возрастающим порядком цифр?

б) Тот же вопрос для чисел с убывающим порядком цифр.

Задача 2-12. а) Сколько существует трехзначных чисел с неубывающим порядком цифр (т.е. чисел abc , где $a \leq b \leq c$)?

б) Тот же вопрос для чисел с возрастающим порядком цифр.

Задача 2-13а). Сколько существует K -значных чисел, в записи которых нет цифры 0, а цифры идут в убывающем порядке?

б) Сколько существует K -значных чисел с возрастающим порядком цифр?

Задача 2-14. Сколько существует K -значных чисел с возрастающим порядком цифр, в записи которых участвуют только нечетные цифры?

Заклучение. При решении задачи 2-5 а) и других мы, по существу, использовали такое "правило произведения": если во множестве A всего M элементов, а во множестве B — K элементов, то всевозможных пар $(a; b)$, где a — элемент A , b — элемент B , существует $N = M \cdot K$. Более общий факт: если элементы какого-то множества C удалось разбить на K классов, A_1, \dots, A_K , причем в каждом классе M элементов, то в множестве C всего $N = M \cdot K$ элементов. Нередко бывает нужно, наоборот, зная N (число элементов) и M (число элементов в каждом классе), найти число классов: $K = N/M$.

§ 3. Геометрическое изображение задачи 2-0 и несколько задач о графах

Вернемся снова к задаче 2-0б). Оказывается, что ее можно представить себе геометрически.

Задача 3-0. На плоскости имеются 10 точек. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

Ответ в этой задаче такой же, как в задаче 2-0б), т.е. 45 отрезков. Для того, чтобы убедиться в этом, занумеруем 10 точек цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Рассмотрим теперь какой-нибудь отрезок с концами в этих точках. В концах отрезка стоят две разные цифры; поставив их в порядке возрастания, мы получим двузначное число. Таким образом, каждому отрезку будет соответствовать двузначное число с возрастающим порядком цифр.

Например, отрезку с концами в точках 2 и 3 соответствует число 23, отрезку с концами в точках 5 и 0 соответствует число 05 и так далее. При таком соответствии двум разным отрезкам соответствуют два разных числа и двум разным числам — два разных отрезка. Следовательно, между числами из задачи 2-0б) и отрезками

из задачи 3-0 установлено взаимнооднозначное соответствие. Отсюда уже можно заключить, что отрезков будет столько же, сколько двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке.

Другое решение задачи 3-0. Итак, на плоскости имеются 10 точек и нужно узнать, сколько существует отрезков с концами в этих точках. Посчитаем концы всех таких отрезков. В каждой точке сходится 9 концов, поэтому всего концов будет $10 \cdot 9$. Но у каждого отрезка 2 конца, следовательно, отрезков будет $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Задача 3-1. На плоскости имеются 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

В следующих задачах полезно переводить условие на язык точек и соединяющих дуг.

Как это сделать, Вы узнаете из решений этих задач. Постарайтесь точно так же написать решения контрольных задач.

Задача 3-2. а) Сколько диагоналей в выпуклом 11 -угольнике?

б) В тренировочном турнире участвовали 20 команд, причем между каждыми двумя командами было сыграно по одному матчу. Сколько всего было проведено матчей?

Задача 3-3. а) Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовали 11 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

б) Можно ли устроить такой тренировочный турнир, чтобы в нем участвовали 8 команд и каждая команда сыграла ровно три матча?

Задача 3-4. Докажите, что в любой компании, состоящей из 11 человек, найдутся два человека, имеющих одинаковое количество знакомых в этой компании.

Решение задачи 3-2 а). Посчитаем сначала концы всех диагоналей. В каждой вершине сходятся 8 концов диагоналей, так как вершина соединена диагоналями со всеми вершинами, за исключением ее самой и двух соседних вершин. Поскольку всего 11 вершин, то число концов $11 \cdot 8$. У каждой диагонали два конца, поэтому число диагоналей будет в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 8}{2} = 44$.

Ответ: 44 диагонали.

Решение задачи 3-2 б). Сопоставим каждой команде точку, при-

чем разным командам - разные точки. Каждому матчу между двумя командами сопоставим дугу, соединяющую две точки, соответствующие этим командам. В результате задача сводится к следующей.

Имеется 20 точек, каждые две из которых соединены одной дугой. Сколько всего проведено дуг?

Посчитаем концы всех дуг. В каждой точке сходится 19 концов, поэтому всего $20 \cdot 19$ концов.

У каждой дуги два конца. Поэтому $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ дуг.

Возвращаясь к исходной задаче, получаем

Ответ: всего было проведено 190 матчей.

Решение задачи 3-3 а). Снова сопоставим каждой команде точку, причем разным командам - разные точки. Каждые две точки соединены столько же дугами, сколько матчей сыграли соответствующие команды. В результате задача сводится к следующей.

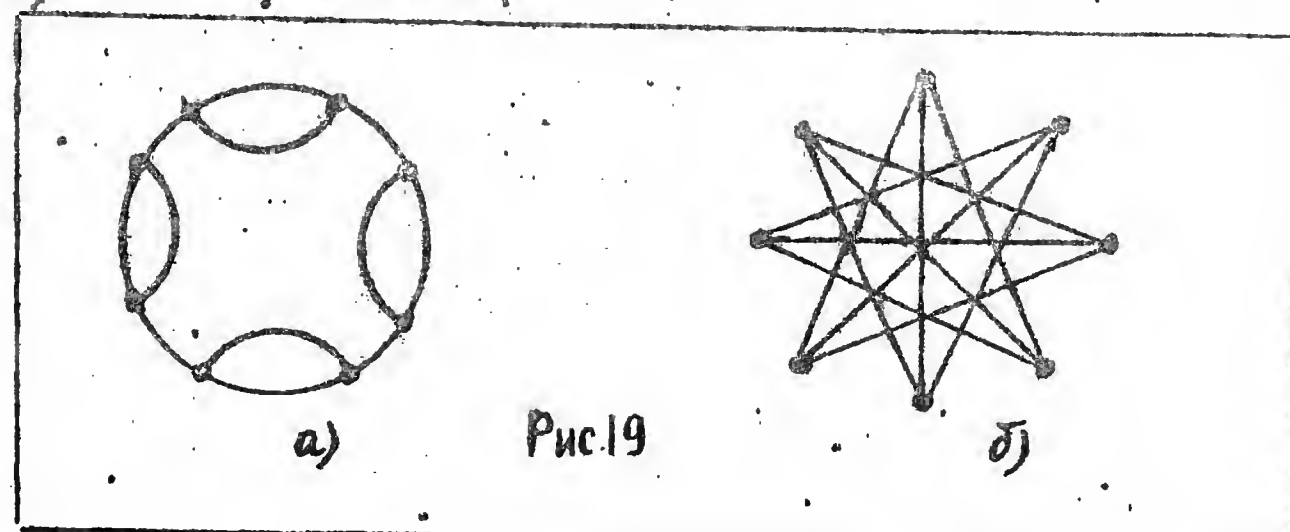
Имеется 11 точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило три дуги?

Посчитаем, какое количество дуг понадобится для этого. Как и раньше, считаем сначала концы дуг. По условию, в каждой точке должно сходиться три конца, поэтому концов должно быть $11 \cdot 3$.

Дуг должно быть в два раза меньше, то есть $\frac{11 \cdot 3}{2}$. Стоп! Мы получили не целое число дуг. Такого быть не может и, следовательно, не может быть такого соединения.

Ответ: нельзя устроить.

Решение задачи 3-3 б). Такой турнир устроить можно. Команды будем обозначать точками, а матчи - дугами. На рис. 19 приведены два разных примера соединения восьми точек дугами, удовлетворяющего условию задачи.



Решение задачи 3-4. Допустим, что есть такая компания из 11 человек, в которой у всех разное число знакомых. Сопоставим каждому человеку число его знакомых. Поскольку всего 11 человек, то каждому человеку может быть сопоставлено только одно из 11 чисел от 0 до 10. Каждым двум должны быть сопоставлены разные числа, поэтому есть человек, у которого 0 знакомых, и есть человек, у которого 10 знакомых. Человек, у которого 10 знакомых, должен быть знаком со всеми остальными, но это противоречит тому, что у одного из них нет знакомых (у того, которому сопоставлено число 0). Таким образом, наше исходное допущение неверно - нет такой компании, и, следовательно, во всякой компании из 11 человек найдутся два человека, имеющие одинаковое количество знакомых.

Контрольные задачи к § 3.

Задача 3-5. а) Сколько диагоналей у выпуклого 50-угольника?

б) Четыре футбольных команды, А, В, С и Д, провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда А участвовала в 6 матчах, команда В - в 5, С - в 7, Д - в 10. Сколько всего состоялось матчей?

в) Три футбольных команды, А, В и С, провели друг с другом несколько тренировочных матчей. Известно, что команда А участвовала в 6 матчах, команда В - в 7 матчах, а команда С - в 11 матчах. Сколько матчей сыграли друг с другом команды А и С?

Задача 3-6. Можно ли устроить такой турнир, чтобы в нем:

а) участвовало 13 команд и каждая команда сыграла ровно 5 матчей;

б) участвовало 10 команд и каждая команда сыграла бы ровно 5 матчей;

в) участвовало 9 команд и каждая команда сыграла бы 4 матча?

Задача 3-7. а) В некоторой компании каждые двое незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а каждые двое знакомых не имеют общих знакомых. Докажите, что в этой компании у каждого человека одинаковое число знакомых.

б) Попробуйте изобразить с помощью точек и соединяющих их дуг такую компанию, которая удовлетворяла бы условиям задачи 3-7а), в которой 16 человек и каждый имеет ровно 5 знакомых.

Задача 3-8. На окружности выбраны 10 точек. Сколько существует выпуклых:

а) четырехугольников; б) пятиугольников; в) восьмиугольников с вершинами в этих точках?

Замечание к задачам 3-5 б) и в). Некоторые ученики записывают решение этих задач так: приводят ответ и "граф", на котором показано, какие команды играли друг с другом и - сколько матчей. Но такое "доказательство" здесь недостаточно: а вдруг из другого рисунка получится другой ответ? Так и получается, если решать этим способом такую, например, задачу.

Задача 3-5 г). Четыре футбольных команды: *A*, *B*, *C* и *D* провели друг с другом 10 тренировочных матчей. Известно, что команда *A* участвовала в 7 матчах, команда *B* - в 8. Сколько матчей сыграли друг с другом команды *C* и *D*?

Решение. Обозначим команды точками, а матчи между ними - соединяющими эти точки дугами.

Возможна картинка 20а, тогда

Отгад: команды *C* и *D* сыграли друг с другом 2 матча.

Однако условию задачи полностью удовлетворяет и ситуация, изображенная на рис. 20 б). Получаем (для той же задачи!) другой

ответ: команды *C* и *D* не сыграли между собой ни одного матча.

Возможен еще третий (тоже правильный) ответ на вопрос этой задачи. Подумайте сами, какой еще случай возможен.

Вы теперь видите, что для решения задач 3-5 б) и 3-5 в) недостаточно только нарисовать соответствующие графы; нужно провести рассуждение, доказывающее, что

ответ может быть только таким. Например, можно записать краткое решение задачи 3-5 г) в таком виде:

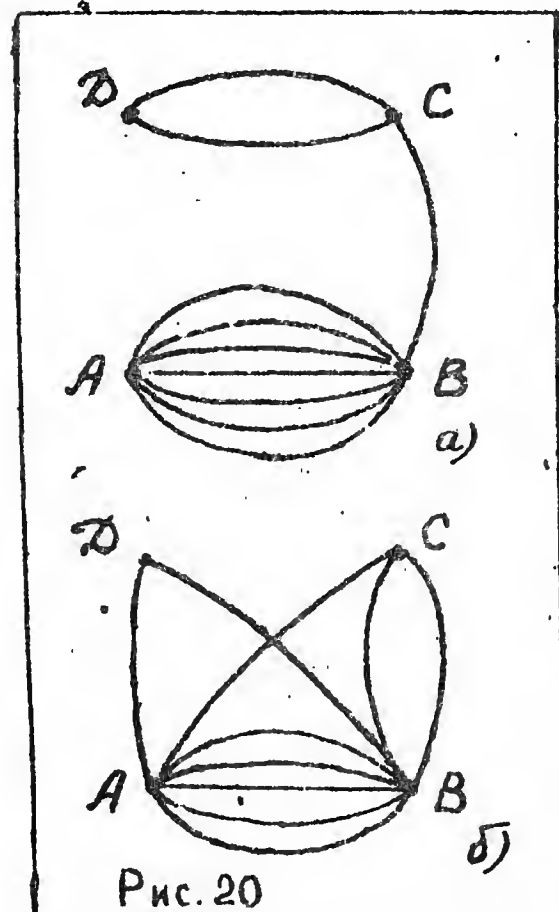


Рис. 20

Обозначим число матчей, сыгранных командами *X* и *Y*, через n_{xy} . По условию,

$$\begin{cases} n_{AB} + n_{AC} + n_{AD} + n_{BC} + n_{BD} + n_{CD} = 10, \\ n_{AB} + n_{BC} + n_{BD} = 8, \end{cases}$$

поэтому $n_{CD} \leq n_{CD} + n_{AD} + n_{AC} = 2$,

то есть n_{CD} может равняться только 0, 1 или 2. Примеры (см. рис. 20 а, б и тот третий, который Вы должны были найти самостоятельно), показывают, что все эти случаи возможны".

Замечание к задаче 3-6. Если в задаче спрашивается "можно ли" или "всегда ли найдется", то возможны два ответа: "да" или "нет". Если Ваш ответ "нельзя" или "всегда найдется", то Вы должны привести полное доказательство, учитывающее все возможные случаи. Если Ваш ответ "можно" (в каком-нибудь случае) или "не всегда", то достаточно привести соответственно подтверждающий или опровергающий пример.

Указание к задаче 3-7 а). Пусть *A* и *B* знакомы. Обозначим через M_A множество знакомых *A*, через M_B - множество знакомых *B*. Докажите, что:

- 1) M_A и M_B не имеют общих знакомых;
- 2) каждый из M_A имеет ровно одного знакомого в M_B ;
- 3) каждый из M_B имеет ровно одного знакомого в M_A .

Отсюда следует, что между M_A и M_B можно установить взаимнооднозначное соответствие.

Указание к задаче 3-8. Каждое множество из *K* точек на окружности служит множеством вершин одного выпуклого *K*-угольника. Если занумеровать точки так, как это сделано в первом решении задачи 3-0, то каждому такому подмножеству можно сопоставить (взаимнооднозначным образом) *K*-значное число с убывающим порядком цифр.

Заключение. Изображение условия задач с помощью точек и соединяющих их дуг очень часто помогает при решении задач (так же, как наглядное изображение множеств в виде "кругов" пригодились нам в § I). Система точек и соединяющих их дуг в математике получила специальное название: граф. С помощью графа можно изобразить ситуацию такого типа: задано некоторое множество *A* и в нем - некоторое подмножество, состоящее из двух элементов каждое

(множество команд — и пары команд, сыгравших между собой; множество людей — и пара знакомых; множество вершин многоугольника — и пары вершин, соединенных диагоналями, и т.д.).

В решении задач 2-0 а) и 3-0 мы подсчитали число различных подмножеств из двух элементов в множестве A .., состоящем из 10 цифр: 0, 1, 2, ..., 9; это число равно 45. В задаче 2-10 — основной задаче § 2 — мы по существу посчитали количество различных подмножеств из K элементов в этом множестве. В следующем параграфе мы увидим, что эти же числа возникают во многих естественных задачах на подсчет различных вариантов.

Приложение к § 3.

Несколько лет назад две трети всех учащихся I курса ошиблись при решении задач 3-6 б) и 3-6 в). Приведем неверное решение задачи 3-6 б) одной ученицы (назовем её Ниной).

"задача 3-6 б) сводится к такой:

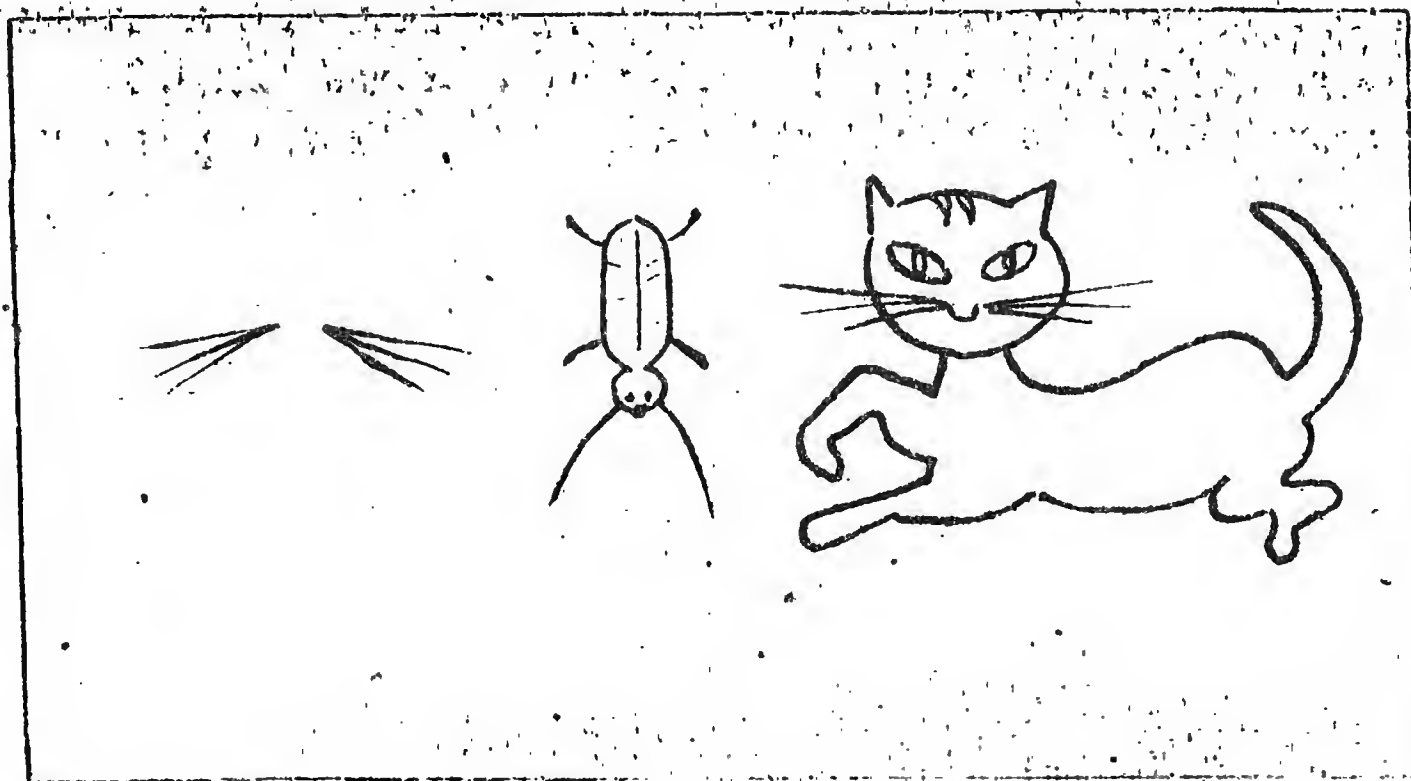
имеется 10 точек. Можно ли соединить их дугами так, чтобы из каждой точки выходило 5 дуг?

Дуг должно быть $\frac{10 \cdot 5}{2} = 25$. Получено целое число дуг — значит можно".

Возразим Нине образно так:

если есть таракан — то есть усы. Но если есть усы, то это еще не значит, что есть таракан.

В этой задаче нужно привести пример: нарисовать нужное соединение.



§ 4. Произведения, суммы, расстановки цифр

Задача 4-1. В выражении $(a+b)^{10}$ проведем возведение в степень и приведем подобные члены. Какие коэффициенты будут стоять при $a^{10}, a^9b, a^8b^2, a^7b^3, a^6b^4, \dots$?

Указание. $(a+b)^{10}$ — это произведение десяти сомножителей $a+b$. Занумеруем их по порядку так:

$$(a+b)(a+b)(a+b) \dots (a+b)(a+b)$$

Если из каждой скобки взять букву a , то при умножении мы получим член a^{10} .

Очевидно, что член a^9b получается, когда из одной скобки мы берем букву b , а из остальных — букву a . Поскольку у нас всего десять скобок, то после перемножения мы получим 10 слагаемых вида a^9b .

Посчитаем теперь, сколько раз получится член a^8b^2 (это и будет коэффициентом при a^8b^2). Чтобы в произведении получилось восемь раз a и два раза b , нужно из каких-то двух скобок взять букву b , а из остальных — букву a . Запишем номера тех двух скобок, из которых мы выбираем букву b . Получится двузначное число, цифры которого идут в порядке возрастания: (например, если мы взяли букву b из 0-ой и 8-й скобок, то пишем 08). Таким образом, одночлен a^8b^2 при умножении встретится столько раз, сколько существует двузначных чисел, цифры которых идут в возрастающем порядке, т.е. 45 раз (см. § 2), и поэтому коэффициент при a^8b^2 равен 45. Итак,

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9b + 45a^8b^2 + 120a^7b^3 + \dots \quad (*)$$

Продолжите наши рассуждения и укажите ответ.

Задача 4-1. а) Чему равна сумма всех коэффициентов $(1 + 10 + 45 + \dots + 10 + 1)$ в предыдущей задаче?

б) Чему равна сумма коэффициентов при членах с четными степенями a и b :

$$(1 + 45 + \dots + 1) ?$$

Указание. Подставьте в равенство (*) $a=b=1$ и затем $a=1, b=-1$.

Задача 4-2. а) Сколько всего клеток в фигуре, изображенной на рисунке 21?

Diagram illustrating a sequence of numbers 0 through 9 and their corresponding Z values (Z_0 through Z_9) arranged in a staircase pattern on a 10x10 grid. The numbers 0 through 9 are placed in the first row, and the Z values are placed in the first column. The grid is divided into two main sections by a diagonal line.

0	1	2							Z_0
		3							Z_1
		4	5	6	7			Z_2	
					8		Z_3		
					Z_4				
				Z_5					
			Z_6						
		Z_7							
	Z_8								
Z_9									

Рис. 21

цепочек 0 I ... 9, ок

Рис. 21

цепочек $0 \leq i \leq 9$, оканчивающихся в $Z_0 - i$;

— " — " — " — " — " — В З₁ - 9;

— " — " — " — " — " — B Z₂ -36 ;

Нужно только обосновать, почему ответ именно такой — тогда не придется считать.

Прежде чем формулировать следующую задачу, введем одно определение. Назовем разбиением целого положительного числа представление его в виде суммы целых положительных чисел.

Вот, например, все разбиения числа 4:

4, 3 + 1, 1 + 3, 2 + 2, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1.

Как видно из этого примера, мы считаем разбиения разными, если они отличаются либо числами — слагаемыми, либо порядком, в каком эти числа расположены, либо и тем, и другим. Решим теперь такую задачу.

Задача 4-3. Сколько существует разных разбиений числа 11 на 4 слагаемых?

Решение задачи 4-3. Представим себе число II в виде II точек, расположенных в ряд.

Тогда всякое разбиение этого числа на 4 слагаемых можно отметить тремя черточками. Например, разбиение $11 = 5+3+2+1$ можно представить себе так:

Первой черточкой мы отсекли 5 точек, второй черточкой мы отсекли еще 3 точки, третьей — следующие 2 точки, после чего осталась одна точка.

6) Сколькими способами можно поместить цепочку цифр $0\ 1\ 2\ \dots\ 9$ в эту таблицу так, чтобы каждые две соседние цифры помещались в клетках, имеющих общую сторону, цифра 0 стояла в верхней левой клетке, а цифра 9 — в клетке Z_K ($K = 0, 1, 2, \dots, 9$)?

Указание. Ответ в задаче б) такой же, как в задаче 2-І3а):

Легко видеть, что и наоборот, расставив каким-нибудь способом 3 черточки между точками, мы зададим разбиение числа II на 4 слагаемых. Например, разбиению черточками

соответствует такое разбиение: $II = 3+4+2+2$.

Таким образом, мы видим, что задача 4-3 сводится к следующей задаче.

Вспомогательная задача 4-3 а). Имеются II точек, расположенных в ряд. Сколькими способами можно расставить между ними 3 черточки?

Покажем, что эти задачи сводятся к задаче 2-5 из § 2.

В самом деле, поставим между точками цифры

• 0•1•2•3•4•5•6•7•8•9 •

Поставив три черточки, мы отмечаем трехзначное число, цифры которого идут в возрастающем порядке, количество таких чисел равно $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$. Ответ к задаче 4-3: 120 разбиений.

Задача 4-4. Сколькими способами можно разбить число 11 на $(K+1)$ слагаемых (где $K = 0, 1, 2, \dots, 9$)?

Указание. Ответ нужно записать так же, как в задаче 2-10, а обосновать - так же, как в задаче 4-3.

Задача 4-5. (а) Сколько всего существует выпуклых многоуголь-
ников с вершинами в некоторых из 10 данных точек на окружности?
(Отрезок или одна точка многоугольником не считается.)

б) Сколько всего существует чисел с убывающим порядком цифр (включая однозначные числа: 0, 1, 2, ..., 9)?

в) Сколько всего существует подмножеств у множества A из 10 элементов $0, 1, 2, \dots, 9$ (все множество A , а также "пустое" множество также считаются подмножествами A).

Указание. В задачах б) и в) ответ такой же, как в задаче 4-1а). Нужно только это обосновать.

Задача 4-6. Из десяти цифр: 0, 1, 2, ..., 9, выбираются 3 цифры и расставляются по кругу. Сколькими способами это можно сделать? (Два способа, отличающиеся только поворотом круга — скажем, такие, как изображены на рисунках 22 а), б), в) — считаются одинаковыми).

Первое решение задачи 4-6. Сначала найдем, сколько способов расставить три разные цифры из десяти в трех кружках (способы,

изображенные на рисунках 22 а) и б), пока считаем разными). Таких способов будет, конечно, столько же, сколько трехзначных чисел с различными цифрами (они могут начинаться и с нуля), то есть $10 \cdot 9 \cdot 8$. Но так как каждую расстановку цифр по кругу мы посчитали три раза, то расставить три цифры по кругу можно $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3} = 240$ способами.

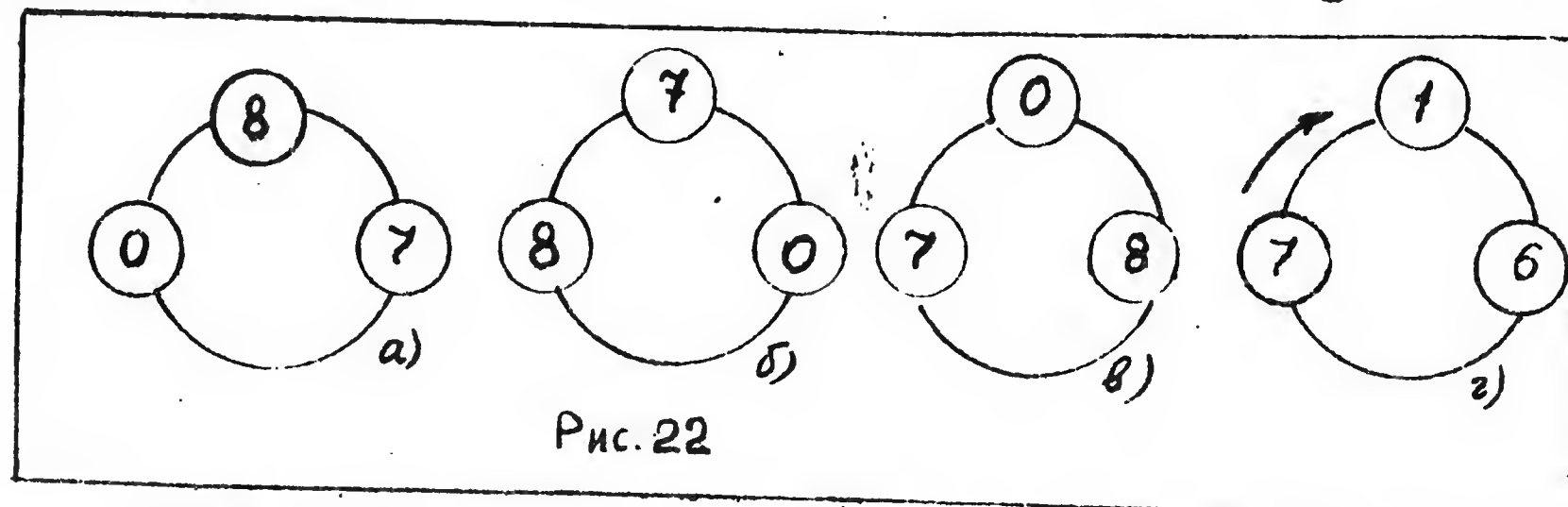


Рис. 22

Второе решение задачи 4-6. Здесь мы сразу будем считать такие расстановки, как на рис. 22 а), б), в), одинаковыми, не различать их. Поставим каждой расстановке в соответствие трехзначное число следующим образом: сначала запишем наибольшую цифру, а затем по порядку те цифры, которые идут за ней по часовой стрелке. Например, расстановке, изображенной на рис. 22 а), б), в) соответствует число 870, а расстановке на рис. 22 г) - 716. Ясно, что мы получим взаимнооднозначное соответствие между такими расстановками и трехзначными числами, у которых первая цифра - самая большая и все цифры различны. Сколько же существует таких чисел? Очевидно, что наибольшая первая цифра не меньше 2, и с двойки начинается два числа: 210 и 201. Чисел с первой цифрой 3 будет 3·2 (столько же, сколько двузначных чисел с различными цифрами можно составить из цифр 0, 1 и 2). Чисел с первой цифрой 4 будет 4·3, и так далее. Чисел с первой цифрой 9 будет 9·8 (столько можно составить двузначных чисел с различными цифрами из 9 цифр 0, 1, ..., 8). Итак, всего трехзначных чисел с разными цифрами, у которых первая цифра - самая большая, существует $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 8 \cdot 9$.

Итак, решая задачу, мы заодно выяснили, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 8 \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3}$.

Подчеркнем еще раз основную идею, которую мы использовали в первом решении: мы объединили в один класс все трехзначные числа с разными цифрами, полученные перестановкой цифр "по кругу"

(870, 708 и 087), и должны были посчитать число таких классов. Для этого общее количество чисел ($10 \cdot 9 \cdot 8$) мы разделили на количество чисел, попавших в один класс (на 3).

Во втором решении мы выбрали по одному "представителю" в каждом классе (числу с наибольшей первой цифрой) и посчитали число таких "представителей".

Приблизительно те же идеи мы использовали в решениях первых задач в § 2.

Задача 4-7. Найдите суммы:

а) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 7 \cdot 8 \cdot 9$;

б) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$.

в) Сколькими способами можно расставить пять цифр по кругу (две расстановки, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми)?

Задача 4-8. Сколько существует K - значных чисел, у которых все цифры разные и первая цифра - самая большая ($K = 1, 2, \dots, 9$)?

Указание к задаче 4-8. При $K = 1$ нужно взять все 10 однозначных чисел: 0, 1, ..., 9. При $K = 2$ - все числа с убывающим порядком цифр (см. задачу 2-0); при $K = 3$, как мы убедились в решении задачи 4-6, нужных чисел $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3} = 240$.

Ответ: $K = 1$ - 10; $K = 2$ - 45;
 $K = 3$ - 240; $K = 4$ - ?

Задача 4-9. Сколько существует K - значных чисел с невозрастающим порядком цифр?

Указание к задаче 4-9. Для $K = 2$ мы эту задачу решили в § 2 (задача 2-0). Для $K = 3$ можно рассуждать так.

Поставим три точки, разобьем их черточками на группы (как в решении задачи 4-3), а затем в каждой группе напомним какую-то одну цифру, причем в следующей группе - меньшую цифру, чем в предыдущей. Если группы одна, то во всех трех точках напомним одну и ту же цифру - получим 10 чисел

$\begin{array}{ccc} \dots & \rightarrow & 000 \\ & & 111 \\ & & \vdots \\ & & 999 \end{array}$

Если группы две (разбить 3 на две группы можно 2 способами), то в

них можно написать цифры любого двузначного числа с убывающим порядком цифр (всего таких чисел 45),

...	110	100
...	220 или 200	...
...
...	998	988

Так мы получим еще $2 \cdot 45 = 90$ чисел. Наконец, если разбить 3 на 3 группы и в каждой написать по цифре, то получим еще $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ чисел с убывающим порядком цифр

...	321
...	...
...	987

Итак, всего при $K = 3$ получается $10 + 90 + 120 = 220$ чисел. Продолжите наши рассуждения и напишите

Ответ:	$K = 1$	=	10,
	$K = 2$	=	45,
	$K = 3$	=	220,
		

Заключение.

В § 2-4, мы, в основном, имели дело с примерами, когда "основное множество", из которого черпали элементы и их комбинации, состояло из цифр, то есть содержало 10 элементов. Конечно, аналогичные задачи можно решать и для множества из любого числа элементов (и кое-где мы с этим уже сталкивались):

Скажем, найти число разбиений числа n на K слагаемых, или число расстановок n чисел (от 1 до n) по кругу, или коэффициенты разложения $(a+b)^n$ в сумму членов $a^k b^{n-k}$, или сумму чисел

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots K + 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (K+1) + \dots + (n-K+1)(n-K+2) \dots n$$

Во многих более общих задачах принципы рассуждения и даже вид формул, участвующих в ответе те же самые, что и в задачах, которые мы рассмотрели. Некоторые подобные задачи встретятся Вам и в § 5.

Часто встречающиеся в комбинаторике и других областях математики числа имеют специальные названия и обозначения.

1) Произведение всех натуральных чисел от 1 до некоторого m , то есть число $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ обозначается через $m!$ (читается "m-факториал") или через P_m и называется числом перестановок из m элементов. При этом по определению считают, что $0! = 1! = 1$.

2) Произведение m натуральных чисел, идущих подряд в порядке убывания, начиная с некоторого n , то есть число

$$n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) \quad (m \text{ сомножителей})$$

обозначается через A_n^m и называется числом размещений из n по m . При этом $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$.

3) Отношение двух указанных выше произведений, то есть число $\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$

обозначается через C_n^m или через $\binom{n}{m}$ и называется биномиальным коэффициентом или числом сочетаний из n по m . При этом

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{A_n^m}{P_n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Дальнейшее знакомство с комбинаторикой и ее приложениями (в частности, к теории вероятностей) Вы можете продолжить, например, по книгам:

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М.: Физматлит, 1969.
2. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. - М.: Наука, 1979. (Серия "Популярные лекции по математике").
3. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. - М.: Наука, 1982. (Серия "Библиотечка "Квант").
4. Холт М. Комбинаторика. - М.: Мир, 1970.

§ 5. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

В §§ I - 4 мы познакомились с несколькими приемами решения комбинаторных задач. Мы не раз убеждались в том, насколько важно уточнить формулировку задачи, перевести ее на тот язык, на котором удобно ее решать и писать решение.

Следующие задачи лишь частично связаны с предыдущими - к каждой из них требуется свой подход. К некоторым задачам приведены указания, но вы можете, разумеется, идти своим путем.

Задача 5-1. Сколькими способами можно распределить два билета в театр среди четырех людей?

Уточнение. Заметим, что вопрос поставлен неточно. В самом деле, неясно:

а) может ли один человек получить оба билета (пойти в театр с женой);

б) считаем ли мы оба билета одинаковыми или нет (может быть это билеты на соседние места, а может быть, один - в партер, а другой - на балкон)?

На каждый из этих вопросов можно ответить и так, и этак. От этого будет зависеть результат задачи. Поэтому рассмотрите разные случаи и приведите соответствующие ответы.

Задача 5-2. Элементами множеств A , B и C служат числа 1, 2, 3, 4, ..., 9. Известно следующее:

$$A \cap B = \{1; 2\}; A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}; \\ B \cap C = \{3; 7\}; A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}.$$

Найдите множества A , B и C .

Ответ: $A = \{1; 2\}; B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}; C = \{3, 4, 5, 7, 9\}$.

Решение. В этой задаче можно рассуждать о каждом числе отдельно, фактически решая 9 независимых задач.

1) Начнем с числа 1. Поскольку 1 принадлежит пересечению A и B , то 1 принадлежит обоим множествам, A и B . Если бы 1 принадлежала еще и C , то 1 принадлежала бы пересечению B и C , а это не так. Значит, 1 не принадлежит C .

2) Число 2 входит ровно в те же множества, что и 1. Поэтому для 2 проходит то же рассуждение.

3) Число 3 входит в $B \cap C$, поэтому 3 входит и в B , и в C .

Но 3 не входит в $A \cap B$, поэтому 3 не входит в A .

4) Число 4 не входит в $A \cup B$, поэтому оно не входит ни в A , ни в B . Но оно входит в $B \cap C$, поэтому оно входит только в C .

5) Для 5, 6, 8, 9 те же рассуждения, что и для 4.

6) Для 7 те же рассуждения, что и для 3.

Замечание. Если Вы хорошо разобрались в приведенном решении, Вам легко будет понять, что решение можно записать и гораздо короче.

1) Так как множества $A \cap B$ и $B \cap C$ не имеют общих элементов, то нет такого элемента, который принадлежал бы одновременно всем трем множествам, A , B и C . Отсюда следует, что числа 1, 2 принадлежат и A , и B , но не принадлежат C , а числа 3 и 7 принадлежат и B , и C , но не принадлежат A .

2) Если элемент не принадлежит $K \cup Z$, то он не принадлежит ни K , ни Z , а если он одновременно принадлежит $K \cup M$, то он принадлежит M . Отсюда следует, что числа 6 и 8 принадлежат B , но не принадлежат ни A , ни C , а числа 4, 5, 9 принадлежат C , но не принадлежат ни A , ни B .

Задача 5-3. Какие из чисел 1, 2, 3, ..., 9 входят в множества A , B , C , D , если известно следующее:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}; A \cap C = \{8\}; A \cup D = \{1, 2, 5, 7, 8, 9\}; \\ A \cap D = \{2, 5, 9\}; B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; B \cap C = \{6\}?$$

Задача 5-4. Четыре девочки: Катя, Лена, Маша и Нина - участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен - больше, чем все остальные, а Лена - 5 песен - меньше, чем все остальные. Сколько песен было спето?

Ответ: 9 песен.

Решение. Вособразим, что каждой девочке за исполнение каждой песни давали фантик. Тогда Катя получила 8 фантиков, а Лена - 5 фантиков. Маша получила 6 или 7 фантиков, Нина - тоже. Все вместе получили не меньше, чем $5 + 6 + 6 + 8 = 25$ и не больше, чем $5 + 7 + 7 + 8 = 27$ фантиков. За каждую песню раздавали по три фантика. Значит, чтобы получить число песен, надо общее число фантиков разделить на три. Но из трех возможных значений для числа фантиков - 25, 26, 27 - только 27 делится на три. Полу-

чается при этом 9. Конкретное "расписание" отдыха девочек может быть любым, лишь бы Катя отдыхала 1 раз, Лена - 4 раза, а Маша и Нина - по 2 раза.

Задача 5-5. Пятеро друзей: Витя, Нина, Лариса, Коля и Поля, играли в прятки. Игра проходила в несколько туров. Каждый тур начинался с того, что четверо друзей прятались в разные места, а пятый их искал - "водил". Как только водящий находил кого-то из спрятавшихся друзей, тур кончался. В следующем туре водил тот, кого нашли в предыдущем. Сколько раз водил Коля, если он больше всех - 11 раз - не был водящим, а меньше всех - 8 раз - не была водящей Нина?

Задача 5-6 а). Имеются 6 точек. Каждая пара из них соединена либо синей дугой, либо красной. Всегда ли можно выбрать из этих точек такие три, что все дуги, соединяющие их друг с другом, будут одного цвета?

б) Тот же вопрос для 5 точек.

Задача 5-7. Пусть каждая пара из 6 точек соединена красной или синей дугой. Всегда ли можно найти два треугольника, образованные дугами одного цвета (разрешается, чтобы эти два треугольника имели общую дугу)?

Задача 5-8. В компании из 6 человек некоторые знакомы друг с другом. Докажите, что в этой компании либо 3 незнакомых друг с другом человека, либо попарно знакомых.

Задача 5-9. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (в нем 33 буквы) и четырех цифр. Сколько существует различных номеров автомашин?

Задача 5-10. На рояле - 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

Задача 5-11. Сколькими шестизначных чисел делится на 5?

Задача 5-12. Сколькими способами можно разложить 7 разных монет в три кармана?

Задача 5-13. Сколько можно составить пятизначных чисел, в десятичной записи которых хотя бы один раз встречается цифра 5?

Задача 5-14. Сколькими способами можно усадить 20 человек за круглым столом, считая способы одинаковыми, если их можно получить один из другого движением по кругу?

Задача 5-15. Сколько есть пятизначных чисел, делящихся на 5, в записи которых нет одинаковых цифр?

Задача 5-16. На клетчатой бумаге со стороной клетки 1 см. нарисована окружность радиуса 100 см, не проходящая через вершины клеток и не касающаяся сторон клеток. Сколько клеток может пересекать эта окружность?

Задача 5-17. Сколькими способами можно расставить в ряд числа 1, 2, 3, ..., n так, чтобы числа 1, 2, 3 попали рядом и при этом шли в порядке возрастания?

Задача 5-18 а). Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 5, 7, 8, если каждую из них можно использовать любое число раз?

б) Тот же вопрос, но с условием, что каждую цифру можно использовать не более одного раза.

Задача 5-19. Каждая из вершин шестиугольника раскрашивается в один из трех цветов так, чтобы две соседние вершины не оказались раскрашенными в один цвет. Сколько есть способов такой раскраски?

Задача 5-20. Сколькими способами можно составить ожерелье из 6 бусинок, из которых 2 черных, а 4 - зеленых (ожерелья, получающиеся передвижением бусинок по кругу, считаются одинаковыми)?

Задача 5-21. Мама каждый день выдает сыну на десерт по одному фрукту. У нее есть три одинаковых яблока, 5 одинаковых груш, 2 одинаковых персика и 1 апельсин. Сколькими способами она может ему выдать эти фрукты в течение 11 дней?

Задача 5-22. Сколькими способами 20 одинаковых монет можно разложить в три кармана, так, чтобы в каждом лежало не менее двух монет?

Задача 5-23. Из слова ROT перестановками букв можно получить еще такие слова: TOR, OPT, OTR, TPO, PTO. Их называют анаграммами. Сколько анаграмм можно составить из слов:

а) ЛОГАРИФМ ; б) РЕЕСТР ?

Задача 5-24. Из троих людей одному надо сделать неприятную работу. Его выбирают "морским счетом" - каждый показывает какое-либо число пальцев от одного до пяти, находится сумма показанных трех чисел и затем считают, начиная с одного из участников, подряд от 1 до того числа, которое получилось в сумме. Докажите, что не все положения участников равноправны. Каким быть выгоднее: тем, с кого начинается счет, вторым или третьим?

Наметим решение задачи 3-7 а) и б) способом, отличным от данного в указании на стр. 25.

Пусть для каждого человека A через M_A обозначается множество его знакомых, через N_A - множество не знакомых с A . Тогда каждому элементу из N_A можно поставить в соответствие пару элементов из M_A (тех, с кем он знаком), и нетрудно доказать, что это соответствие между множеством N_A и множеством всевозможных пар элементов M_A будет взаимнооднозначным. Следовательно, если в M_A содержится m_A элементов, то в N_A их $\frac{m_A(m_A-1)}{2}$, а всего в компании $n = 1 + m_A + \frac{m_A(m_A-1)}{2}$ людей. Это равенство верно

для любого человека A . Но уравнение $n = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}$ имеет (при $n > 1$) только один положительный корень, следовательно, m_A одно и то же для всех A (аналогичное решение разобрано в книге А. Лемана "Сборник задач московских математических олимпиад", задача XXIII, II, 10, 3) - Москва, изд. "Просвещение", 1965 г.).

Интересно выяснить, при каких n такие компании действительно существуют. Полного ответа на этот вопрос мы не знаем. Мы видели, что $n = \frac{m(m+1)}{2} + 1$, где m - количество знакомых одного человека, но не при любом n существует нужная компания. Например, нетрудно доказать, что таких компаний не существует при $m=3$, $m=4$ и вообще при $m=4k+3$. Кроме очевидных примеров таких компаний - для $m=1$, $n=2$ и $m=2$, $n=4$ - мы знаем только один: $m=5$, $n=16$.

Эту конфигурацию из 16 точек и 40 отрезков можно описать так: множество вершин, ребер и больших диагоналей четырехмерного куба^{*}. Изобразить данную конфигурацию с помощью точек и соеди-

^{*} О четырехмерном кубе см., например, в книге "Метод координат" И. М. Гельфанда, Е. Г. Глазголевой, и А. А. Кириллова, М., изд. "Наука", 1965 г.

няющих их дуг - это и значит решить задачу 3-7 б).

Построить эту схему можно следующим образом. Возьмем 16 точек и разобьем их на 4 группы по 4 точки в каждой; точку занумеруем парой индексов $(a; b)$, где a - номер группы, b - номер точки в группе; a и b могут принимать значения 1, 2, 3, 4. Будем проводить дуги так:

1) в каждой группе соединим первую точку со второй, вторую - с третьей, третью - с четвертой, четвертую - с первой;

2) соединим теперь точки: $(1,1)-(2,2)-(3,3)-(4,4)-(1,1)$
 $(1,4)-(2,1)-(3,2)-(4,3)-(1,4)$
 $(1,3)-(2,4)-(3,1)-(4,2)-(1,3)$
 $(1,2)-(2,3)-(3,4)-(4,1)-(1,2);$

3) наконец, соединим каждую точку с индексом $(1, b)$ с соответствующей точкой $(3, b)$ и каждую точку $(2, b)$ с соответствующей точкой $(4, b)$.

Полученная схема, как легко проверить, удовлетворяет условию задачи (см. рис. 23).

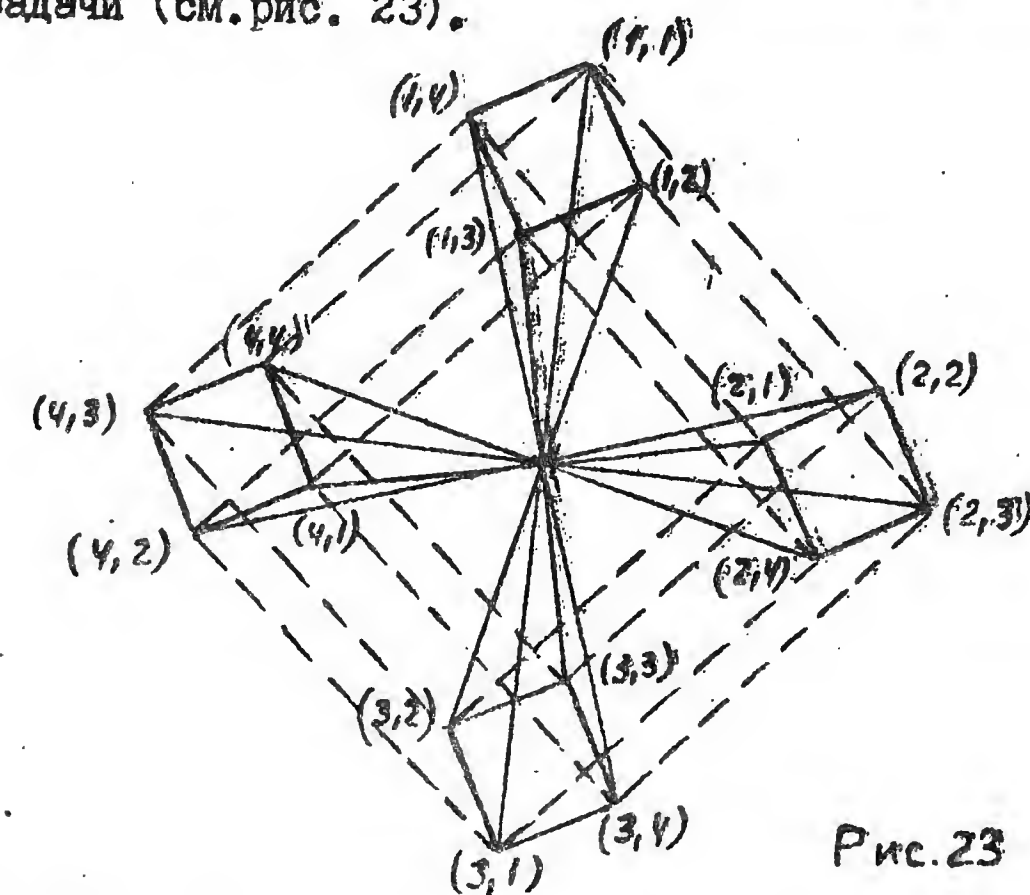


Рис. 23

Задача 5-25 (Н. Бурбаки). В множестве E , состоящем из m элементов, выделены n различных подмножеств (отличных от самого E) так, что для любых двух элементов из E найдется ровно одно из данных подмножеств, в которое входят оба эти элемента.

а) Докажите, что $m \geq n$.

б) В каких случаях возможно равенство $m=n$ (это пока никому не известно)?

Контрольные задания

Задание №

Внимательно, с карандашом в руке, разберитесь в идеях, решениях задач и комментариях к ним в § 1, 2, а также в решении задачи № 5-2 из § 5. Для решения дополнительной задачи № 5-5 полезно разобратся в решении задачи № 5-4.

Обязательные задачи

1. № 1-1 г)	2. № 1-3 а)	3. № 1-3 б)
4. № 1-3 в)	7. № 1-5	10. № 2-7
5. № 1-3 г)	8. № 1-7 а)	11. № 2-8
6. № 1-3 д)	9. № 2-6	12. № 5-3

Дополнительные задачи

13. № 1-14 б)	15. № 2-13 а)	17. № 5-1
14. № 1-14 в)	16. № 2-14	18. № 5-5

Срок присылки задания №

Задание №

Разберите остальной материал. Если Вы хотите решать дополнительные задачи, разберите решения задач, приведенные в §§ 4 и 5.

Обязательные задачи

1. № 3-5 а)	5. № 3-6 б)	9. № 4-4
2. № 3-5 б)	6. № 3-6 в)	10. № 4-5 а)
3. № 3-5 в)	7. № 3-8 а)	11. № 4-7 а)
4. № 3-6 а)	8. № 4-1 а)	12. № 5-11.

Дополнительные задачи

13. № 4-2 б)	15. № 5-6 б)	17. № 5-18 б)
14. № 5-6 а)	16. № 5-18 а)	18. № 5-23 б).

Срок присылки задания №

Критерии оценок

В таблице указано, сколько задач достаточно решить для получения соответствующей оценки по каждому заданию.

№	Обязательные задачи			Дополнительные задачи	
	зачет	4	5	4	5
	6 - 7	8 - 10	11 - 12	3 - 4	5 - 6

2 курс 89/90 летки

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

С.М.Львовский, А.Л.Тоом

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Методические разработки

для учащихся ВЗМШ

Пособие для решения по задаче
по теме, тему абстракт харт
научить среднего ученика

Москва - 1987

УДК 37.018.43

Комплексные числа: Методич. разработки для учащихся ВЭМШ
АИИ СССР при МГУ (С.М. Львовский, А.Л. Тоом - М., Изд. АИИ СССР,
64 с.).

Разработки предназначены для учащихся Всесоюзной заочной
математической школы АИИ СССР при Московском государственном
университете им. М.В. Ломоносова (ВЭМШ).

В пособии содержится теоретический материал по теме
"Комплексные числа" (включая и нетрадиционные для школы вопро-
сы) и большой набор разных по трудности задач. Часть задач
снабжена указаниями. Имеются контрольные задания для учащихся
ВЭМШ.

Рецензент - Н.Б. Васильев, кандидат физико-математических
наук.

© Академия педагогических наук СССР (АИИ СССР), 1987 г.

- 3 -

С о д е р ж а н и е

Введение	4
Часть I. Действия с комплексными числами	6
§ 1. Комплексная плоскость	6
§ 2. Комплексные числа как векторы на плоскости	9
§ 3. Умножение	11
§ 4. Сопряженные числа	13
§ 5. Деление	13
§ 6. Модуль	15
§ 7. Аргумент	17
§ 8. Тригонометрическая форма комплексного числа	20
§ 9. Задачи на повторение части I	22
Часть II. Функции и отображения	24
§ 10. Простейшие функции	24
§ 11. Композиции преобразований	26
§ 12. Отображение $z \mapsto z^{-1}$	27
§ 13. Отображение $z \mapsto z^2$	30
§ 14. Корни из комплексных чисел	31
§ 15. Корни из единицы	34
§ 16. Задачи на повторение части II	36
Часть III. Многочлены и их корни	38
§ 17. Квадратные уравнения	38
* § 18. Шама с собачкой	39
§ 19. Деление многочленов и теорема Безу	43
§ 20. Разложение многочленов на множители	45
§ 21. Задачи на повторение части III	47
* Часть IV. На пути к ТФП	49
§ 22. Введение	49
§ 23. Производная	49
§ 24. Пример отсутствия производной	51
§ 25. В чем же дело?	52
§ 26. Экспонента (показательная функция)	53
§ 27. Производная экспоненты	54
§ 28. Тригонометрические функции	55
§ 29. Логарифм	57
Указания и ответы к некоторым задачам	58
Контрольные задания и критерии оценок	63

Введение.

Эта брошюра примыкает к заданию ВЗМШ по теме "Метод координат". В ней рассказано об очень красивой и важной математической теории - теории комплексных чисел. Эта теория тесно связана и с алгеброй, и с геометрией, и с математическим анализом. Надеемся, что работа над этой увлекательной и интересной темой доставит Вам удовольствие.

Книга состоит из четырех частей, расположенных в порядке возрастания трудности и непривычности материала. Части состоят из параграфов, в конце большинства из которых даются задачи. Работа над брошюрой пойдет у Вас успешно, если Вы попытаетесь решать хотя бы часть из этих задач (не обязательно все). Ко многим задачам Вам придется делать чертежи. Советуем делать их аккуратно и крупными.

К задачам, после условия которых стоит знак \dagger , в конце брошюры приведены указания.

Трудные задачи (и параграфы) отмечены звездочкой.

Как появились комплексные числа

Известно, что некоторые квадратные уравнения (в области действительных чисел) имеют два корня, некоторые - один, некоторые - ни одного. Вообще, если иметь в виду только действительные числа, алгебраическое уравнение n -ой степени

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

иногда имеет n корней, а иногда меньше, и может даже не иметь ни одного корня. Такой разностью издавна тревожил математиков, представлялся неестественным, некрасивым, и не раз высказывалась идея о том, что, кроме действительных корней, алгебраическое уравнение имеет еще некие "воображаемые" или "мнимые" корни. Так, итальянский математик XVI века Кардано писал:

"Если кто-нибудь потребует, чтобы разделить 10 на две части, которые при перемножении дали бы 30 или 40, то ясно, что этот случай или вопрос невозможен. Но мы поступим так: разделим 10 пополам, половина будет 5, умноженная на самое себя, она даст 25. Затем вычтем из 25 то, что должно получиться при перемножении, скажем, 40 (...), тогда останется - 15; если извлечь из этого корень

и прибавить к 5 и вычесть из 5, то получаются части, которые, перемноженные между собой, дадут 40. Таким образом, части эти будут $5 \pm \sqrt{-15}$."

(Мы не приводим здесь громоздких старинных обозначений). Короче говоря, Кардано имел в виду равенства

$$(5 + \sqrt{-15}) + (5 - \sqrt{-15}) = 10$$

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40.$$

Таким образом, Кардано ввел в рассмотрение "мнимые величины" - квадратные корни из отрицательных чисел. Правда, среди действительных чисел квадратных корней из отрицательных чисел не существует. Но в теории комплексных чисел это препятствие преодолевается очень простым способом: кроме "обычных" чисел, рассматривается еще особое число i , квадрат которого равен - 1 (символ i был введен Эйлером в конце 18 века). Используя этот символ, выражения, которые получил Кардано можно записать так:

$$5 \pm \sqrt{-15} = 5 \pm \sqrt{15 \cdot (-1)} = 5 \pm \sqrt{15} \cdot \sqrt{-1} = 5 \pm i\sqrt{15}.$$

Разумеется, если бы введение нового числа i было годно только для решения этой задачи Кардано, толку от комплексных чисел было бы немного. Замечательно, что при добавлении к числам нового числа i , квадрат которого равен - 1, получается изящная и стройная теория, имеющая много приложений.

В первое время после своего появления комплексные числа воспринимались как нечто таинственное, мистическое. От того времени сохранилась терминология, противопоставляющая "действительные" или "вещественные" числа "мнимым", как будто одни числа существуют на самом деле, а другие - только в воображении. В наше время эти термины надо воспринимать только как названия. В принципе все математические объекты - абстракции, не существующие физически, но в конечном счете призванные описывать реальную действительность.

Комплексные числа - это незаменимый аппарат электродинамики, аэро- и гидродинамики, квантовой механики. Это же до самой математики, что комплексные числа связаны едва ли не со всеми ее раз-

делами.

каждому математику, физику, инженеру. Наше задание, конечно, лишь подготавливает к такому знакомству.

Комплексные числа стали гораздо менее загадочными, когда на рубеже XVIII и XIX веков их стали изображать геометрически — точками на плоскости. Один из инициаторов геометрического изображения комплексных чисел, датский землемер Вессель, писал: "с целью узнать, как аналитически представляется направление, нужно расширить определения алгебраических операций, но так (...), чтобы не было противоречия со старой теорией". Последняя фраза — удачная формулировка принципа, полезного при построении новых теорий.

Строя теорию комплексных чисел, следует прежде всего не вступать в противоречие с теорией действительных чисел, являющихся частным случаем комплексных. Имея это в виду, приступим к делу.

Часть I. Действия с комплексными числами

§ I. Комплексная плоскость

Пусть дана координатная плоскость (см. рис. I), каждой точке которой взаимно-однозначно соответствует пара чисел-координат x и y . Мы будем называть эту плоскость комплексной плоскостью, а каждую её точку считать изображением комплексного числа, обозначаемого $x + iy$.

В комплексном числе $x + iy$ координата x называется действительной частью, а координата y называется мнимой частью. Если одна из них равна нулю, то соответствующее слагаемое можно не писать (что и сделано в таблице I и на рис. I). Число $x + i \cdot 0 = x$ называется действительным и отождествляется с известным из школьного курса действительным числом x . Таким образом, ось Ox комплексной плоскости отождествляется с обычной числовой прямой и называется действительной осью. Число $0 + iy = iy$ называется чисто мнимым и изображается точкой на оси Oy . Ось Oy называется мнимой осью.

В частности, число $0 + i \cdot 1$ обозначается просто i . Это комплексное число соответствует точке с координатами $(0; 1)$. Латинская буква i используется в теории комплексных чисел только для указанной цели и ей запрещается обозначать произвольное число. Число $0 + i \cdot 0 = 0$ называется нулем и изображается началом координат. Это — единственное число, одновременно действительное и чисто мнимое.

Таблица I и рис. I показывают, где на комплексной плоскости находятся некоторые комплексные числа.

число	0	1	i	-1	$-i$	$1+i$	$2-i$	$-1+2i$
точка	(0,0)	(1,0)	(0,1)	(-1,0)	(0,-1)	(1,1)	(2,-1)	(-1,2)

Табл. I

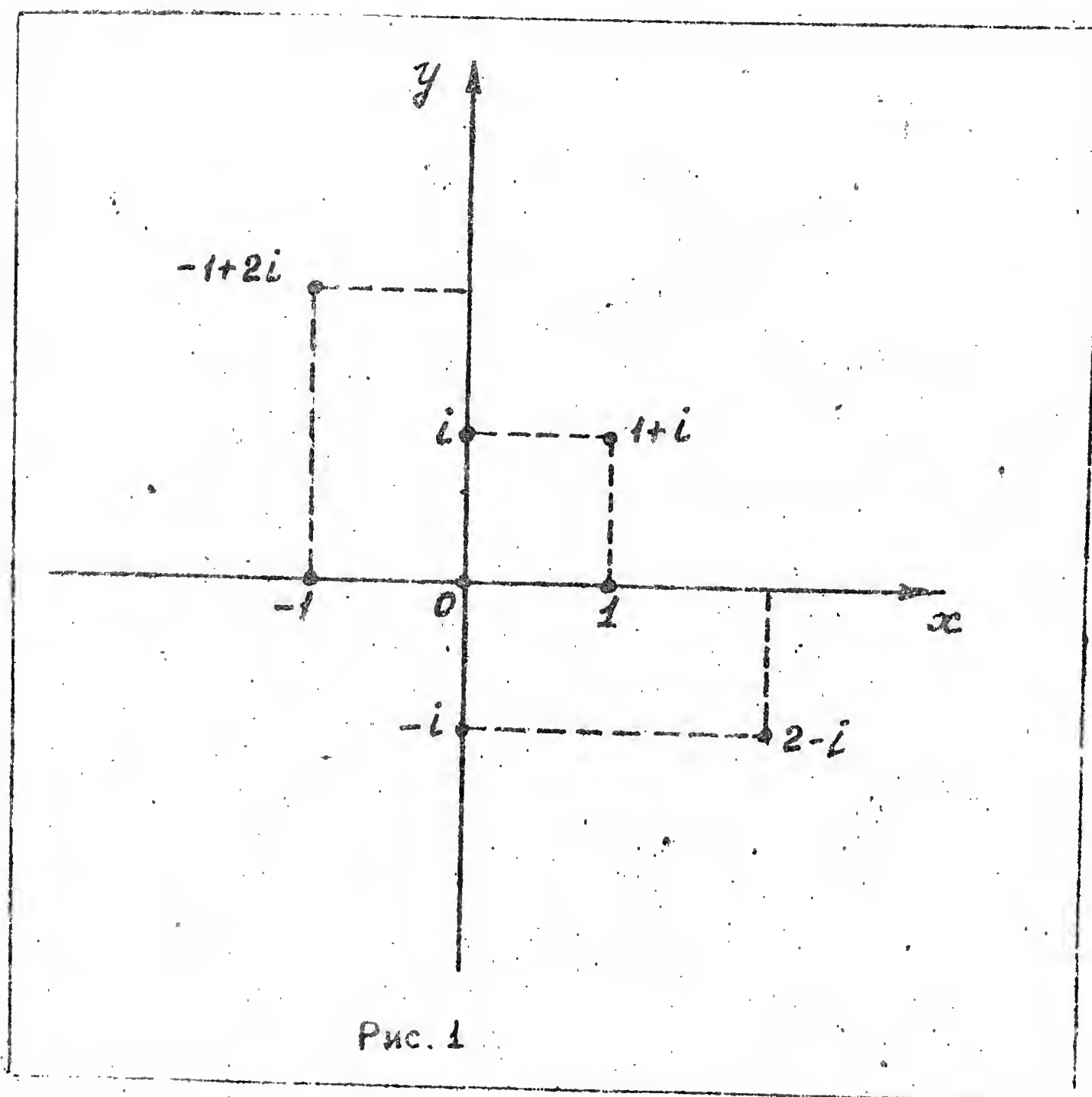


Рис. I

Часто требуется обозначить комплексное число одной буквой. Поэтому при виде буквы всегда надо уяснить себе, может ли она означать комплексные числа или только действительные. Буквы x и y у нас означают координаты, которые могут быть только дей-

ствительными. Поэтому для обозначения комплексных чисел мы будем брать другие буквы из конца алфавита: z, u, v, w, t . Если $z = x + iy$, то выражение $x + iy$ называется алгебраической формой числа z . Действительная часть комплексного числа z обозначается $Re(z)$, а мнимая $Im(z)$. Иначе говоря,

$$Re(x + iy) = x, \quad Im(x + iy) = y.$$

Два комплексных числа равны, если и только если равны их действительные и мнимые части:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(w), \\ Im(z) = Im(w). \end{cases}$$

Равные комплексные числа изображаются одной и той же точкой на комплексной плоскости.

Корнями или решениями уравнения с одной комплексной неизвестной z называются все те значения z , при которых уравнение превращается в истинное равенство. Решения систем определяются аналогично.

Задачи

Нанести на комплексную плоскость числа:

I-1. $-2 + 3i$. I-2. $\frac{3}{2}$. I-3. $-2i$.

I-4. Пусть M — точка на комплексной плоскости, изображающая число $z = 1 + i\sqrt{3}$. Какой угол образует отрезок OM с действительной осью? ↓

Начертите на комплексной плоскости множество чисел $z = x + iy$, задаваемое следующим условием:

I-5. $Re(z) = 0$

I-6. $Re(z) = Im(z)$

I-7. $Im(z) > 0$

I-8. $Im(z) \leq -1$

I-9. $(Re(z))^2 + (Im(z))^2 = 1$

I-10. $(Re(z))^2 + (Im(z))^2 = Re(z)$ ↓

(Решая эти задачи, удобно писать x и y вместо $Re(z)$ и $Im(z)$).

I-II. Нарисуйте на комплексной плоскости множество точек, изображающих числа $1 + ai$, где a пробегает все действительные числа.

§ 2. Комплексные числа как векторы на плоскости

Комплексные числа (мы теперь будем называть их просто числами) складываются по следующему правилу: действительная часть складывается с действительной, мнимая с мнимой. Например:

$$(1 + i) + (2 - i) = (1 + 2) + (i - i) = 3.$$

Аналогично их можно вычитать:

$$(1 + i) - (2 - i) = (1 - 2) + (i + i) = -1 + 2i,$$

и т.п. В общем виде:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i,$$

где a, b, c, d — любые действительные числа.

Несложно определяется и умножение комплексного числа на действительное. В общем виде:

$$k(x + yi) = kx + kyi.$$

Например:

$$2(1 + i) = 2 + 2i.$$

Вы, несомненно, узнали в правиле сложения комплексных чисел правило сложения векторов на плоскости, заданных своими координатами (см. рис. 2). Это и не удивительно: все, что было сделано в §§ 1 и 2, можно рассматривать как особый образ записанную теорию векторов на плоскости, и ничего больше. Интересная часть теории комплексных чисел начинается тогда, когда мы начинаем рассматривать их умножение, а не только сложение. К этому мы перейдем в следующем параграфе; а пока предлагаем Вам, для тренировки, в использованных обозначениях, несколько упражнений.

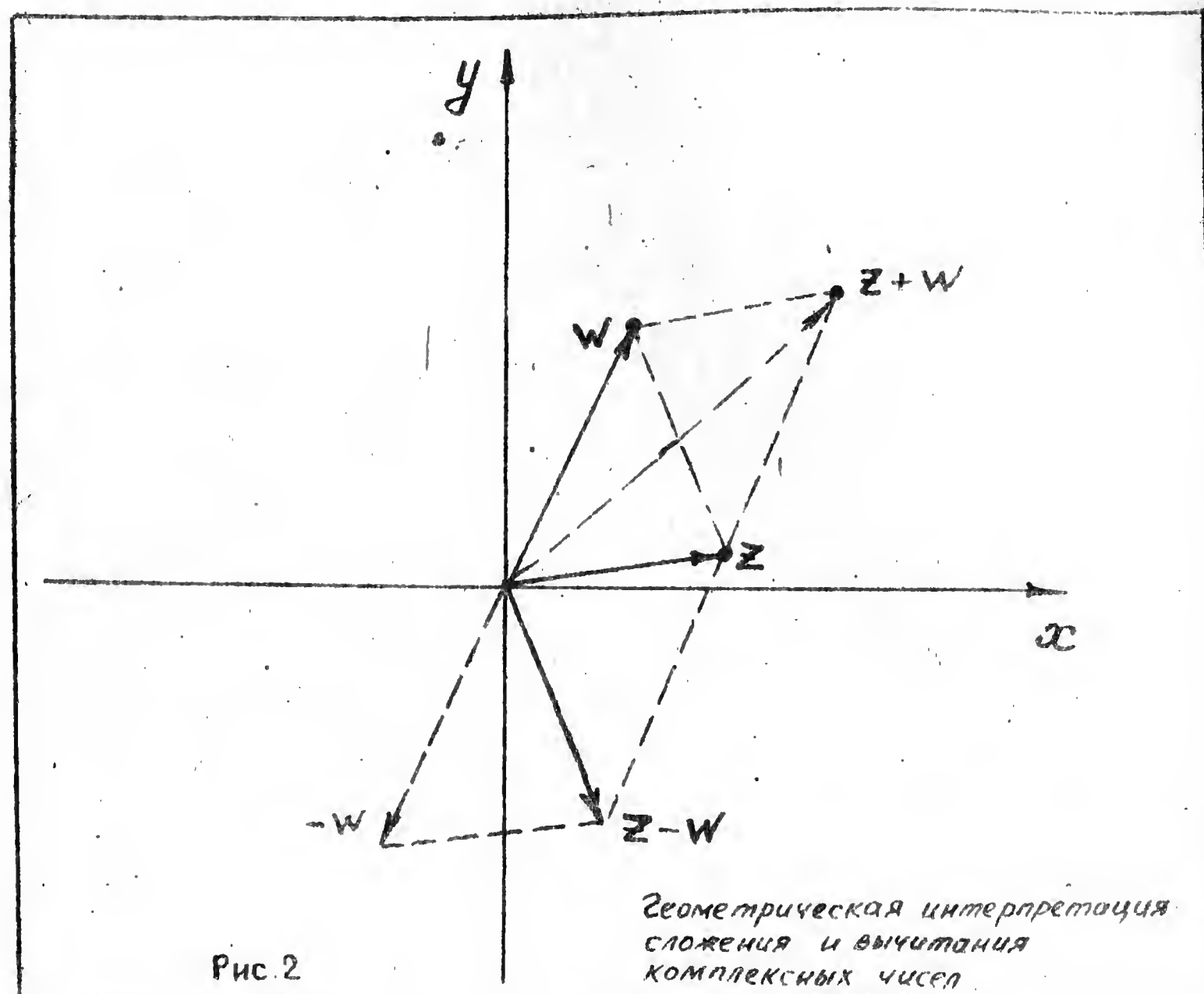


Рис. 2

Задачи.

Выполните действия:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 2-1. $(1+i) + (1-i)$ | 2-2. $(1+i) - (1-i)$ |
| 2-3. $(2+i) + (1+2i)$ | 2-4. $(2+i) - (1+2i)$ |
| 2-5. $2(2+i) + 3(1-i)$ | 2-6. $2[3(1+i) - 2(1-i)]$ |

Решите уравнения и системы:

- | | |
|---|---|
| 2-7. $z + i = i$ | 2-8. $z + 2 - 3i = -1 - i$ |
| 2-9. $\begin{cases} z + w = i \\ z - w = i \end{cases}$ | 2-10. $\begin{cases} 2z + w = 0 \\ 3z - 2w = i \end{cases}$ |

2-11. Какому условию должны удовлетворять комплексные числа u, v, w , чтобы точка w была серединой отрезка с концами u и v ?

2-12. Какому условию должны удовлетворять комплексные числа u, v, w, z , чтобы соответствующие им точки на комплексной плоскости были вершинами параллелограмма?

2-13. Какой вид имеет множество точек Kz , где z - постоянное комплексное число, не равное нулю, а K пробегает:

- все действительные значения;
- все неотрицательные значения?

§. 3. Умножение

Подумаем, как определить, чему равно произведение двух произвольных комплексных чисел:

$$(a+bi) \cdot (c+di)$$

Если мы хотим выстроить красивую и полезную теорию, то хорошо, чтобы выполнялся распределительный закон, позволяющий раскрыть скобки:

$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2$$

Остается непонятным только одно: чему равно i^2 ?

Мы положим по определению, что $i^2 = -1$. Это соответствует тому, что написано во введении про символ i , использовавшийся для придания смысла квадратным корням из отрицательных чисел.

Подставив -1 вместо i^2 и приведя подобные члены, получаем общую формулу перемножения комплексных чисел:

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Легко проверить*, что для сложения и умножения комплексных чисел выполняются привычные законы:

$$z + v = v + z, \quad (3.1)$$

$$(z+v)+w = z+(v+w), \quad (3.2)$$

$$z \cdot v = v \cdot z, \quad (3.3)$$

$$(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w), \quad (3.4)$$

$$z(v+w) = zv + zw. \quad (3.5)$$

* Чтобы убедиться в том, что это легко, проверьте самостоятельно, что нижеприведенные равенства (3.1)-(3.5) верны для любых комплексных чисел $z = a+bi, v = c+di, w = e+fi$.

Это позволяет преобразовывать формулы с комплексными переменными так же, как с действительными. В частности, для комплексных переменных верны известные тождества:

$$\begin{aligned}(z+v)^2 &= z^2 + 2zv + v^2, \\ (z+v)^3 &= z^3 + 3z^2v + 3zv^2 + v^3, \\ z^2 - v^2 &= (z-v)(z+v), \\ z^3 - v^3 &= (z-v)(z^2 + zv + v^2).\end{aligned}$$

Задачи

Выполните действия:

$$\begin{aligned}\boxed{3-1.} \quad (1+i)(1-i), \quad \boxed{3-2.} \quad (1+i)^4, \\ \boxed{3-3.} \quad (1+i)(2-i) + (1-i)(2+i), \quad \boxed{3-4.} \quad \text{а) } i^{100} \downarrow; \text{ б) } i^{198}.\end{aligned}$$

$\boxed{3-5.}$ Докажите, что уравнение $z^2 = -1$ не имеет иных корней, кроме i и $-i$.

$\boxed{3-6.}$ Докажите, что, если z^2 действительно и положительно, то z действительно.

$\boxed{3-7.}$ Докажите, что, если z^2 действительно и отрицательно, то z — чисто мнимое число.

На комплексной плоскости начертите множества точек, задаваемые следующими условиями:

$$\boxed{3-8.} \quad \operatorname{Im}(z^2) = 0, \quad \boxed{3-9.} \quad \operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z).$$

$\boxed{3-10.}$ Пусть $z \neq 0$, $w \neq 0$. Докажите, что $zw \neq 0$ (z и w — комплексные числа).

$\boxed{3-11.}$ Существуют ли такие комплексные числа z и w , что $z \neq 0$, $w \neq 0$, $z^2 + w^2 = 0$?

$\boxed{3-12.}$ Равенство $i^2 = -1$ обусловлено историей развития математики и приводит к наиболее красивой и удобной теории. Логически же допустимо вместо него ввести любое равенство вида

$i^2 = p + qi$, где p, q — фиксированные действительные числа. Напишите для этого общего случая формулу умножения и проверьте, выполняются ли переместительный (3.3), сочетательный (3.4) и ассоциативный (3.5) законы для такого умножения.

§ 4. Сопряженные числа

Числа $z + yi$ и $z - yi$ называются сопряженными. Каждое из них сопряжено другому. На комплексной плоскости сопряженные числа изображаются точками, симметричными относительно действительной оси. Всякое действительное число сопряжено самому себе. Как бы ни было обозначено комплексное число, сопряженное к нему можно обозначать так же, но с чертой сверху. Например:

$$(1 - 6i) = 1 - 6i, \quad \overline{1 - 6i} = 1 + 6i, \quad \overline{z} \text{ сопряжено к } z, \quad z \text{ сопряжено к } \overline{z}, \\ \overline{\overline{z}} = z \text{ сопряжено к } \overline{z}, \quad \overline{z + w} \text{ сопряжено к } \overline{z} + \overline{w}.$$

Докажите:

$\boxed{4-1.}$ Докажите, что произведение $z \cdot \overline{z}$ всегда действительно и неотрицательно.

Докажите тождества:

$$\boxed{4-2.} \quad \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \boxed{4-3.} \quad \overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}.$$

$$\boxed{4-4.} \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

$$\boxed{4-5.} \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}).$$

§ 5. Деление

Как для обычных (действительных), так и для комплексных чисел деление — действие, обратное умножению. Разделить V на W значит найти такое Z , что $V = Z \cdot W$. Легко сказать — найти. Но как найти? А что, если это не окажется? или если такое окажется больше одного?

К счастью, при всяком $W \neq 0$ любое V делится на W однозначно. Покажем это и выведем нужные формулы. Пусть

$V = a + bi$, $W = c + di$, $Z = x + yi$. Нам надо найти такие x и y , при которых

$$\frac{a + bi}{c + di} = x + yi,$$

то есть

$$(a + bi) = (c + di)(x + yi) = (cx - dy) + (dx + cy)i$$

т.е. образом,

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases}$$

Решим эту систему. Для этого удобно воспользоваться способом сложения: умножим первое уравнение на c , второе — на d и сложим уравнения. Получим

$$(c^2 + d^2)x = ac + bd.$$

Избавляясь аналогичным способом от x , получим для y уравнение

$$(c^2 + d^2)y = bc - ad.$$

Отсюда $x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$, $y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$ (заметим,

что знаменатель в нуль не обращается, т.к. $c^2 + d^2 = 0$ только при $c = d = 0$, то есть $w = 0$, а мы предположили, что делитель нулю не равен).

Раз мы нашли x и y , можно записать формулу для деления:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$$

Формула выглядит громоздко и запомнить ее трудно. На самом деле запоминать ее и незачем, так как практически удобнее упрощать выражения вида $\frac{a + bi}{c + di}$ с помощью такого приема: умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное к знаменателю. При этом i в знаменателе пропадет, и деление осуществляется без труда.

Пodelим, например, $3 + 5i$ на $2 + i$:

$$\frac{3 + 5i}{2 + i} = \frac{(3 + 5i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{11 + 7i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{7}{5}i.$$

Этот способ деления комплексных чисел совершенно аналогичен известному Вам из школы способу освобождения от иррациональности в знаменателе.

Задачи

Выполните деление:

$$\boxed{5-1.} \quad \frac{1}{i} \quad \boxed{5-2.} \quad \frac{1+i}{1-i} \quad \boxed{5-3.} \quad \frac{1+2i}{1+i}$$

Решите уравнения:

$$\boxed{5-4.} \quad \frac{1}{z} = i.$$

$$\boxed{5-5.} \quad \frac{z}{z+i} = 2.$$

$$\boxed{5-6.} \quad \frac{z}{2+z} = 1-i.$$

$$\boxed{5-7.} \quad z + \frac{1}{z} = 0.$$

Докажите тождества:

$$\boxed{5-8.} \quad \left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

$$\boxed{5-9.} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Решите системы уравнений:

$$\boxed{5-10.} \quad \begin{cases} z + v = 1, \\ \frac{z}{v} = i. \end{cases}$$

$$\boxed{5-11.} \quad \begin{cases} \frac{z}{v} = \frac{v}{z}, \\ z + v = -1. \end{cases}$$

$\boxed{5-12.}$ Решите задачу 3-10, используя деление комплексных чисел.

$\boxed{5-13.}$ Определим, подобно тому, как это было сделано в задаче 3-12, умножение комплексных чисел, исходя из равенства $i^2 = -1$. Всегда ли в этом случае будет возможно деление?

§ 6. Модуль

Модулем комплексного числа $z = x + yi$ называется величина

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если z действительно, то наше определение модуля превращается в известное определение модуля действительного числа.

Модуль z положителен при $z \neq 0$ и равен нулю при $z = 0$. Модуль z не бывает отрицательным. Модуль z равен расстоянию от точки z на комплексной плоскости до точки 0 — начала координат, или, другими словами, $|z|$ — это длина вектора на плоскости, соответствующего числу z .

Вспоминая, как строится разность векторов, получаем, что модуль разности $|z - w|$ равен расстоянию между точками z и w на комплексной плоскости (см. рис. 3).

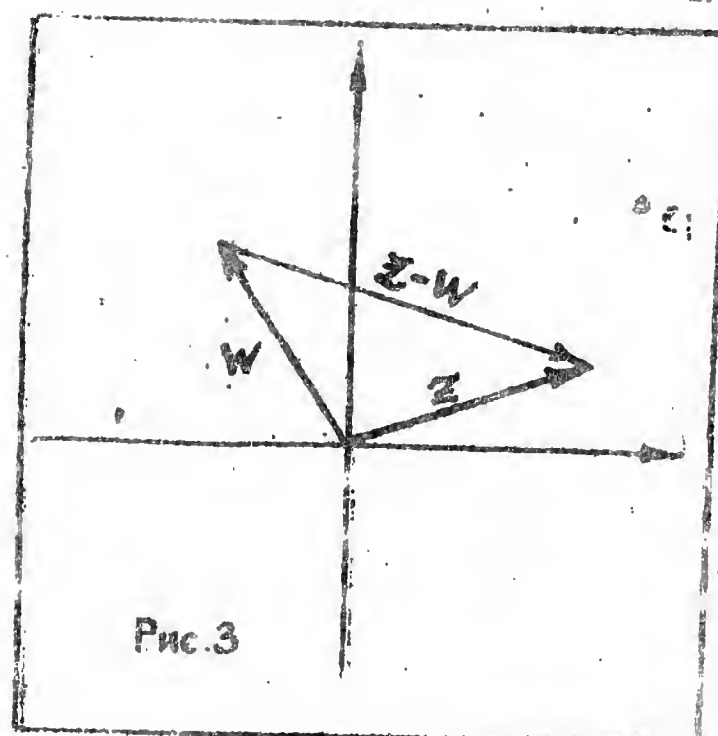


Рис. 3

При всех z, w выполняются неравенства

$$|z+w| \leq |z|+|w|, \quad (6.1)$$

$$|z-w| \leq |z|+|w| \quad (6.2)$$

Оба они следуют из того, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Отсюда можно вывести, что для любых z_1, \dots, z_n

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|. \quad (6.3)$$

Докажем это, например, для $n=3$: $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1 + (z_2 + z_3)| \leq |z_1| + |z_2 + z_3| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

Есть полезное тождество, связывающее понятия модуля комплексного числа и сопряженных чисел:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Его легко доказать, записывая z в виде $z = x + iy$:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (6.4)$$

Из этого тождества выводится другое, очень важное, тождество:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|, \quad (6.5)$$

модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей. В самом деле, возведя в квадрат и заменив каждый квадрат модуля по формуле (6.4), получим

$$z \cdot w \cdot (\overline{zw}) = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w},$$

а это равенство верно, потому что

$$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w},$$

(см. задачу 4-4).

Равенство $|z-w|=r$ при фиксированных w и r задает множество значений z , лежащих на окружности с центром w и радиусом r .

Задачи

Докажите тождества:

$$[6-1.] \quad ||z|| = |z|.$$

$$[6-2.] \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$$

$$[6-3.] \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Вычислите:

$$[6-4.] \quad |i^{100}|$$

$$[6-5.] \quad \left| \frac{z}{|z|} \right|$$

$$[6-6.] \quad \text{Докажите, что, если } |z|=1, \text{ то } \frac{1}{z} = \bar{z}.$$

Решите уравнения:

$$[6-7.] \quad z+1 = 2|z|$$

$$[6-8.] \quad 2z + |z| = i$$

$$[6-9.] \quad z \cdot |z| = 2.$$

$$[6-10.] \quad z^2 = 2|z|$$

$$[6-11.] \quad z^2 = |z| - 2$$

Изобразите на плоскости множество точек z , удовлетворяющих условиям:

$$[6-12.] \quad |z| = 1$$

$$[6-13.] \quad |z-i| = 2$$

[6-14.] Пусть a — фиксированное комплексное число, $r > 0$ — действительное число. Докажите, что множество комплексных чисел, лежащих на окружности с центром a и радиусом r , можно задать уравнением

$$|z|^2 + |a|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} = r^2$$

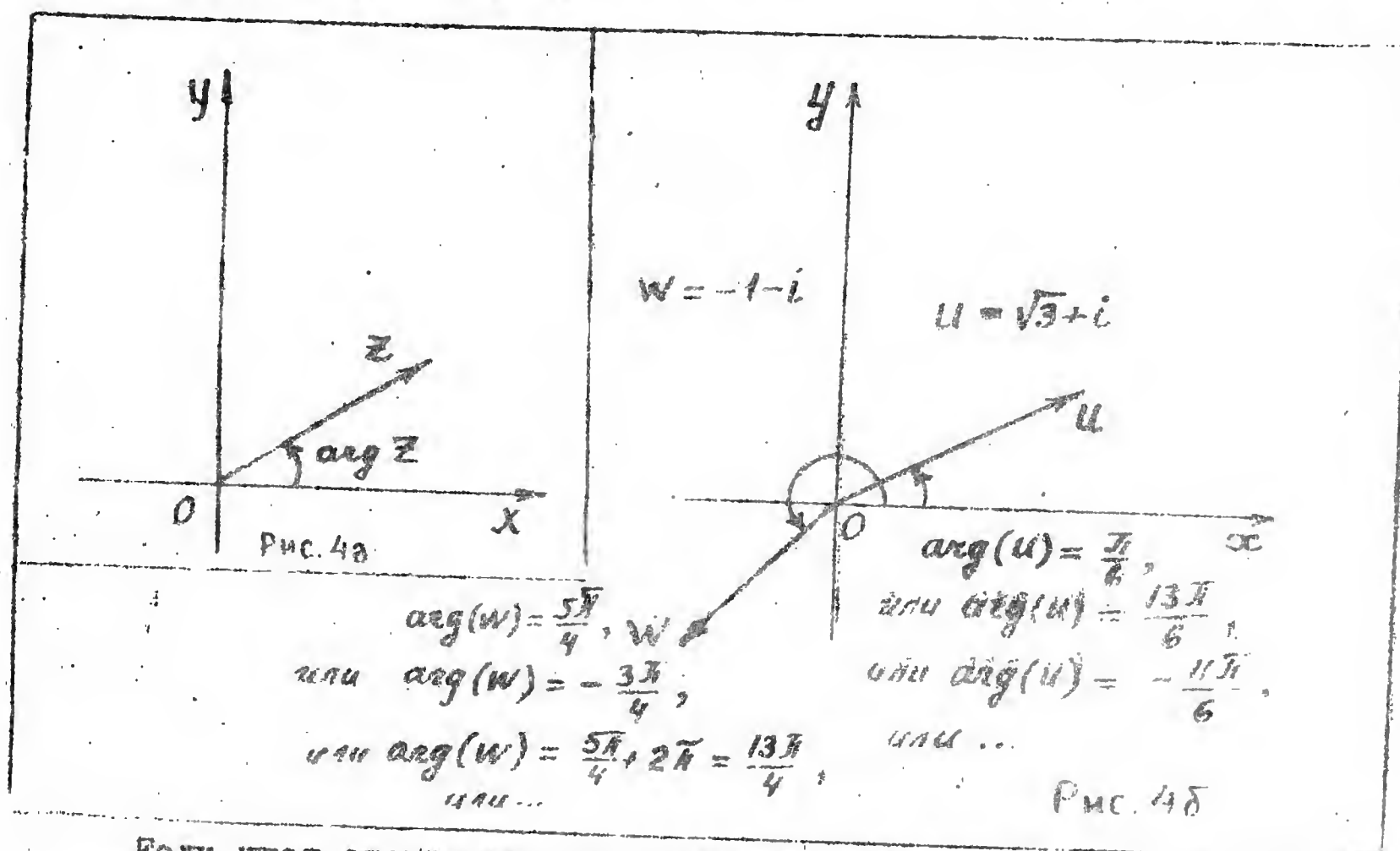
§ 7. АРГУМЕНТ

Как мы помним, комплексные числа можно рассматривать как точки плоскости, на которой задана прямоугольная система координат, и при этом положение точки задается её координатами x и y или, как мы их называем, вещественной и мнимой частью соответствующего числа. Во многих вопросах, однако, удобнее задавать положение

точки с помощью двух других чисел.

Одно из этих чисел - расстояние от начала координат до точки, то есть уже знакомый нам модуль соответствующего комплексного числа z .

Второе число, называемое аргументом числа z и обозначаемое $\arg(z)$ - это угол между положительным направлением оси Ox и отрезком Oz (рис. 4).



Если угол отсчитывается в направлении против часовой стрелки ("положительное направление"), то он берется со знаком "+", если по часовой стрелке, то со знаком минус. На рис. 4б приведены примеры записи аргументов различных комплексных чисел.

Из этих рисунков, кстати, видно, что аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до прибавления $2\pi n$, где n - произвольное целое число^{*}.

Нет аргумента только у нуля. Каждое не равное нулю комплексное число однозначно задается своим модулем и аргументом.

Модуль числа z определяет расстояние от точки z до нуля, а аргумент z говорит, в каком направлении надо двинуться из нуля, чтобы прийти в точку z .

^{*} Из этого следует, что аргумент комплексного числа задан не однозначно.

Те из Вас, кто знаком с так называемыми полярными координатами на плоскости, поймут, что модуль и аргумент комплексного числа - всего-навсего другое название полярных координат соответствующей точки. Специфика комплексных чисел начнет проявляться только тогда когда в игру вступит операция умножения. Речь об этом - впереди. А пока сделайте несколько упражнений, чтобы освоиться с понятием аргумента.

В нижеследующих задачах, где требуется найти $\arg z$, Вы можете указывать любое подходящее числовое значение аргумента

Задачи

Вычислите:

7-1. $\arg(\sqrt{3}-i)$.

7-2. $\arg(-1+i)$.

Найдите $z = x + iy$, если:

7-3. $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$.

7-4. $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$.

7-5. $|z| = 2$, $\arg z = \arg(z-1)$.

7-6. $|z| = 2$, $\arg z = \arg(z-2)$.

7-7. $|z| = |z-1|$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$.

Пусть $\arg(z) = \varphi$.

7-8. Найдите $\arg(-z)$.

7-9. Найдите $\arg(\bar{z})$.

7-10. Найдите $\arg(iz)$.

Начертите множество точек, заданных условиями:

7-11. $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}$. 7-12. $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$.

7-13. $0 \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$.

Докажите тождества:

7-14. $\cos \arg z = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$. 7-15. $\sin \arg z = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$.

Начертите множество точек, заданных условиями:

[7-16.] $|z| = \frac{1}{\sin \arg z}$; [7-17.] $|z| = \sin \arg z$.

§ 8. Тригонометрическая форма комплексного числа

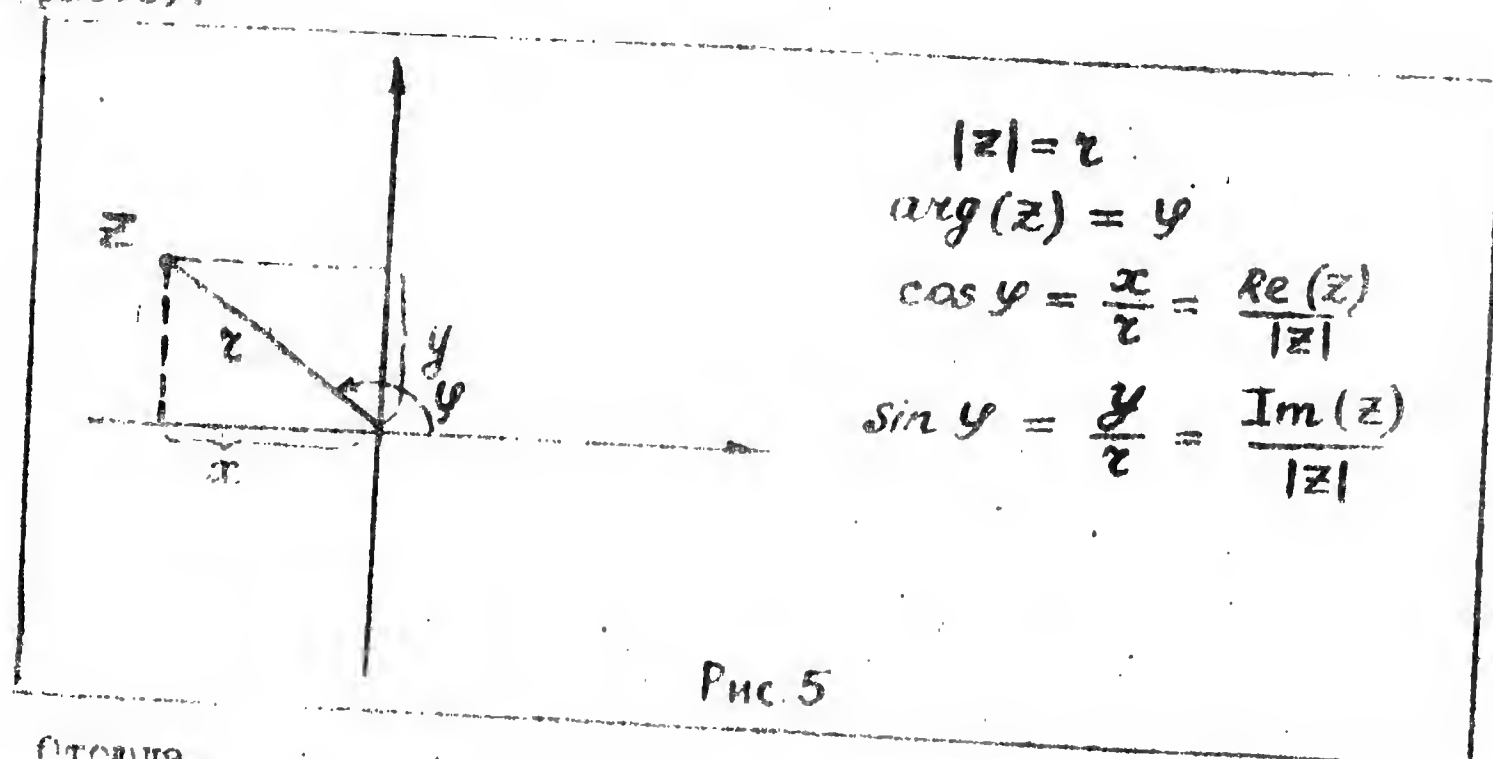
Пусть z - комплексное число, не равное нулю,

$$r = |z| \neq 0, \quad \varphi = \arg(z).$$

Тогда, согласно определениям синуса и косинуса,

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}(z)}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{r}$$

(см. рис. 5).



Следовательно

$$\operatorname{Re}(z) = r \cos \varphi; \quad \operatorname{Im}(z) = r \sin \varphi,$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Эта последняя запись называется тригонометрической формой числа z (а запись $z = x + iy$ называется алгебраической формой).

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Перемножим эти числа:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)].$$

Из школьного курса тригонометрии известны следующие формулы:

$$\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

$$\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2.$$

Подставим их в формулу, полученную выше:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \quad (8.1)$$

Мы получили замечательную формулу, которую можно выразить следующими словами: при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Таким образом, если складывать и вычитать комплексные числа удобнее в алгебраической форме, то умножать и делить удобнее в тригонометрической..

В частном случае, для произведения n одинаковых множителей получаем:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Эта формула называется формулой Муавра.

Задачи

[8-1.] Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Тогда $z_1/z_2 = r_1/r_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$. Докажите эту формулу.

Представьте в тригонометрической форме:

[8-2.] $-1-i$; [8-3.] $1-i\sqrt{3}$; [8-4.] $\cos(\frac{7\pi}{11}) - i \sin(\frac{7\pi}{11})$.

[8-5.] $-2(\cos 17^\circ + i \sin 17^\circ)$.

Представьте в алгебраической форме:

8-6. $2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$

8-7. $\sqrt{2}(\cos 785^\circ + i \sin 785^\circ)$

8-8. Выведите из формулы Муавра формулу, выражающую $\cos 5\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. ↓

§ 9. Задачи на повторение части I

На комплексной плоскости нарисуйте множества точек z , задаваемые следующими условиями:

9-1. $|z| = |z-1|$

9-2. $z - |z| = 0$

9-3. $z + |z| = 0$

9-4. $|z^2| = 1$

9-5. $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

9-6. $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Re}(z^2)$

9-7. $|z-v| = |z-w|$, где v, w — фиксированные числа. ↓

9-8*. Во что переходит область $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ при отображении $w(z) = z^2$? ↓

Решите уравнения:

9-9. $z \cdot |z| = 1$

9-10. $z^2 \cdot |z| = -8$. ↓

9-11. $z^2 = |z|$

9-12. $z^2 = i|z|$

9-13. $|z| + z = \sqrt{3} + i$. ↓

9-14. $|z| + \bar{z} = 1 + i$

9-15. Пусть $z \neq 0$. Докажите, что треугольник с вершинами $0, z, iz$ прямоугольный и равнобедренный.

9-16. Докажите, что различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой, если и только если

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = 0.$$

9-17. Каким условиям должны удовлетворять числа u, v, w, z , чтобы их точки были последовательными вершинами:

а) квадрата; ↓

б) квадрата с центром 0 ;

в) прямоугольника?

9-18. Точка z — вершина правильного n -угольника с центром w . Найдите остальные его вершины.

9-19. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры суть вершины еще одного квадрата. ↓

Часть II. Функции и отображения

§ 10. Простейшие функции

Каждую функцию комплексного переменного $w(z)$ можно рассматривать как геометрическое отображение, переводящее всякую точку z из области определения этой функции в её образ - точку $w(z)$.

Что же это за отображения? Сначала рассмотрим примеры, когда получаются отображения, уже знакомые из курса геометрии.

Следующие утверждения почти очевидны (см. их иллюстрации на рис. 6 а)-д)).

1) Функция $w(z) = z + a + bi$ соответствует параллельный перенос плоскости на вектор $(a; b)$.

2) Функции $w(z) = \bar{z}$ соответствует симметрия относительно действительной оси.

3) Функции $w(z) = tz$, где $t \neq 0$ — действительное, соответствует гомотетия с центром O и коэффициентом t .

4) Функции $w(z) = tz$, где t — комплексное число, $|t| = 1$, соответствует поворот вокруг точки O на угол $\alpha = \arg t$.

5) Функции $w(z) = tz$, где $t \neq 0$ — любое комплексное число, соответствует композиция (последовательное выполнение) гомотетии с центром O и коэффициентом $|t|$ и поворота вокруг точки O на угол $\arg(t)$.

Итак, мы видим, что с помощью комплексных чисел можно задавать параллельные переносы, гомотетии и повороты. Но параллельные переносы мы можем задавать любые, а повороты и гомотетии — только с центром в точке O . Как задать алгебраически

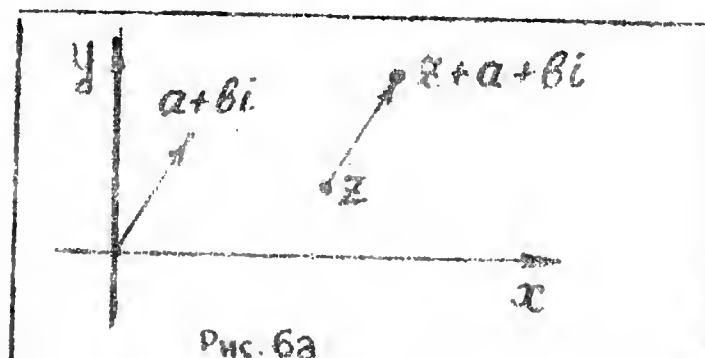


Рис. 6а

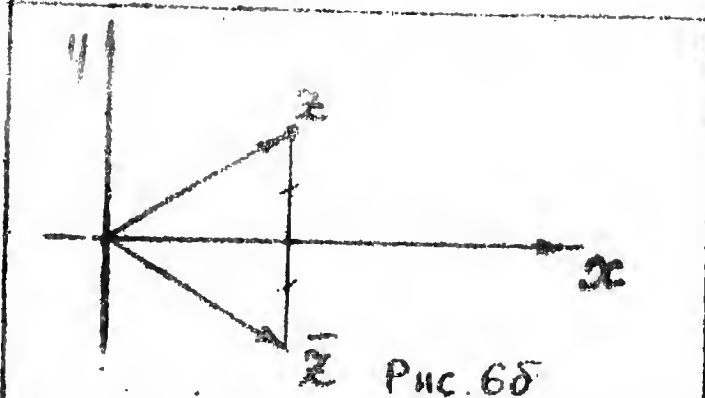


Рис. 6б

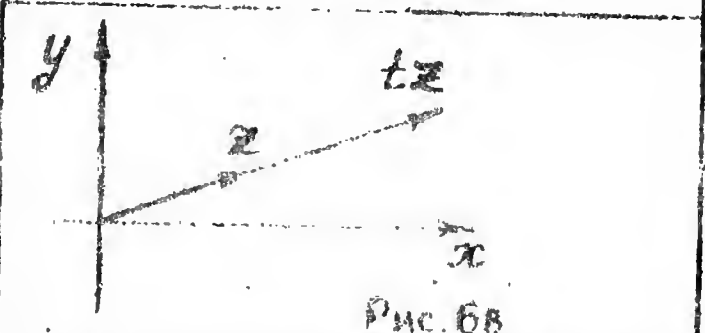


Рис. 6в

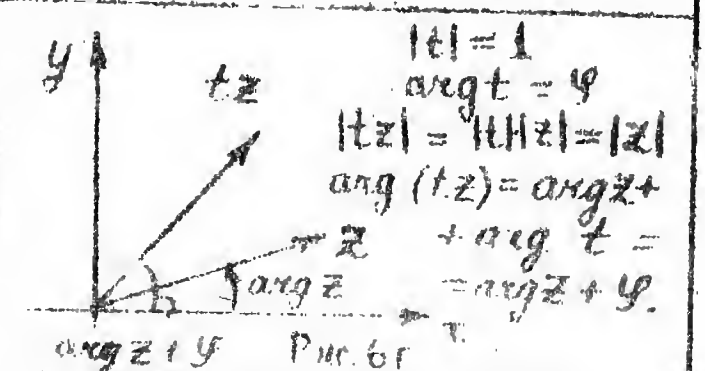


Рис. 6г

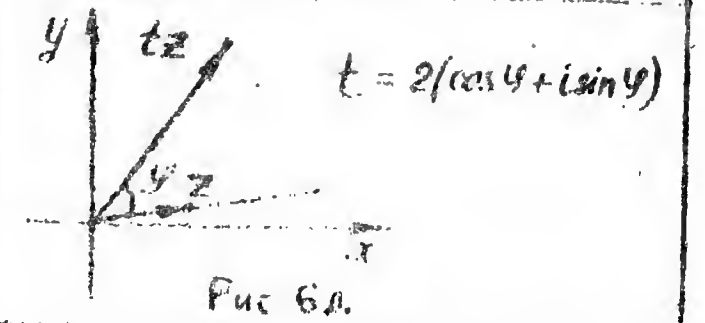


Рис. 6д

поворот с центром в другой точке a . Пусть точка z переходит при этом повороте в точку w . Тогда вектор $w-a$ получается из вектора $z-a$ поворотом на угол y (см. рис. 7). Положим $t = \cos y + i \sin y$. Тогда (см. пункт 4 выше) имеет место равенство $w-a = t(z-a)$ или $w = t(z-a) + a$.

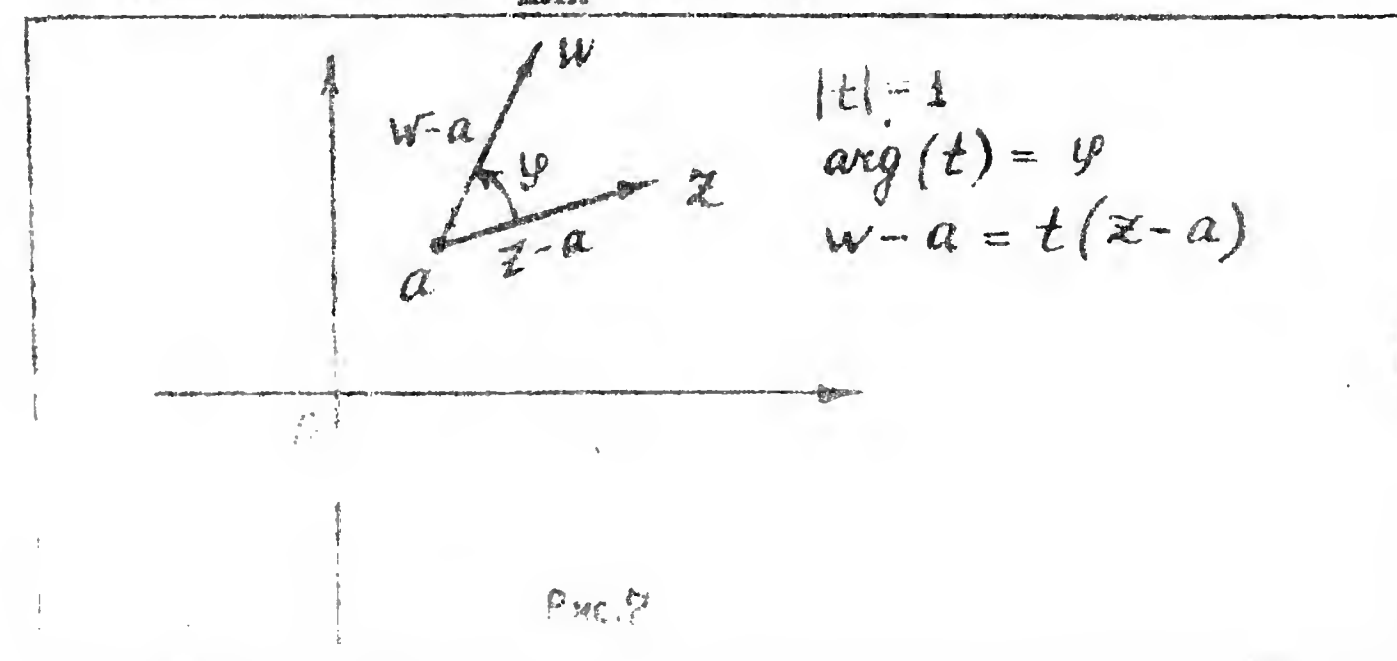


Рис. 7

Упражнения

Какие геометрические преобразования соответствуют функциям:

- IO-1. $w(z) = \bar{z} + 2i$? IO-2. $w(z) = -\bar{z}$?
IO-3. $w(z) = iz$? IO-4. $w(z) = -iz$?
IO-5. $w(z) = -z$?

Запишите формулой следующие геометрические преобразования:

- IO-6. Поворот на 90° с центром в точке i .
IO-7. Гомотетию с центром $2+3i$ и коэффициентом $1/2$.
IO-8. Центральную симметрию с центром $-1+i$.

Какие геометрические преобразования соответствуют функциям:

- IO-9. $w(z) = 2z + 1$? IO-10. $w(z) = iz + 1$?

(Постарайтесь описать каждое из этих отображений, не употребляя слов типа "композиция" или "последовательное выполнение").

IO-11. а) Покажите, что геометрическое преобразование, задаваемое формулой $w(z) = tz + b$, где $|t| = 1$, есть поворот или

параллельным переносом.

б) При каких f это преобразование будет параллельным переносом, а при каких — поворотом?

§ 11. Композиции преобразований

Рассмотрим функции $f(z) = 2z + 3$, $g(z) = -z + 1$. Запишем результат последовательного выполнения преобразований, задаваемых этими функциями (сначала g , потом f). Функция g переводит z в $-z + 1$, после чего f переводит число $-z + 1$ в $2(-z + 1) + 3 = -2z + 5$.

Короче можно написать так: $f(g(z)) = -2z + 5$. Говорят также, что функция $f(g(z))$ является композицией функций f и g .

Задачи

Запишите формулы композиции отображений $f(g(z))$, если f и g заданы такими формулами:

II-1. $f(z) = 2z + 1$, $g(z) = (4 - 3i)z + 6 - 2i$.

II-2. $f(z) = \frac{4z + 1}{2z + 3}$, $g(z) = \frac{1}{z + 6}$.

II-3. $f(z) = iz + 1$, $g(z) = -iz - 1$.

II-4. $f(z) = z + a$, $g(z) = z + b$.

II-5. $f(z) = 4z - 1$, $g(z) = z - 2$.

II-6. $f(z) = z - 2$, $g(z) = 4z - 1$.

II-7. $f(z) = 2z + 2$, $g(z) = \frac{1}{2}z - 1$.

II-8. $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = \frac{1}{z} - 1$.

II-9. $f(z) = \frac{1}{z + 1}$, $g(z) = \frac{1}{z} - 1$.

II-10. Докажите, что композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос.

*1) Если $f(z) = f(g(z))$, то $f(g(z)) = f(z)$, т.е. f — тождественная функция. Если $g(z) = g(f(z))$, то $g(f(z)) = g(z)$, т.е. g — тождественная функция.

II-11. Докажите, что композиция поворота на угол φ и параллельного переноса есть поворот на тот же угол φ , и, наоборот, вокруг другой точки.

II-12. Докажите, что композиция двух поворотов является поворотом или параллельным переносом.

§ 12. Отображение $z \mapsto z^{-1}$

В этом параграфе мы будем говорить только об одной функции.

$$W(z) = z^{-1} = \frac{1}{z}$$

Область определения — вся плоскость, кроме точки 0 . Эта функция обладает красивыми геометрическими свойствами.

Настоятельно вычислит, во что эта функция переводит окружность. Так мы уже знаем, окружность с центром 1 и радиусом R задается уравнением

$$|z - 1| = R.$$

Если $W = \frac{1}{z}$, то $z = \frac{1}{W}$. Подставим это выражение в уравнение окружности и получим уравнение

$$\left| \frac{1}{W} - 1 \right| = R.$$

Это уравнение можно преобразовать:

$$\left| \frac{1 - TW}{W} \right| = R,$$

$$\frac{|1 - TW|}{|W|} = R,$$

$$|TW - 1| = R|W|.$$

Если $T = 0$, то мы имеем с самого начала. В этом случае исходная окружность имеет центр 0 , а модуль z на ней постоянен и равен R , поэтому и модуль $W = z^{-1}$ при этом постоянен и равен R^{-1} , т.е. мы имеем окружность с центром 0 и радиусом R^{-1} .

Если $T \neq 0$, то мы имеем окружность с центром T^{-1} и радиусом $R|T|^{-1}$.

$$\left| w - \frac{1}{T} \right| = \frac{R}{|T|} \cdot |w| \quad (I3.1)$$

Пусть сначала исходная окружность проходила через точку O (которая в этом случае из неё, конечно, была выколота). Это значит, что радиус R исходной окружности равнялся расстоянию от её центра T до точки O , то есть $R = |T|$. В этом случае наше уравнение принимает вид

$$\left| w - \frac{1}{T} \right| = |w|.$$

Вспомнив геометрический смысл модуля, мы замечаем, что в левой части стоит расстояние от точки w до точки $1/T$, а в правой — расстояние от точки w до точки O . Итак, множество решений этого уравнения — множество точек, равноудаленных от точки O и точки $1/T$, то есть серединный перпендикуляр к отрезку $[O; 1/T]$.

Итак, мы получили первый замечательный факт:

Отображение $z \rightarrow z^{-1}$ переводит всякую окружность, проходящую через точку O , в прямую, не проходящую через точку O .

Верно и обратное: отображение $z \rightarrow z^{-1}$ переводит всякую прямую, не проходящую через точку O , в окружность, проходящую через точку O .

Действительно, пусть задана прямая e , не проходящая через точку O . Пусть S — такая точка, что e — серединный перпендикуляр к отрезку OS (см. рис. 8).

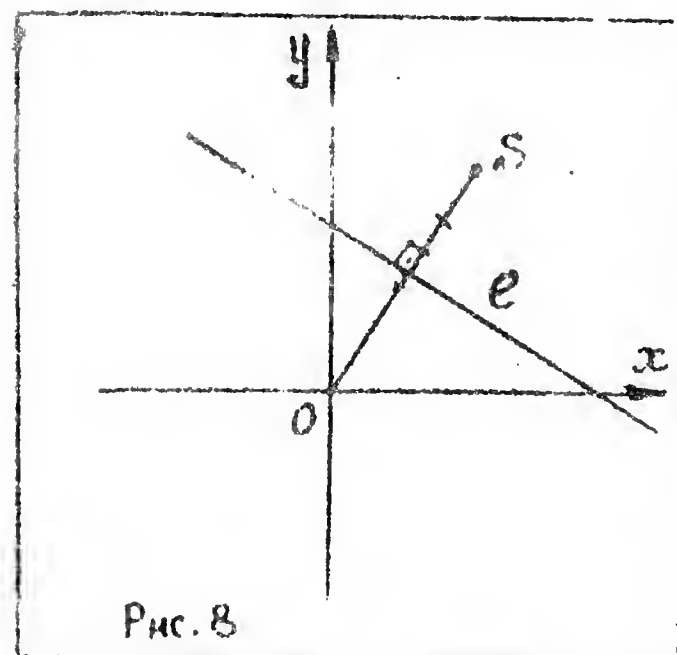


Рис. 8

Тогда e задается уравнением $|z| = |z - S|$. При отображении $z \rightarrow z^{-1}$ прямая e переходит в множество решений уравнения

$$\left| \frac{1}{w} \right| = \left| \frac{1}{w} - S \right|.$$

Преобразуем его:

$$1 = |1 - wS|,$$

$$\left| w - \frac{1}{S} \right| = \frac{1}{|S|}.$$

Это уравнение окружности с центром $1/S$ и радиусом $1/|S|$; очевидно, что эта окружность проходит через O , что и требовалось доказать.

Теперь вернемся к общему случаю, когда $|T| \neq R$. Обозначим $\frac{R}{|T|} = K \neq 1$. Теперь множество решений уравнения (I3.1) есть множество точек, для которых отношение расстояния до точки $1/T$ к расстоянию до точки O равно K . Эта геометрическая задача разбиралась в "Метод координат" (п. 8), и было выяснено, что искомое множество есть окружность.* Итак, мы получили еще одно замечательное утверждение:

Отображение $z \rightarrow z^{-1}$ переводит всякую окружность, не проходящую через точку O , в окружность, не проходящую через точку O .

Задачи

Выясните, во что отображение $z \rightarrow z^{-1}$ переводит следующие множества, то есть найдите их образы. Напишите соотношения, задающие эти образы, и нарисуйте их.

I2-1. Окружность с центром $2i$ и радиусом 2.

I2-2. Окружность с центром $2i$ и радиусом 1.

I2-3. Прямую $\operatorname{Im}(z) = 1$.

I2-4. Полуплоскость $\operatorname{Re}(z) > 1$.

I2-5. Круг $|z| \leq 1$.

I2-6. Круг $|z - i| \leq 1$.

I2-7. Круг $|z - 2i| \leq 1$.

I2-8. Полосу $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$.

I2-9. Полосу $1 < \operatorname{Im}(z) < 2$.

I2-10. Нарисуйте на одном чертеже множества решений уравнения

$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| = K$$

при K , равном $1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$.

I2-11. Пользуясь результатом задачи 6-14, докажите, что отображение $z \rightarrow z^{-1}$ переводит окружность, не проходящую через точку O , в окружность, не проходящую через точку O .

* Если у Вас нет под рукой экземпляра "Метода координат" и Вы не можете доказать это утверждение сами, примите его на веру. Для решения задач Вам придется использовать еще тот факт, что центр этой окружности лежит на прямой, соединяющей точки O и $1/T$.

§ 13. Отображение $z \rightarrow z^2$.

Посмотрим теперь на функцию $W(z) = z^2$. Чтобы понять, как она себя ведет, выясним, во что она переводит различные фигуры на комплексной плоскости.

Начнем с фигуры, заданной условием $0 \leq \arg(z) \leq \alpha$, где $\alpha < \pi$ (рис. 9а).

Если $|z| = r$, $\arg(z) = \varphi$, то $|z^2| = r^2$, $\arg(z^2) = 2\varphi$, поэтому наша фигура разворачивается, как веер, и переходит во множество точек, заданных условием $0 \leq \arg(z) \leq 2\alpha$ (рис. 9б).

Если $\pi \leq \alpha < 2\pi$, то при этом преобразовании наш веер начинает чалезать сам на себя, и в результате оказывается, что образ нашего множества — вся плоскость (рис. 9в).

Посмотрим, наконец, во что перейдет прямая $\operatorname{Re}(z) = 1$. Все точки этой прямой имеют вид

$$z = 1 + it \quad *, \quad \text{откуда}$$

$$W = z^2 = 1 - t^2 + 2it.$$

Если обозначить $\operatorname{Re}(W) = x$, $\operatorname{Im}(W) = y$, то $x = 1 - t^2$, $y = 2t$, откуда $x = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$.

Это уравнение параболы, у которой ось абсцисс является осью симметрии.

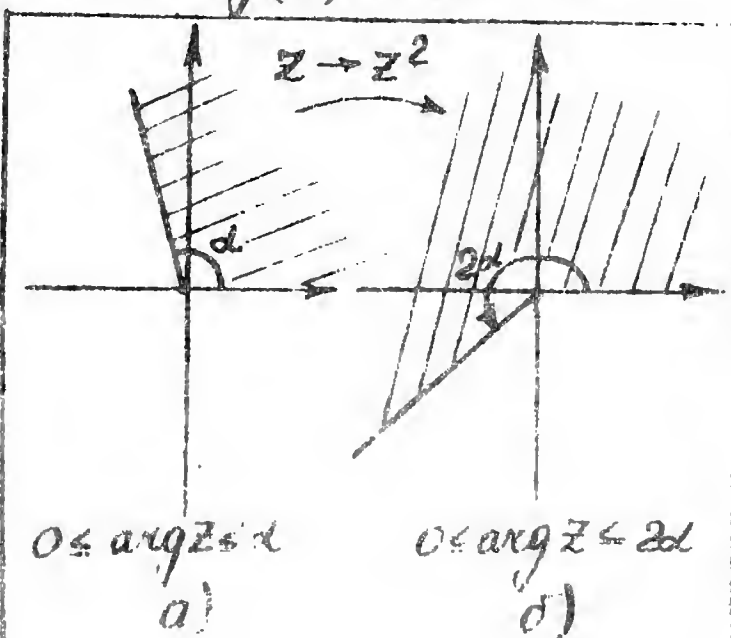


Рис. 9

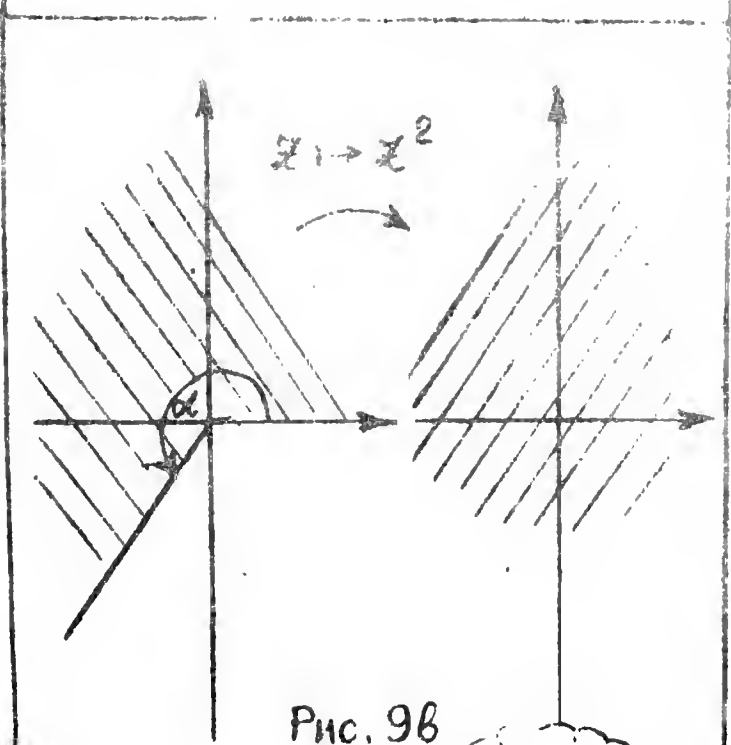


Рис. 9б

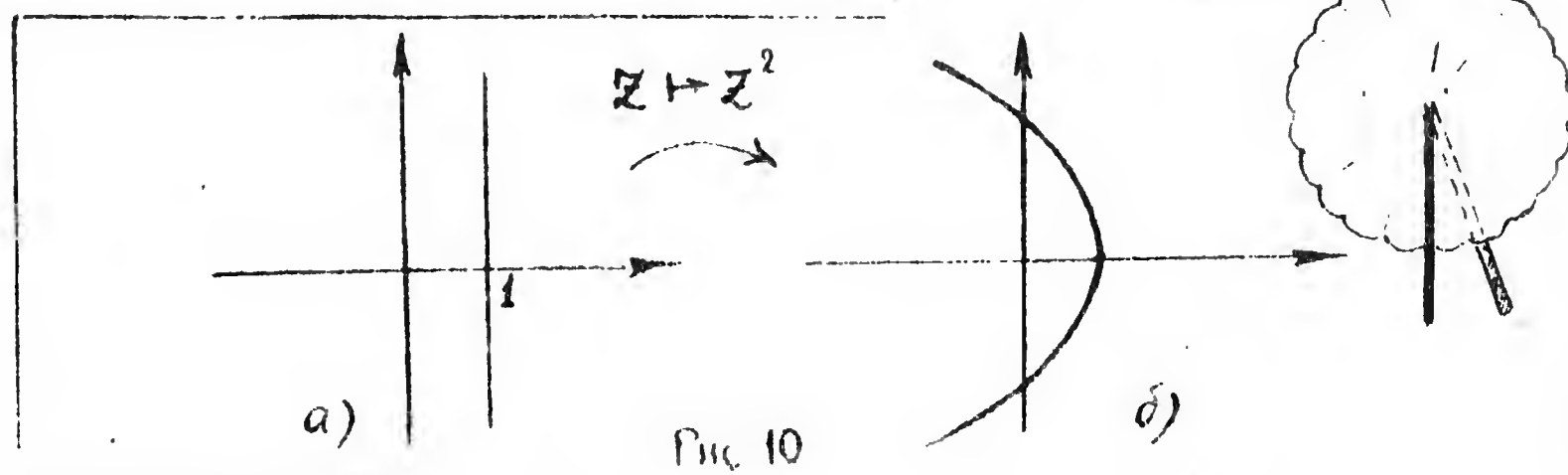


Рис. 10

*) $t = iy$

Задачи

Выясните, во что отображение $z \mapsto z^2$ переводит следующие множества; напишите соотношения, задающие множества, и начертите их:

I3-1. Луч с началом в точке O , составляющий угол α с осью абсцисс.

I3-2. Прямую $\operatorname{Im}(z) = 0$.

I3-3. Прямую $\operatorname{Re}(z) = 0$.

I3-4. Прямую, проходящую через точку O и составляющую угол α с осью абсцисс.

I3-5. Множество, задаваемое соотношениями

$$\begin{cases} 0 \leq \arg z \leq \alpha, \\ |z| \leq r, \end{cases}$$

где α и r заданы, $r > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

I3-6. Начертите на одном чертеже кривые, в которые отображение $z \mapsto z^2$ переводит прямые $\operatorname{Re}(z) = a$ при a , равном 1, 2, $\frac{1}{2}$.

I3-7. Выясните, во что отображение $z \mapsto z^3$ переводит:

а) множество из задачи I3-3;

б) множество из задачи I3-4;

в) множество из задачи I3-5.

I3-8. Пусть точка z обходит окружность радиуса 1 с центром O в положительном направлении, начиная и заканчивая путь в точке 1 (можно считать, что модуль z все время равен 1, а аргумент z монотонно возрастает от 0 до 2π). Как движется при этом:

а) \bar{z} , б) $\frac{1}{z}$, в) z^2 , г) z^{10} , д) $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$? ↓

(В п. д) записана знаменитая функция Жуковского, помогающая описывать поведение потоков воздуха вблизи крыла самолета).

§ 14. Корни из комплексных чисел

В этом параграфе мы полностью опишем множество корней уравнения

$$z^n = w,$$

где n - натуральное, W - любое заданное комплексное число, z - неизвестное. Если $W=0$, то ответ прост: равенство выполняется только при $z=0$.

Пусть теперь $W \neq 0$. Тогда и z , удовлетворяющее равенству, тоже не равно нулю. Представим числа W и z в тригонометрической форме:

$$W = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

$$z = \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Согласно § 6, модуль произведения равен произведению модулей, поэтому $r = \rho^n$, откуда $\rho = \sqrt[n]{r}$ (это - обычный арифметический корень из положительного числа).

Итак, модуль искомого числа z найден. Теперь займемся его аргументом.

Мы знаем, что при возведении числа в n -ю степень его аргумент умножается на n . Таким образом, аргумент z^n равен $n\alpha$. На первый взгляд, откуда следует, что $n\alpha = \varphi$. Но так получается только одно значение z и их может быть больше. (Например, уравнение $z^2 = 1$ имеет корни 1 и -1 , уравнение $z^2 = -1$ имеет корни i и $-i$). Как же мы потеряли остальные корни? Сколько их на самом деле?

Вспомним, что $\arg(z)$ - это не число, а угол. Для того, чтобы числа $n\alpha$ и φ задавали один и тот же угол, не обязательно должно выполняться равенство $n\alpha = \varphi$: достаточно, чтобы $n\alpha$ отличалось от φ на целочисленное кратное 2π , то есть чтобы $n\alpha = \varphi + 2\pi k$ (k - целое).

Значит,

$$\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

(1.1.1)

Эта формула дает бесконечно много значений α при всех целых k , но не всем им отвечают разные аргументы числа z . В самом деле, если k увеличится на n , то α увеличится на 2π , и, значит, даст тот же угол, так что углы повторяются с периодом n *)

*) Если читатель уже потерял нить рассуждений, то обратим ему внимание на рис. II, где показаны корни уравнения $z^5 = 1$.

Значит, чтобы получить все решения уравнения $z^n = W$, надо в формуле (1.1.1) взять те значения k , при которых получаются различные углы. Таких значений k ровно n , и в качестве их проще всего взять целые числа от 0 до $n-1$. Таким образом, наше уравнение имеет ровно n корней. Эти n корней очень красиво расположены на комплексной плоскости. Все они лежат на одной окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром O и делят эту окружность на n равных дуг. При $n \geq 3$ они служат вершинами правильного n -угольника (на рис. II показаны решения уравнения $z^5 = 1$).

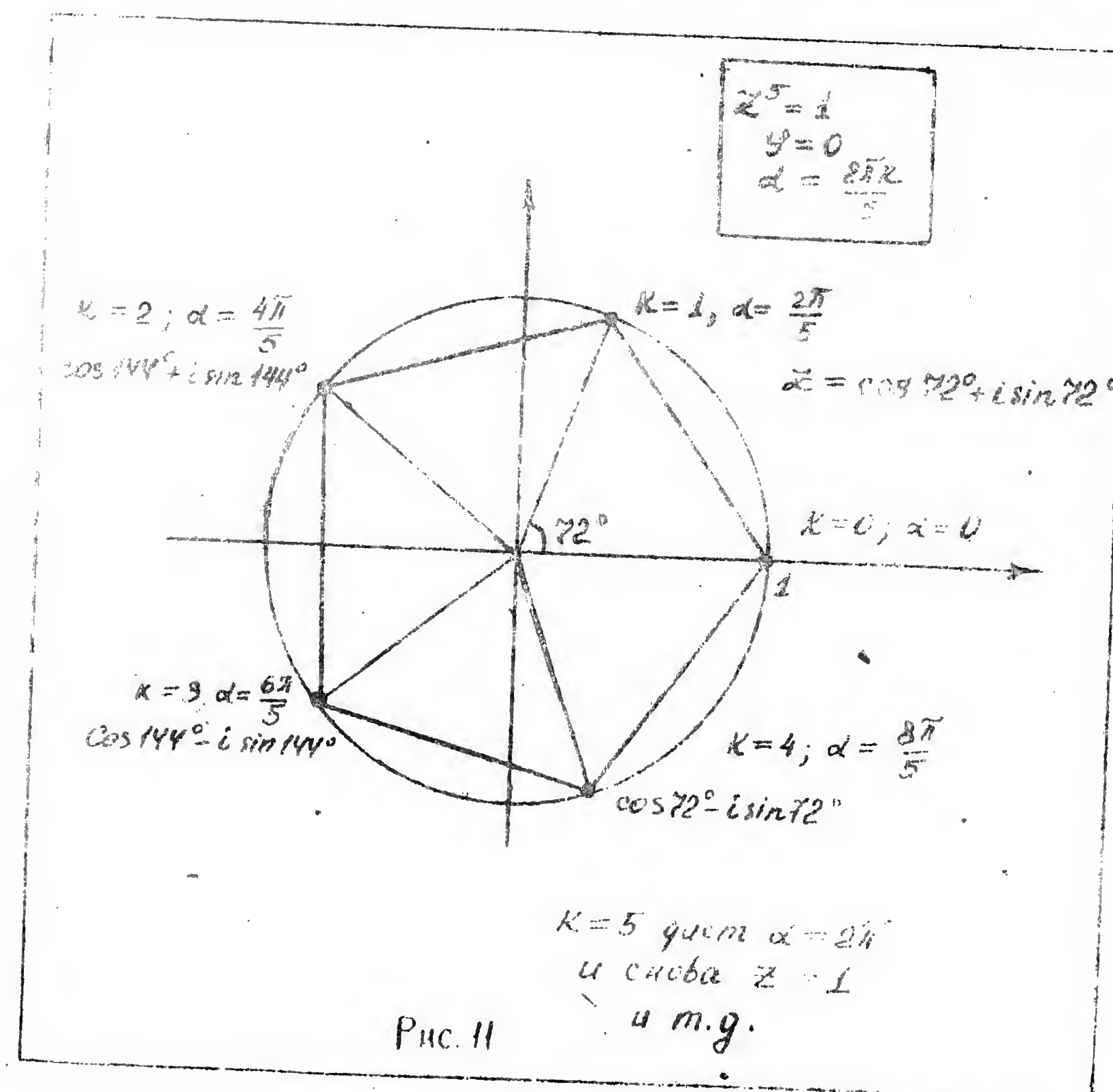
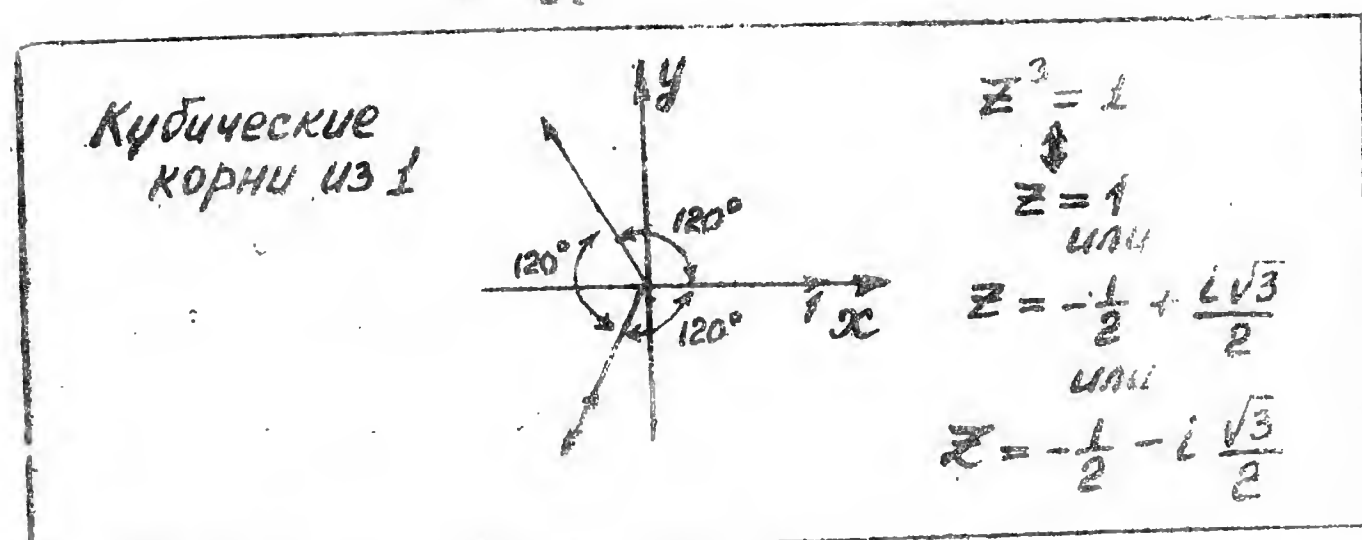


Рис. II



Задачи

Запишите в алгебраической форме и расставьте на комплексной плоскости все корни уравнения:

- | | |
|------------------|--------------------|
| I4-1. $z^2 = -2$ | I4-2. $z^2 = -2i$ |
| I4-3. $z^3 = 3$ | I4-4. $z^3 = -8i$ |
| I4-5. $z^4 = -4$ | I4-6. $z^6 = 1$ |
| I4-7. $z^8 = 1$ | I4-8. $z^{12} = 1$ |

I4-9. Запишите в алгебраической форме в общем виде корни уравнения

$$z^2 = W,$$

где W — произвольное комплексное число, $W = p + qi$.

§ 15. Корни из единицы

Комплексное число z называется корнем из единицы степени n , если $z^n = 1$. Всего существует ровно n корней степени n из 1 (см. § 14). Если принять обозначение $e_{\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, то корни степени n из 1 запишутся в виде

$$1 = e_0, e_{\frac{2\pi}{n}}, e_{\frac{2\pi \cdot 2}{n}}, \dots, e_{\frac{2\pi(n-1)}{n}}.$$

Если z — корень из единицы, то его порядком называется наименьшее целое положительное число d такое, что $z^d = 1$.

Например, существует четыре корня четвертой степени из единицы: $1, i, -1, -i$. Их порядок указан в таблице:

число	1	i	-1	-i
порядок	1	4	2	4

Задачи

I5-1. Докажите, что произведение двух корней n -й степени из единицы — снова корень n -й степени из единицы.

I5-2. Пусть $n \geq 2$ — целое. Каков порядок корня из единицы $e_{2\pi/n}$?

I5-3. Укажите порядок каждого из корней степени 6 из 1 (см. задачу I4-6).

I5-4. Пусть z — корень из единицы степени n . Докажите, что порядок z является делителем числа n .

I5-5. Число z называется первообразным корнем степени n из 1, если $z^n = 1$ и порядок z равен n .

Перечислите все первообразные корни степени 12 из 1 (см. задачу I4-8).

I5-6. Докажите, что $e_{2\pi k/n}$ является первообразным корнем степени n из 1 тогда и только тогда, когда дробь k/n несократима ($n \geq 2, k \geq 1$).

I5-7. Для натурального $n > 1$ положим:

$$\varphi(n) = (\text{количество первообразных корней степени } n \text{ из } 1).$$

Если же $n = 1$, то положим $\varphi(1) = 1$.

Пусть теперь n — натуральное число. Докажите, что сумма значений $\varphi(d)$, где d пробегает все делители числа n (включая 1 и n), равна числу n .

I5-8. Чему равна сумма всех корней n -й степени из 1?

I5-9. Пусть z_1, \dots, z_n — все корни n -й степени из 1, K — целое число.

Докажите, что

$$z_1^k + \dots + z_n^k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ не делится на } n, \\ n, & \text{если } k \text{ делится на } n. \end{cases}$$

§ 16. Задачи на повторение части II

Напишите функции $W(z)$, которым соответствуют следующие геометрические преобразования комплексной плоскости:

I6-1. Поворот вокруг точки 1 на 90° .

I6-2. Симметрия относительно прямой $y = x$.

I6-3. Докажите, что треугольник с вершинами z_1, z_2 и z_3 правильный с центром O , если и только если

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3|, \\ z_1 + z_2 + z_3 = 0. \end{cases}$$

I6-4. Существует важное геометрическое преобразование, называемое инверсией. Пусть на плоскости дана окружность с центром O и радиусом R . Всякая точка $A \neq O$ переводится инверсией в точку A' , определяемую двумя условиями:

$$\begin{cases} \text{луч } OA' \text{ совпадает с лучом } OA, \\ |OA'| = \frac{R^2}{|OA|}. \end{cases}$$

Напишите формулу функции комплексного аргумента $W(z)$, для которой соответствующим преобразованием является инверсия.

Докажите, что инверсия переводит:

- прямую, проходящую через O - в прямую;
- прямую, не проходящую через O - в окружность;
- окружность, проходящую через O - в прямую;
- окружность, не проходящую через O - в окружность.

I6-5. Дробно-линейным преобразованием называется преобразование комплексной плоскости, заданное функцией $W(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

(a, b, c, d - комплексные числа; предполагается, что $W(z)$ отлична от константы). Покажите, что функции $W(z) = \frac{1}{z}$,

$W(z) = z+m$, $W(z) = cz$ являются дробно-линейными.

I6-6. Докажите, что композиция отображений $g(f(z))$, где g - параллельный перенос, f - отображение $f(z) = \frac{1}{z}$,

является дробно-линейной функцией.

I6-7. Запишите формулой композицию отображений $h(f(g(z)))$, где $h(z) = z+1$, $f(z) = \frac{1}{z}$, $g(z) = z-1$.

I6-8. Запишите дробно-линейную функцию $\varphi(z) = \frac{2z-1}{z+3}$

в виде композиции $h(f(g(z)))$, где $f(z) = \frac{1}{z}$ (t - комплексное число), h и g - параллельные переносы.

I6-9. Докажите, что любую дробно-линейную функцию $W(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

у которой $c \neq 0$, можно записать в виде, указанном в задаче I6-8.

I6-10. Докажите, что композиция двух дробно-линейных функций также дробно-линейна.*

I6-11. Во что отображение $W(z) = \frac{1+z}{1-z}$ переводит

круг радиуса 1 с центром в начале координат?

I6-12. Пусть n - натуральное число. Обозначим через $\mu(n)$ сумму всех первообразных корней n -й степени из 1 (в частности, $\mu(1) = 1$).

а) Докажите, что сумма значений $\mu(d)$, где d пробегает все делители некоторого натурального числа n (включая 1 и n), равна 0.

б) Найдите $\mu(102)$.

в) Найдите $\mu(90)$.

г) Пусть n - произведение k различных простых чисел. Докажите, что $\mu(n) = (-1)^k$.

д) Пусть n делится на квадрат натурального числа. Докажите, что $\mu(n) = 0$.

Замечание. Функция $\mu(n)$ называется функцией Мёбиуса.

* На области определения функции не обязательно

Глава III. Многочлены и их корни

§ 17. Квадратные уравнения

Рассмотрим приведенное квадратное уравнение

$$z^2 + pz + q = 0,$$

где z — комплексное неизвестное, p и q — комплексные коэффициенты. Это можно решить точно так же, как в действительных числах

$$z^2 + 2z \cdot \frac{p}{2} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0;$$

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0;$$

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Следовательно, надо найти число, квадрат которого равен $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$. Это можно сделать, так как числа существуют, причем ровно два.

Обозначая в любом случае любое число, квадрат которого равен $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, через $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, получаем

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2,$$

$$z + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$$

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Таким образом, в данном "§" мы получили формулы для нахождения корней квадратного уравнения. Каждая формула имеет вид $W(z)$, где $W(z)$ — некоторое число, зависящее от z .

Вспомогательная формула, которую мы получили, имеет вид $z^2 + pz + q = 0$. Это уравнение имеет те же корни, что и уравнение $z^2 + pz + q = 0$. Это можно было бы доказать, но мы не будем этого делать, так как это было бы лишним.

Если p и q — действительные числа, то $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ — действительное число. В этом случае формулы для нахождения корней квадратного уравнения имеют вид

$$z = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Задачи

Решите уравнение:

$$[17-1.] \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

$$[17-2.] \quad z^2 + iz - 1 = 0.$$

[17-3.] Пусть z_1 и z_2 — различные корни уравнения

$$z^2 + pz + q = 0$$

(z_1, z_2, p, q — комплексные).

а) Докажите теорему Виета:

$$z_1 + z_2 = -p, \quad z_1 \cdot z_2 = q.$$

б) Докажите, что при всех z

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$

[17-4.] Докажите, что если уравнение

$$z^2 + pz + q = 0$$

имеет только один корень z_0 , то

$$z^2 + pz + q = (z - z_0)^2.$$

[17-5.] Дана функция

$$W(z) = z^2 + pz + q.$$

Докажите, что множество значений этой функции — вся комплексная плоскость.

[17-6.] Пусть z_1 и z_2 — различные корни квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$, где p и q — действительные, $p^2 - 4q > 0$. Докажите, что $\overline{z_1} = z_2$.

[17-7.] Пусть z_1 и z_2 — различные корни квадратного уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Докажите, что, если $\overline{z_1} = z_2$, то p и q — вещественные числа.

* § 18. Лама с собачкой

Как мы убедились в предыдущем параграфе, теорема о нахождении корней квадратного уравнения справедлива для комплексных чисел. Однако, если мы рассмотрим уравнение $z^2 + pz + q = 0$, где p и q — действительные числа, то мы увидим, что корни этого уравнения — действительные числа. Это можно доказать, но мы не будем этого делать, так как это было бы лишним.

Теорема. Пусть $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ — многочлен ненулевой степени (коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n — любые комплексные числа, $a_n \neq 0$). Тогда уравнение $P(z) = 0$ имеет хотя бы один корень в множестве комплексных чисел.

Эта теорема лежит в основе многих важных применений теории комплексных чисел. Ввиду её важности раньше её называли "основной теоремой алгебры".

Первое строгое доказательство этой теоремы дал великий немецкий математик К.Ф.Гаусс в конце 18 века. Мы не можем здесь доказать эту теорему строго. Взамен приведем наглядное рассуждение, проясняющее геометрическую сторону дела и известное под названием "Дама с собачкой".

Без ограничения общности можно рассматривать только многочлены вида

$$P(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

так как любой многочлен n -ой степени приводится к такому виду делением на коэффициент при z^n , по условию не равный нулю. Теперь представим себе, что точка z движется по комплексной плоскости следующим образом: выходит из положительного действительного числа

z , обходит в положительном направлении окружность с радиусом z и центром O и возвращается в исходное положение. При этом, очевидно, модуль z остается равным z , а $\arg z$ возрастает от 0 до 2π . Как ведет себя при этом z^n ?

Поскольку при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются,

$$|z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \arg z.$$

Отсюда следует, что при вышеуказанном движении z число z^n движется по окружности с центром O и радиусом z^n следующим образом: выходит из положительного числа z^n в положительном направлении, затем делает n кругов по этой окружности и в конце приходит в ту точку, из которой оно начало движение. Скажем, что точка z^n — это дама, которая, гуляя, n раз обходит круглую площадку и возвращается в свой дом — в точку z^n . Значение многочлена $P(z)$ при вышеуказанном движении z тоже как-то движется по комплексной плоскости, начиная и кончая движение в одной и той же точке: $P(z)$. Скажем, что $P(z)$ — это собачка, ко-

торая гуляет одновременно с дамой, и в конце приходит туда, откуда начала путь — в точку $P(z)$.

Представим себе, что радиус z достаточно велик. Тогда можно доказать, что расстояние между дамой и собачкой, равное $|z^n - P(z)|$, все время меньше радиуса того круга, по которому ходит дама (этот радиус равен $z^n = |z|^n$). Причина этого в том, что при возрастании z член z^n растет по модулю быстрее, чем все члены меньших степеней (см. задачу 18-3).

Можно сказать, что дама n раз обходит площадку по кругу, держа собачку на поводке длины меньшей, чем радиус этого круга. Ясно, что при таком коротком поводке собачка на своем пути тоже n раз обойдет вокруг точки O , хотя будет двигаться не по окружности, а по сложной замкнутой кривой (рис. 12).

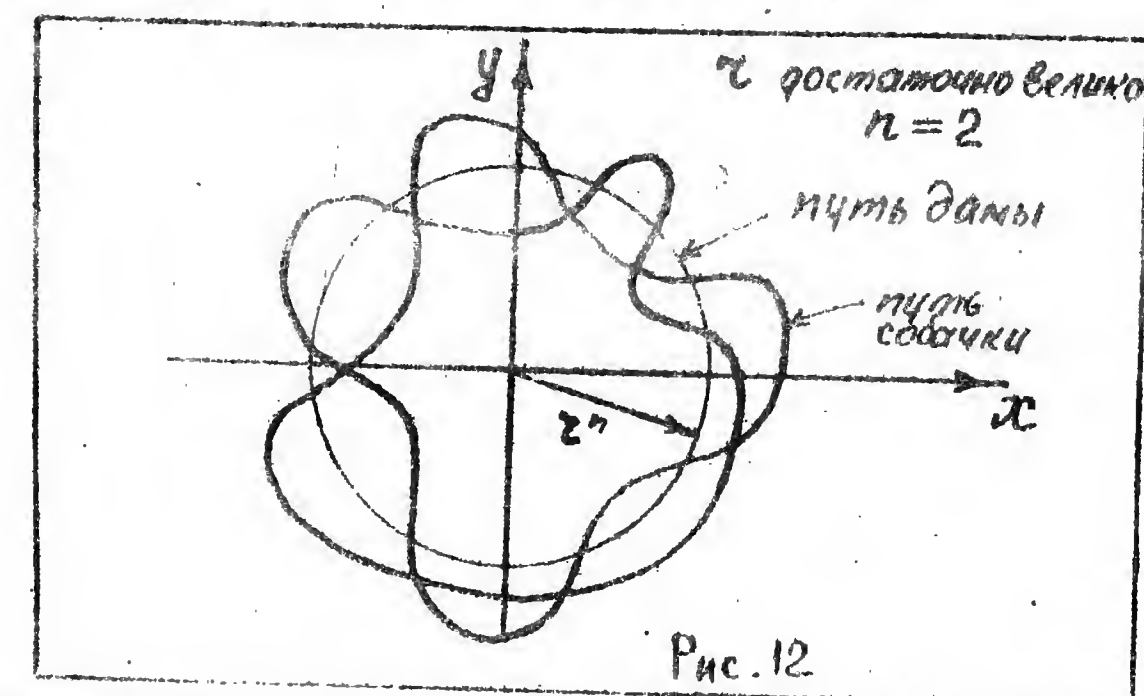


Рис. 12

Рассмотрим теперь крайний случай: радиус z очень мал. В этом случае все значения многочлена $P(z)$, где $|z| = z$ близки к значению $P(0) = a_0 \neq 0$ (см. задачу 17-4, а также рис. 13).

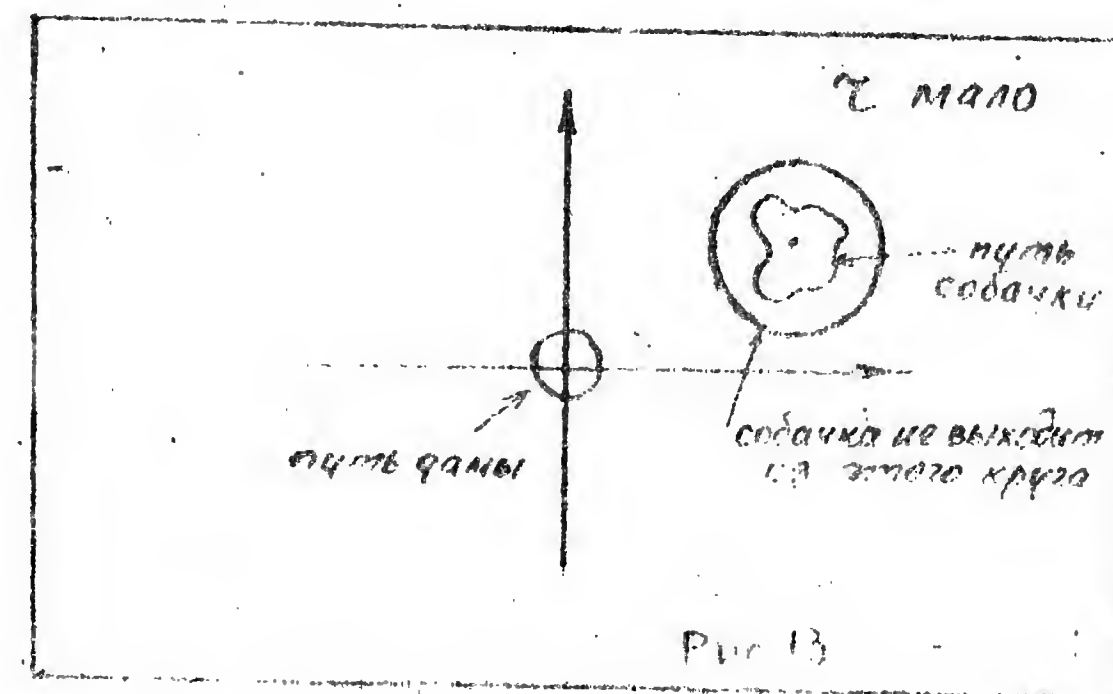


Рис. 13

можно сказать, что в этом случае собачка топчется вокруг точки a_0 на маленькой площадке, не содержащей точки O (если и далее уменьшать γ , это кончатся тем, что при $\gamma = 0$ вся "траектория" стянется в одну точку a_0).

Наконец, рассмотрим всю траекторию движения собачки в зависимости от параметра γ . При изменении γ эта траектория непрерывно смещается. При больших γ , как мы видели, эта траектория делает n петель вокруг точки O . С другой стороны, при малых γ вся эта траектория укладывается вблизи точки a_0 и, в частности, заведомо вокруг O не обходит. Значит, в процессе изменения γ траектория движения собачки должна в какой-то момент пройти через точку O .

Но каждый случай, когда траектория собачки проходит через точку O , дает корень нашего уравнения!

Задачи

18-1. Пусть $P(z) = z^2 + z + 1$. Начертите на листе клетчатой или миллиметровой бумаги траекторию $P(z)$, если z обходит окружность с центром O и радиусом 2. Для этого выберите на этой окружности 12 точек через равные промежутки:

$$z_k = 2 \left(\cos \frac{k\pi}{6} + i \sin \frac{k\pi}{6} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, 11\}.$$

Для каждого z_k вычислите $P(z_k)$ и нанесите соответствующую точку на плоскость. (Вычисление многочлена можно делать алгебраически, а можно и геометрически, по правилу параллелограмма). Затем проведите плавную цветную линию, выходящую из $P(z_0)$, идущую через $P(z_1)$, $P(z_2)$ и так далее и приходящую обратно в $P(z_0)$.

18-2. Выполняя предыдущее упражнение, вы начертили траекторию собачки при большом радиусе γ . В этом упражнении вы увидите, как меняется путь собачки при уменьшении γ .

а) Выполните задание упражнения 18-1 для случая, когда z обходит окружность с центром O и радиусом $\gamma = 1, 5$.

б) То же задание, если $\gamma = 1$; $\gamma = 0,5$.

Почтительно нарисовать все четыре кривые, полученные в упражнениях 18-1 и 18-2, на одном чертеже (чтобы не запутаться, советуем вам раскрасить их разными цветами).

В какой момент (при каком γ) собачка пройдет через начало координат?

18-3. а) Пусть $P(z) = z^3 + 1000z^2$. Докажите, что при $|z| > 1000$ выполнено неравенство

$$|z^3 - P(z)| < |z|^3.$$

б) Пусть $P(z) = z^3 + 1000z^2 + 1000z$. Докажите, что при $|z| > 2000$ выполнено неравенство

$$|z^3 - P(z)| < |z|^3 \downarrow$$

в) Пусть $P(z) = z^3 + 1000z^2 + 1000z + 1000$. Докажите, что при $|z| > 3000$ выполнено неравенство

$$|z^3 - P(z)| < |z|^3.$$

18-4. Пусть $P(z) = z^3 + 1000z^2 + 1000z + 1000$. Докажите, что при $|z| < \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ выполнено неравенство

$$|P(z) - P(0)| < 0,01 \downarrow$$

§ 19. Деление многочленов и теорема Безу

Мы говорим, что многочлен $P(z)$ делится на двучлен $z - z_0$, если

$$P(z) = (z - z_0)Q(z),$$

где $Q(z)$ - другой многочлен.

Чтобы узнать, делится ли $P(z)$ на $z - z_0$, можно выполнять "деление уголком", похожее на деление многозначных чисел.

Вот пример деления:

Делимое	$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 1 \\ - x^3 + x^2 \\ \hline - 3x^2 - 1 \\ - 3x^2 + 3x \\ \hline 3x - 1 \\ 3x + 3 \\ \hline - 4 \end{array}$	Делитель
		Частное
		$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-3x+3 \end{array}$
		Остаток

Это деление выполнялось по следующим этапам.

Сначала написали делимое и делитель. Потом подобрали множитель, на который надо умножить старший член делителя, чтобы получить старший член делимого. Этот множитель x^2 написали в графе для частного, умножили на него делитель и полученное выражение $x^3 \cdot x$ написали под делимым и вычли из него. Результат вычитания:

$$-3x^2 - 1$$

. С ним делали то же, что с делимым, и так повторяли до тех пор, пока это было возможно. Итак, многочлен

$$x^3 - 2x^2 - 1$$

при делении на $x+1$ дает в частном $x^2 - 3x + 3$ и в остатке -4 . Это можно записать формулой:

$$x^3 - 2x^2 - 1 = (x+1)(x^2 - 3x + 3) - 4.$$

В разобранном примере все коэффициенты были действительными. Но то же самое можно делать и в комплексном случае. Вот еще один пример:

$$\begin{array}{r} z^2 + iz - (1+i) \\ z^2 - z \\ \hline (1+i)z - (1+i) \\ (1+i)z - (1+i) \\ \hline 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} z-1 \\ z+(1+i) \end{array} \right.$$

В этом случае остаток получился равным нулю. Это значит, что

$$z^2 + iz - (1+i) = (z-1)(z+(1+i)).$$

Итак, всякий многочлен $P(z)$ можно разделить на двучлен $z - z_0$ с остатком. Теорема Безу утверждает, что этот остаток равен нулю в том и только в том случае, если z_0 есть корень многочлена $P(z)$. Чтобы её доказать, достаточно записать в общем виде результат деления $P(z)$ на $z - z_0$:

$$P(z) = (z - z_0) \cdot Q(z) + R,$$

где $Q(z)$ - многочлен-частное, а R - число-остаток. Подставив сюда $z = z_0$, получим $P(z_0) = R$, откуда следует, что

верждения теоремы.

Задачи

19-1. Пользуясь разобраным примером, решите уравнение

$$z^2 + iz - (1+i) = 0.$$

19-2. Разделите многочлен

$$iz^3 - z^2 + (1+i)z + (-1+i)$$

на $z+1$ и запишите формулой результат деления. Найдите все корни этого многочлена.

19-3. Найдите значение параметра ρ , при котором многочлен

$$z^3 - z^2 - z + \rho$$

делится на $z+1$ без остатка. При этом значении ρ найдите все корни многочлена.

19-4. Многочлены можно делить не только на двучлен: точно тем же способом делят с остатком многочлен на любой многочлен меньшей степени. Поделите столбиком многочлен $P(z) = z^5 + 4z^4 + 3z^3 + z + 1$ на $Q(z) = z^2 + 3z + 1$ с остатком. Проверьте, выполнено ли соотношение $P(z) = Q(z) \cdot H(z) + R(z)$, где $H(z)$ - частное, $R(z)$ - остаток; разумеется, степень остатка должна быть меньше степени делителя.

19-5. При каких комплексных значениях ρ многочлен $z^n - 1$ делится на двучлен $z - \rho$?

19-6. n - натуральное число. Каковы будут частное и остаток от деления многочлена $z^n - 1$ на $z - 1$?

§ 20. Разложение многочлена на множители

Пусть дан многочлен n -ой степени

$$P(z) = \rho_n z^n + \rho_{n-1} z^{n-1} + \dots + \rho_1 z + \rho_0,$$

где $\rho_n \neq 0$. По "основной теореме алгебры", у него есть хотя бы один корень a_1 . По теореме Безу, наш многочлен делится на $z - a_1$, то есть представляется в виде

$$P(z) = (z - a_1) Q(z),$$

где $Q(z)$ - многочлен степени $n-1$.

К $Q(z)$ снова можно применить основную теорему алгебры и тео-

рану B_2 и представить его в виде

$$Q(z) = (z - a_2) R(z),$$

и так далее. В конце концов мы получаем равенство

$$P(z) = (z - a_1) \dots (z - a_n) \cdot C, \quad (20.1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n - корни многочлена $P(z)$, C - постоянная.

Чтобы понять, чему равна C , представим себе, что мы раскрыли все скобки в правой части равенства (20.1). Очевидно, при этом появится член $C \cdot z^n$, а все остальные слагаемые будут содержать z в степени, меньшей, чем n . Стало быть, после приведения подобных коэффициентов при z^n будет равен по-прежнему C . Поскольку у многочлена $P(z)$ этот коэффициент равен P_n , имеем $P_n = C$.

В итоге получаем важное утверждение:
в комплексных числах всякий
многочлен n -й степени
раскладывается в произведение следующего вида:

$$P(z) = P_n(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n), \quad (20.2)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n - корни многочлена $P(z)$, P_n - его старший коэффициент.

Числа a_1, a_2, \dots, a_n не обязаны быть различными; некоторые из них (или даже они все) могут быть равны между собой. Например,

$$z^2 - 2z + 1 = (z - 1)^2,$$

$$z^2 - 2iz - 1 = (z - i)^2,$$

$$z^3 + 3z^2 + 3z + 1 = (z + 1)^3,$$

и т.п.

Более, количество различных корней многочлена n -ой степени может быть любым натуральным числом от 1 до n . Но если каждый корень считать столько раз, сколько он входит в наше произведение (это число называется кратностью данного корня), то всякий много-

член n -ой степени имеет ровно n корней. Это утверждение называется теоремой Гаусса.

Задачи

Разложите на линейные множители многочлены:

[20-1.] $P(z) = z^2 + z + 2$

[20-2.] $P(z) = z^6 - 1$

Сколько различных корней и какой кратности имеют многочлены:

[20-3.] $z^3 - z^2 - z + 1$? ↓

[20-4.] $z^4 + 2z^2 + 1$? ↓

Сократите дроби:

[20-5.] $\frac{z^2 + 1}{z^3 + (i-3)z^2 - 2iz - 1}$ ↓

[20-6.] $\frac{z^4 + z^2 + 1}{z^2 + z + 1}$

[20-7.] Придумайте и напишите многочлен со старшим коэффициентом 2, имеющий однократными корнями числа $-1, 3+4i, 3-4i$, и не имеющий других корней.

[20-8.] Придумайте и напишите многочлен со старшим коэффициентом 1, имеющий корнями все первообразные корни степени 12 из 1 (см. задачу 15-5) и только их.

§ 21. Задачи на повторение части III

[21-1.] Разложите на множители следующий многочлен и найдите все его корни:

$$P(z) = z^3 + iz - 1 - i.$$

[21-2.] Пусть x_1, x_2, x_3 - корни кубического уравнения $z^3 + pz^2 + qz + r = 0$. Докажите равенства:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p,$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q,$$

$$x_1x_2x_3 = -r.$$

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n - корни уравнения

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

2I-3. Докажите, что $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n a_n$.

2I-4. Докажите, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1$.

2I-5. а) Найдите все корни уравнения

$$z^8 + z^4 + 1 = 0.$$

б) Разложите многочлен $z^8 + z^4 + 1$ на линейные множители.

2I-6. Представьте многочлен $z^8 + z^4 + 1$ в виде произведения четырех квадратных трехчленов с действительными коэффициентами.

2I-7. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ - многочлен с действительными коэффициентами, и пусть W - его корень. Докажите, что \bar{W} - тоже его корень.

2I-8. Докажите, что всякий многочлен с действительными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

2I-9. а) Решите уравнение $z^6 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

б) Найдите $\sin 72^\circ$ и $\cos 72^\circ$.

в) Вычислите сторону правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса 1.

2I-10. а) Пусть $\xi = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Найдите произведение

$$(1-\xi)(1-\xi^2) \dots (1-\xi^{n-1}).$$

б) Пусть $A_1 A_2 \dots A_n$ - правильный n -угольник, вписанный в круг радиуса 1. Найдите произведение длин отрезков

$$A_1 A_2 \cdot A_1 A_3 \cdot \dots \cdot A_1 A_n.$$

2I-11. Пусть m и n - натуральные числа.

Докажите:

а) если m делится на n , то многочлен $z^m - 1$ делится на многочлен $z^n - 1$ без остатка;

б) обратно, если $z^m - 1$ делится на $z^n - 1$, то m делится на n .

Часть IV. На пути к ТФКП.

От читателя ожидается здесь готовность переключаться на точки зрения, отличные от принятых в алгебраических частях, и добрая воля к сотрудничеству.

Г. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. М., 1947, с. 9.

§ 22. Введение

В этой последней части мы немного расскажем Вам о теории функций комплексного переменного (на студенческом жаргоне: ТФКП). При этом, по необходимости, мы будем давать гораздо меньше строгих доказательств и точных определений, чем в предыдущих частях: для строгости и точности нам с Вами не хватает техники (основанной главным образом на свободном владении понятиями предела и интеграла).

Одно из основных в ТФКП - понятие производной от функции комплексного переменного. Поэтому мы начнем наш рассказ с этого понятия, а затем объясним, как на множестве комплексных чисел определить показательную, тригонометрические и логарифмические функции (не входя, разумеется, в противоречие с определением этих функций от вещественного аргумента).

§ 23. Производная

Производная действительной функции действительного аргумента $f(x)$ в произвольной точке x_0 равна, по определению,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Для комплексной функции комплексного аргумента $W(z)$ определение производной буквально такое же:

$$W'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{W(z_0 + \Delta z) - W(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta z}.$$

Для комплексных функций верны формулы, известные из школьного курса для действительных функций:

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$$

$$(cf(z))' = c \cdot f'(z), \quad c = \text{const}$$

$$(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$$

$$[f(g(z))]'_z = f'_g(g) \cdot g'_z(z)$$

(правило диф-

ференцирования сложной функции).

Доказываются эти формулы так же, как и соответствующие формулы для действительных функций.

Всякий многочлен с произвольными комплексными коэффициентами имеет производную, и формула её такая же, как в действительном случае:

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)' = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1$$

Отношение двух многочленов (называемое рациональной функцией) дифференцируемо всюду, где оно определено, то есть там, где знаменатель не равен нулю.

Вот, для примера, доказательство формулы $(z^3)' = 3z^2$:

$$f(z) = z^3, \\ f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - z_0^3}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{3z_0^2 \Delta z + 3z_0 (\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (3z_0^2 + 3z_0 \Delta z + (\Delta z)^2)$$

$$= 3z_0^2$$

Итак, пока что мы видим полное формальное сходство между действительной и комплексной теориями. Несоизмеримости начнутся в следующем параграфе.

Задача

23-1. а) Пусть z_0 - корень многочлена $P(z)$. Докажите, что z_0 - корень кратности, большей единицы, в том и только в том случае, если z_0 - также и корень его производной $P'(z)$.

б) Пользуясь этим, решите уравнение

$$z^3 + (2-i)z^2 + (1-2i)z - i = 0.$$

§ 24. Пример отсутствия производной

Несмотря на внешнее сходство написанных нами формул для действительного и комплексного случаев, для комплексной функции существование производной - гораздо более сильное условие, чем для действительной. И многие естественно определяемые комплексные функции оказываются недифференцируемыми. В этом параграфе мы разберем один типичный пример.

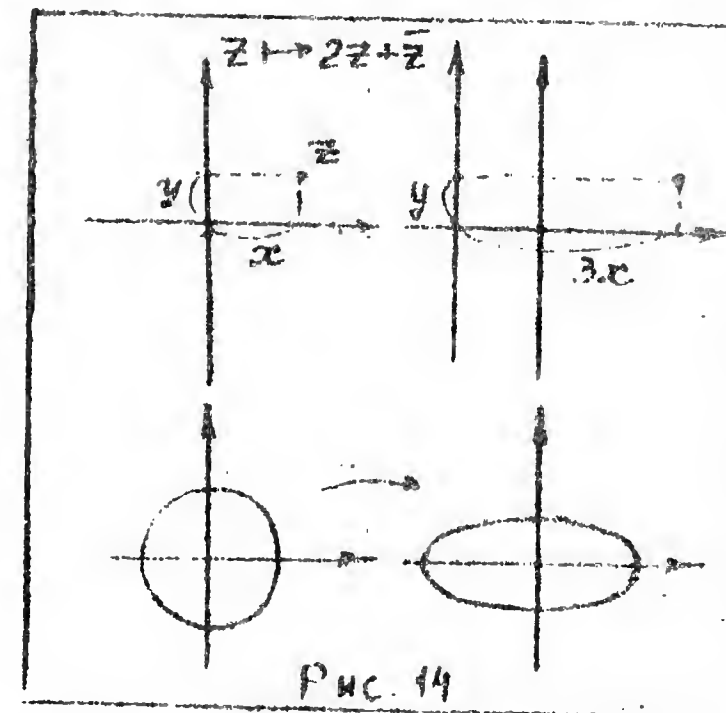
Пусть $W(z) = 2z + \bar{z}$. Легко видеть, что $W(x+iy) = 3x + iy$; можно сказать, что отображение, соответствующее функции $W(z)$, производит растяжение в 3 раза в направлении действительной оси (рис. 14).

Попытаемся найти $W'(z)$:

$$W'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{W(z + \Delta z) - W(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{W(z) + W(\Delta z) - W(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{W(\Delta z)}{\Delta z}.$$



Чему же может быть равен этот предел?

Пусть Δz стремится к 0 вдоль вещественной оси, иными словами, $\Delta z = h$, где h вещественно. Тогда $W(\Delta z) = 3h$ и имеем:

$$W'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3. \quad \text{Значит, } W'(z) = 3. \quad ? \text{ Не будем торо-}$$

Итаться с выводами, а посмотрим, что будет, если Δz отсчитывать не вдоль мнимой оси. В этом случае $\Delta z = ih$, где h вещественно, $W(\Delta z) = ih$, и получаем $W'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ih}{h} = i$.

Но производная не может одновременно равняться и 3, и 1! Значит, производной у нашей функции не существует ни в одной точке.

С помощью аналогичных рассуждений можно убедиться, что нигде не дифференцируемы такие функции, как $W(z) = \bar{z}$, $W(z) = \operatorname{Re}(z)$, $W(z) = \operatorname{Im}(z)$, $W(z) = |z|$.

§ 25. В чем же дело?

Итак, формальное сходство определений (и простейших свойств) производной от вещественной и комплексной функций оказалось обманчивым.

Теперь неизбежно встанут два вопроса.

Можно ли, глядя на формулу, задающую функцию, понять, будет ли эта функция дифференцируемой?

Как строить дифференцируемые функции, отличные от многочленов и рациональных функций?

На оба эти вопроса есть более или менее исчерпывающие ответы; мы не можем здесь привести точные формулировки, но попытаемся приблизительно пояснить, в чем дело.

Отличие многочленов и рациональных функций от недифференцируемых функций из § 24 состоит в том, что формулы, задающие многочлены и рациональные функции, используют только "четыре действия арифметики": операции сложения, вычитания, умножения и деления, тогда как в примерах из § 24 в формулах, кроме этого, участвуют также операции, как комплексное сопряжение, взятие вещественной или мнимой части, взятие модуля и т.п. Для наших целей эти операции следует считать "чужеродными", их присутствие в формуле, задающей функцию, препятствует дифференцируемости. Таков, в общих чертах, ответ на первый из наших вопросов.

Теперь о втором вопросе. Оказывается, для построения любой дифференцируемой функции комплексного переменного, кроме вышеупомянутых четырех арифметических действий, достаточно воспользоваться еще операцией предельного перехода (разумеется, эта операция нужна в усложненном).

В оставшейся части книги мы будем определять элементарные функции комплексного переменного, используя "чужеродные" операции, но эти функции окажутся дифференцируемыми. Как Вы теперь понимаете, этот факт отнюдь не самоочевиден.

§ 26. Экспонента (показательная функция)

Из всех показательных функций удобнее всего распространять на комплексные числа ту, основанием которой является знаменитое иррациональное число $e = 2,718...$ — основание натуральных логарифмов.

Итак, нам надо определить значения e^z при всех комплексных z . Разумеется, мы хотим, чтобы при сложении показателей степени перемножались:

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w.$$

Поэтому

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Что такое e^x , мы уже знаем. Остается определить e^{iy} .

Вспомним наше обозначение из § 15: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Согласно свойствам умножения комплексных чисел, $e^{iy_1+y_2} = e^{iy_1} \cdot e^{iy_2}$, т.е. функция $y \mapsto e^{iy}$ ведет себя похоже на показательную функцию. Это наводит на мысль определить e^y с помощью следующей формулы Эйлера (знаменитой и очень важной):

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Иначе говоря, e^{iy} — это число с модулем 1 и аргументом y .

Подчеркнем, что мы ниоткуда не вывели формулу Эйлера, с точки зрения логики мы её приняли за аксиому. Но аксиомы в математике не берутся "с потолка". Оправдание формулы Эйлера в том, какая красивая теория из неё получается.

Итак, общая формула для комплексной экспоненты такова:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Посмотрим, что же у нас получилось.

Во-первых, если a — вещественное число, то наша новая определения e^a совпадает со старым:

$$e^{a+0i} = e^a (\cos 0 + i \sin 0) = e^a (1 + 0i) = e^a.$$

Во-вторых, легко проверить, что для нашей показательной функции комплексного переменного выполняется, как и в действительном случае, формула $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ (см. задачу 26-1).

Наконец, оказывается, что функция e^z дифференцируема на всей комплексной плоскости. Более того, как и в вещественном случае, справедлива формула $(e^z)' = e^z$.

Доказательство этой важной формулы намечено в следующем параграфе.

Задачи

26-1. Докажите тождество $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

26-2. Докажите, что e^z — периодическая *) функция с периодом $2\pi i$ и что этот период — наименьший.

26-3. Вычислите $e^{i\pi}$.

26-4. Найдите все значения z , для которых $e^z = 1$.

26-5. Найдите все значения z , для которых $e^z = i$.

§ 27. Производная экспоненты

Покажем, что производная функции e^z равна e^z . По определению производной,

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \\ &= e^z \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Остается показать, что последний предел в комплексном случае, как и в действительном, существует и равен единице.

Чтобы сделать это, надо принять во внимание то, как ведут себя синус, косинус и экспонента действительных аргументов, близких к нулю. Как известно, $\sin \alpha$ близок к α при малых α . Точнее, $\sin \alpha = \alpha + o(\alpha)$, где $o(\alpha)$ означает величину, отношение которой к α стремится к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. (Это просто иная формулировка того факта, что синус имеет в нуле производную, равную 1).

*) Определение периодичности — такое же, как и в действительном случае: функция $f(z)$ — периодическая с периодом $T \neq 0$, если $f(z+T) = f(z)$.

Аналогично, $\cos \alpha = 1 + o(\alpha)$, так как $\cos 0 = 1$ и косинус в нуле имеет производную, равную нулю.

Далее, поскольку формула $(e^x)' = e^x$ для действительных x уже доказана, $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + o(\Delta x)$.

Теперь имеем:

$$\begin{aligned} e^{\Delta z} &= e^{\Delta x + i\Delta y} = e^{\Delta x} (\cos \Delta y + i \sin \Delta y) = \\ &= e^{\Delta x} \cos \Delta y + i e^{\Delta x} \sin \Delta y = \\ &= (1 + \Delta x + o(\Delta x))(1 + o(\Delta y)) + i(1 + \Delta x + o(\Delta x))(y + o(\Delta y)). \end{aligned}$$

Раскроем скобки; при этом сумма всех членов, содержащих $o(\Delta x)$ или $o(\Delta y)$ в качестве сомножителя, есть, очевидно, $o(\Delta z)$ (т.к. отношение каждого из этих членов к Δz стремится к нулю при $\Delta z \rightarrow 0$).

С учетом этого получаем, что

$$e^{\Delta z} = 1 + \Delta z + o(\Delta z),$$

откуда

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z + o(\Delta z)}{\Delta z} = 1.$$

Это завершает доказательство того, что $(e^z)' = e^z$.

§ 28. Тригонометрические функции

Тригонометрические функции, как мы увидим, можно определить через экспоненту. Начнем с того, что выразим через экспоненту синус и косинус от вещественных чисел.

Для этого запишем равенства

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}$$

(первое из них — формула Эйлера, второе — та же формула, в которой всюду x заменено на $-x$).

Из них находим:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (28.1)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (28.2)$$

А теперь положим, по определению, для всех комплексных z :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (28.3)$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (28.4)$$

Очевидно, что для вещественных z наши функции $\cos z$ и $\sin z$ совпадают с обычными (это следует из формул (28.1) и (28.2)).

Так как $\cos z$ и $\sin z$ выражаются через экспоненту, являющуюся дифференцируемой функцией, они дифференцируемы (см. задачу 28-1).

Решив задачи к этому параграфу, Вы убедитесь, что для синуса и косинуса в комплексной области верно большинство свойств обычных синуса и косинуса (в частности, все тригонометрические тождества, т.к. все они выводятся из тождеств, перечисленных в задаче 28-3).

Задачи

В этих задачах функции \sin и \cos рассматриваются на всей области комплексных чисел.

[28-1.] Докажите, формулы: $(\cos z)' = -\sin z$, $(\sin z)' = \cos z$. ↓

[28-2.] Докажите, что $\sin z$ и $\cos z$ — периодические функции с периодом 2π и что этот период — наименьший.

[28-3.] Докажите формулы:

а) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$;

б) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

[28-4.] Найдите все комплексные решения уравнений:

а) $\sin z = 0$;

б) $\cos z = 0$.

[28-5.] Верно ли, что для всех комплексных чисел z выполнено неравенство $|\sin z| \leq 1$?

[28-6.] Найдите все комплексные решения уравнения $\sin z = 1$.

z , для которых $\operatorname{Im}(\cos z) = 0$.

[28-7.] Докажите формулу

$$\begin{aligned} & \cos \alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + \dots + \cos(\alpha + n\beta) = \\ &= \frac{\sin(\alpha + (n+1/2)\beta)}{2 \sin \beta/2} - \frac{\sin(\alpha - \beta/2)}{2 \sin \beta/2} \quad \downarrow \end{aligned}$$

б) Напишите формулу для следующей суммы:

$$\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + n\beta).$$

§ 29. Логарифм

Раз мы определили показательную функцию e^z , можно попытаться определить и обратное действие — логарифмирование. По определению, $\ln z$ — натуральный логарифм числа z , то есть такая степень, в которую надо возвести e , чтобы получить z .

Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}$, $\ln z = x + iy = w$. Тогда $z = e^w \Leftrightarrow re^{i\varphi} = e^x e^{iy}$. Отсюда:

$$r = e^x \quad (29.1)$$

$$e^{i\varphi} = e^{iy} \quad (29.2)$$

Из равенства (29.1) следует, что $x = \ln r$, однако y из равенства $e^{i\varphi} = e^{iy}$ определяется неоднозначно: мы можем только утверждать, что $\arg(e^{i\varphi}) = \arg(e^{iy})$, откуда

$y = \varphi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Итак, $\ln z$ определен неоднозначно. Коротко можно записать: $\ln(r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = \ln r + i\varphi + 2\pi i k$ (логарифм нуля, как и в вещественном случае, не определен).

В принципе с неоднозначностью Вы уже знакомы: например, если $x > 0$ — действительное число, то число y , квадрат которого равен x , определено неоднозначно, однако можно выбрать "однозначную ветвь" функции $y = \sqrt{x}$ (называемую в школе арифметическим корнем) на всей области определения квадратного корня, т.е. на всем множестве $x \geq 0$. В области комплексных чисел дело обстоит хуже: невозможно, в частности, выбрать для каждого

7-7. Заметьте, что точка z лежит на среднем перпендикуляре к отрезку с концами 0 и 1 .

7-14. Согласно определению косинуса, $\cos \varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}$, где вектор (x, y) образует угол φ с осью OX .

7-16., 7-17. Воспользуйтесь тем, что $\sin \arg z = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где $z = x+iy$.

8-4. Ответ: $\cos(-\frac{7\pi}{11}) + i \sin(-\frac{7\pi}{11})$.

8-8. Заметьте, что $\cos 5\varphi = \operatorname{Re}(\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi)$; теперь раскройте скобки в левой части формулы Муавра для $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5$.

9-7. Искомое множество — средний перпендикуляр к отрезку с концами V и W .

9-8. Ответ: вся плоскость, кроме луча $] -\infty; 0]$ на действительной оси.

9-10. Из уравнения следует, что z^2 действительно и отрицательно. Воспользуйтесь задачей 3-7.

9-13. Представьте z в виде $x+iy$ и запишите уравнение в виде системы двух уравнений с действительными неизвестными.

9-17a. Один из возможных ответов: $\begin{cases} u+W = V+Z, \\ V-u = \pm i(u-z). \end{cases}$

9-19. Расположите центр параллелограмма в точке 0 . Тогда в его вершинах будут числа $Z, W, -Z, -W$. Теперь найдите середины сторон. Для нахождения центров квадратов воспользуйтесь задачей 9-15.

10-1. Искомое преобразование — осевая симметрия. С какой осью?

10-9. Искомое преобразование будет гомотетией с коэффициентом 2. Каков её центр?

10-10. Искомое преобразование — поворот. С каким центром?

10-11a. Если $t \neq 1$, то наше преобразование будет поворотом на угол $\arg t$. С каким центром?

11-1. От нас требуется найти $f(g(z))$ для любого z .

$$f(g(z)) = f((4-3i)z + 6-2i) = 2((4-3i)z + 6-2i) + 1 = \dots$$

11-2. Ответ: $f(g(z)) = \frac{10-z}{3z-16}$.

11-5, 11-6. Если в этих двух задачах у Вас получились одинаковые ответы, значит, где-то Вы ошиблись.

11-7, 11-8. В этих задачах ответ получится одинаковый.

12-2. Согласно сноске на стр. 29, искомое множество — окружность, центр которой лежит на прямой, соединяющей 0 и $1/2i$. Если Вы найдёте две точки окружности, лежащие на этой прямой, то Вы найдёте её центр и радиус.

12-4. Воспользуйтесь тем, что $\operatorname{Re}(z) > 1 \Leftrightarrow |z| > |z-2|$ (подумайте, как это доказать).

12-8. Наша полоса — пересечение полуплоскостей $\operatorname{Re}(z) < 1$ и $\operatorname{Re}(z) > 1$. Найдите образ каждой из них и возьмите пересечение этих образов.

13-8d. Заметьте, что, если $|z| = 1$, то $1/z = \bar{z}$.

14-9. Ответ:

$$z = \begin{cases} \pm \left(\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} + i \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} \right), & \text{если } q \geq 0, \\ \pm \left(\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} - i \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2+q^2}}{2}} \right), & \text{если } q < 0. \end{cases}$$

15-5. Всего существуют 4 первообразных корня из 1 степени 12.

15-7. Рассортируйте корни степени n из единицы в зависимости от их порядка.

15-8. Умножьте искомую сумму на $e^{2\pi i/n}$.

16-2. Ищите ответ в виде $W = a\bar{z}$, где a — постоянная.

16-3. Задачу можно переформулировать так: треугольник ABC — правильный с центром O , если и только если

$$\begin{cases} |OA| = |OB| = |OC|, \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0. \end{cases}$$

Докажите, что

это утверждение равносильно следующему:

треугольники AOB , BOC , COA - равнобедренные с углом 120° при вершине O .

I6-4. Разберите сначала случай, когда $R=1$, и докажите, что в этом случае наше преобразование задается функцией $W = \frac{1}{z}$.

I6-8. Воспользуйтесь равенством:

$$\frac{2z-1}{z+3} = \frac{2(z+3)-7}{z+3} = 2 - \frac{7}{z+3}$$

I6-II. Представьте это отображение в виде $h(f(g(z)))$, где $f(z) = t/z$ (t - постоянная), h и g - параллельные переносы.

I6-I2a. См. указание к задаче I5-7.

I6-I2b. Из задачи I6-I2a следует равенство

$$\mu(102) + \mu(51) + \mu(34) + \mu(6) + \mu(2) + \mu(13) + \mu(17) + \mu(1) = 0$$

То, что $\mu(1) = 1$, мы знаем. Если нам удастся найти $\mu(2)$, $\mu(3)$, $\mu(17)$, $\mu(6)$, $\mu(34)$, $\mu(51)$, то задача будет решена.

I7-4. Заметьте, что уравнение имеет только один корень в том и только том случае, когда $(\rho/2)^2 = q$. Чему тогда равно z_0 ?

I7-5. Число a принадлежит множеству значений функции $W(z)$ в том и только том случае, когда существует такое z , что $W(z) = a$. Иными словами, множество значений функции $W(z)$ - это множество тех a , для которых уравнение $W(z) = a$ имеет решение.

I7-7. Воспользуйтесь теоремой Виета (задача I7-3a).

I8-3b. Воспользуйтесь неравенством 6.1 и тем фактом, что $|z^2| > |z|$ при $|z| > 1$.

I8-4. Если $|z| < 1$, то $|z^2| < |z|$, $|z^3| < |z|$.

I9-4. Ответ: $H(z) = z^3 + z^2 - 4z + 14$; $R(z) = 37z - 13$.

I9-5. Воспользуйтесь теоремой Безу.

20-3. Разложите на множители: $z^3 - z^2 - z + 1 = z^2(z-1) - (z-1) = (z^2-1)(z-1) =$

20-4. Заметьте, что $z^4 + 2z^2 + 1 = (z^2 + 1)^2$.

20-5. Чтобы сократить дробь, надо найти общие множители у числителя и знаменателя. А для этого, согласно теореме Безу, достаточно найти их общие корни.

21-3, I1-3. Раскройте скобки в правой части разложения (20.2).

2I-6. В разложении (20.2) объедините в пары множители, соответствующие сопряженным корням.

2I-9a. Поделите обе части на z^2 и сделайте замену переменной $W = z + \frac{1}{z}$.

2I-9b. Пусть $z = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$. Заметьте, что: $z^5 = 1$; $z^5 - 1 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$.

2I-IIb. Если $z^m - 1$ делится на $z^n - 1$, то всякий корень из единицы степени n является корнем из единицы степени m . В частности, если ε - первообразный корень из единицы степени n (см. задачу I5-5), то $\varepsilon^m = 1$.

28-I. Воспользуйтесь формулой для производной экспоненты и правилом дифференцирования сложной функции.

28-5. Ответ: нет.

28-7a) Заметьте, что $\cos(\alpha + m\beta) = \operatorname{Re}(e^{i\alpha} \cdot (e^{i\beta})^m)$. Воспользуйтесь формулой суммы геометрической прогрессии.

З а д а н и е №

Действия с комплексными числами и комплексная плоскость

Обязательные задачи: №№ I-9; I-II; 2-4; 2-5; 2-10; 2-II; 2-13b; 3-2; 3-4a; 3-II; 4-I; 5-I; 5-3; 5-4; 6-3; 6-7; 6-12; 6-13; 7-I; 7-4; 7-8; 7-9; 7-II; 8-3; 8-5; 9-5; 9-10.

Дополнительные задачи: №№ I-2; 2-12; 3-5; 3-8; 5-6; 5-10; 5-II; 7-6; 7-16; 8-8; 9-13; 9-19.

Срок присылки задания №

К р и т е р и и о ц е н о к

Обязательные задачи: "зачет" - решено I7-22 задачи;
"4" - решено 23-26 задач;
"5" - решено 27-29 задач.
Дополнительные задачи: "4" - решено 6-8 задач;
"5" - решено 9-12 задач.

З а д а н и е №

Функции и отображения комплексной плоскости

Обязательные задачи: № 10-1; 10-2; 10-5; 10-6; 10-7; 10-8;
11-1; 11-2; 11-6; 11-7; 12-1; 12-2; 12-3; 12-4; 12-5; 13-5;
13-7в; 13-8а; 13-8б; 13-8в; 13-8д.

Дополнительные задачи: № 10-9; 10-10; 10-11а; 11-11; 11-12;
12-6; 12-7; 12-8; 12-10; 12-11; 16-2; 16-3; 16-8; 16-11.

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" - решено не менее 14 задач;

"4" - решено не менее 13 задач;

"5" - решено не менее 20 задач.

Дополнительные задачи: "4" - решено 6-7 задач;

"5" - решено 8-14 задач.

Срок присылки задания №

З а д а н и е №

Корни из комплексных чисел

Обязательные задачи: № 14-2; 14-3; 14-5; 14-6; 14-7; 14-8; 15-3;
15-8; 17-1; 17-2; 17-3а; 17-3б; 17-4; 17-6; 17-7.

Дополнительные задачи: № 15-2; 15-4; 15-5; 15-6; 16-4а; 16-4б;
16-4в; 16-4г; 16-12а; 16-12б; 16-12в; 16-12г; 16-12д.

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" - решено 9-11 задач;

"4" - решено 12-13 задач;

"5" - решены 14-15 задач.

Дополнительные задачи: "4" - решено не менее 5 задач;

"5" - решено не менее 9 задач.

Срок присылки задания №

З а д а н и е №

Многочлены с комплексными коэффициентами

Обязательные задачи: № 18-1; 18-2; 19-3; 19-4; 19-5; 20-1;
20-2; 20-3; 20-5; 20-6; 20-7; 20-8; 21-1; 21-5а,б; 21-6; 21-9а.

Дополнительные задачи: № 18-3а; 18-3б; 18-3в; 18-4; 19-6; 21-2;
21-3; 21-4; 21-7; 21-8; 21-9б; 21-9в; 21-10а; 21-10б; 21-11а; 21-11б.

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" - решено не менее 9 задач;

"4" - решено не менее 12 задач;

"5" - решено 15-16 задач.

Дополнительные задачи: "4" - решено 6-9 задач;

"5" - решено не менее 10 задач.

Срок присылки задания №

Регистр НИИОТ АН СССР

120227 Москва, ул. Ломоносова, 6

Заказ № 255 Тираж 3000

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ КИБЕРНЕТИКА
ВНТК «ШКОЛА»
ВЗМШ АПН СССР при МГУ

А. Ю. ВАЙНТРОБ

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Препринт

МОСКВА 1990

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ КИБЕРНЕТИКА
ВНТК "ШКОЛА"
ВЗМШ АН СССР при МГУ

А.Ю. Вайнтроб

ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Препринт

Москва 1990

7867

В настоящей брошюре изложены начальные главы классической теории цепных дробей в форме, предназначенной для заочного обучения интересующихся математикой школьников. Она может быть использована также как пособие для работы математических кружков и классов, как основа для факультативного курса в восьмилетней и средней школе.

© Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"
ВЗМШ АПН СССР при МГУ, 1990

7867

I-2

Лекция 1: Две загадки

1.1. Известно приближенное значение числа пи, найденное Архимедом: $\pi \approx \frac{22}{7}$. Но почему выбраны именно седьмые доли, а не шестые или, скажем, десятые?

Поймем сначала, что значит дать наилучшее приближение к числу α с помощью дробей со знаменателем q . Для этого надо найти такое p , что $|p/q - \alpha|$ имеет минимальное значение. Графически это можно изобразить так:



рис. 1

(Из двух дробей со знаменателем q , между которыми заключено α , выбираем ближайшую к α). При приближении числа α дробью p/q возникает погрешность $\Delta = \alpha - p/q$ (из точного значения вычитаем приближенное!). Δ может быть как положительным (приближение с недостатком), так и отрицательным (приближение с избытком). Абсолютная величина погрешности называется абсолютной погрешностью. Из рисунка 1 ясно, что абсолютная погрешность при приближении дробями со знаменателем q не превосходит $1/2q$. Приближение тем выгодней, чем меньше знаменатель q и чем выше его точность (т.е. чем меньше абсолютная погрешность). Поэтому выгодность можно оценивать отношением верхней границы абсолютной погрешности $1/2q$ к ее истинному значению $|\alpha - p/q|$. Это отношение $\lambda = (1/2q) / |\alpha - p/q| = \frac{1}{2|\alpha q - p|}$ мы будем называть коэффициентом выгодности. Очевидно, что $\lambda \geq 1$, причем равенство достигается лишь в том (самом "плохом") случае, когда λ лежит точно посреди отрезка $[p/q, (p+1)/q]$ (рис. 1).

Соберем воедино результаты приближений π с помощью дробей со знаменателем от 1 до 10 в следующую таблицу:

q	p/q	\Delta	\lambda
3	9/3=3,0000	0,1416	1,2
4	13/4=3,2500	0,1084	1,2
5	16/5=3,2000	0,0584	1,7
6	19/6=3,1667	0,0251	3,3
7	22/7=3,1429	0,0013	56,5(!)
8	25/8=3,1250	0,0166	3,8
9	28/9=3,1111	0,0305	1,8
10	31/10=3,1000	0,0416	1,2

Видим, что приближение с $q = 7$ резко выделяется среди остальных по выгодности (да и по точности тоже). Точность от приближения седьмыми долями оказалась в 56,5 раза больше, чем заранее можно было бы ожидать. Для того, чтобы добиться такой точности, исходя из неравенства $|\Delta| \leq 1/2q$, пришлось бы взять $q = 238(!)$. Теперь ясно, почему Архимед взял именно седьмые доли, а не какие-нибудь еще. Но задача на этом не кончается.

Много лет спустя голландец Меций нашел новое приближение $\pi \approx \frac{355}{113}$, которое обладает теми же свойствами, что и приближение Архимеда (т.е. дает гораздо большую точность, чем дроби с близкими знаменателями).

Задача 1. Найдите коэффициент выгодности для приближения Меция (Для справок: $\pi \approx 3,14159265358$)

1.2. На земле есть две естественные единицы измерения времени: сутки и год. По последним данным

1 год = 365 суток 5 часов 48 минут 46 секунд, или

1 год = 365,242199 суток.

При составлении календаря нельзя не учитывать лишние 5 часов

48 минут 46 секунд и считать, что в году 365 дней. Это привело бы к тому, что каждый новый год Земля бы начинала в разных точках своей орбиты. Такой календарь был бы полностью непригоден для решения основных задач, перед ним стоящих: определению сроков сельхозработ, каникул и начала учебного года. Есть и другая возможность – считать, что некоторые годы имеют по 365 дней (это простые годы), а некоторые по 366 (високосные). Тогда, чередуя простые и високосные годы, можно добиться того, чтобы средняя продолжительность календарного года сколь угодно мало отличалась от истиной. Но нужно, кроме того потребовать, чтобы график чередования коротких и длинных лет был не слишком сложным. Таким образом, перед нами снова задача об отыскании хороших приближений с небольшими знаменателями.

Первое решение этой задачи принадлежит Юлию Цезарю (точнее, александрийскому астроному Созигену, сделавшему это по его приказу). Он постановил считать високосным каждый четвертый год.

Такой календарь получил название юлианского. Средняя продолжительность юлианского года равна $365 \frac{1}{4}$ дней = 365д6ч, т.е. на 11 минут 14 секунд больше настоящей.

В 1582 году папа Григорий XIII, пожелав исправить эту неточность, произвел следующую реформу календаря. Чередование простых и високосных лет сохраняется, но с такой поправкой: если номер года оканчивается двумя нулями, а число сотен не делится на 4, то такой год не является високосным (например, 1600 и 2000 годы – високосные, а 1700, 1800 и 1900 нет). Кроме того, считая, что с начала летоисчисления набегала ошибка в 10 дней, он прибавил их. (Сейчас разница между старым (юлианским) и новым (григорианским) календарем составляет 13 дней). Так как по новому календарю високосными являются 97 лет из каждых 400, то средняя продолжительность григорианского года равна

$$1 \text{ гр. год} = 365 \frac{97}{400} \text{ д} = 365,2425 \text{ д} = 365 \text{ д } 5 \text{ ч } 49 \text{ м } 12 \text{ с},$$

т.е. отличается от истиной всего на 26 секунд. Приближение довольно хорошее, но можно ли говорить, что оно в каком-нибудь смысле является наилучшим?

С ответом потерпите до следующей лекции.

Лекция 2: Понятие о цепной дроби

2.1. Определения и примеры.

Цепной дробью (конечной) называется выражение вида

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad (*)$$

Для экономии места мы будем для выражения (*) использовать обозначение $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$; числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ называют элементами цепной дроби (*).

Покажем сначала, как по любому числу α построить цепную дробь, элементы которой (кроме, быть может, a_0) натуральные числа. Представим α в виде $\alpha = a_0 + r_1$, где a_0 – целое число (целая часть α), а r_1 – положительное число, меньшее 1. Тогда целая часть числа $\frac{1}{r_1}$ больше или равна 1 и мы можем написать цепочку равенств:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha = a_0 + r_1 & 0 \leq r_1 < 1 \\ \frac{1}{r_1} = a_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < 1 \\ \frac{1}{r_2} = a_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < 1 \\ \dots & \dots \\ \frac{1}{r_{k-1}} = a_{k-1} + r_k & 0 \leq r_k < 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 - \text{целое} \\ a_1, a_2, \dots, a_{k-1} - \\ \text{натуральные числа} \end{array}$$

Собрав эти равенства вместе, получаем

I-4

1

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_2} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + r_3}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

т.е.

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1} + r_k]$$

и если r_k при каком-нибудь k обратится в 0, то мы получим разложение числа α в цепную дробь, элементы которой a_1, a_2, \dots, a_{k-1} — натуральные числа (это, разумеется, возможно лишь тогда, когда α — рациональное число). Если же r_k никогда не равно нулю, мы можем продолжать этот процесс разложения без конца и получим бесконечную цепную дробь с натуральными элементами $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k-1}, a_k \dots]$.

Заметьте, что в этом случае равенство

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k \dots]$$

мы написать пока не можем, так как еще не знаем, что такое значение выражения, стоящего в правой части равенства.

Рассмотрим пару примеров.

1°. Пусть $\alpha = \frac{61}{27}$, тогда имеем

$$\frac{61}{27} = 2 + \frac{7}{27}$$

$$\frac{27}{7} = 3 + \frac{6}{7}$$

$$\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$$

$$\frac{6}{1} = 6 + 0, \text{ так как появился } 0, \text{ разложение заканчивается.}$$

Собираем все вместе:

$$\frac{61}{27} = 2 + \frac{7}{27} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{6}{7}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}} = [2; 3, 1, 6]$$

2°. Пусть теперь $\alpha = \sqrt{2}$, тогда

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = 2 + (\sqrt{2} - 1),$$

.....

Таким образом по числу $\sqrt{2}$ мы получаем такую (бесконечную — это согласуется с иррациональностью $\sqrt{2}$) цепную дробь

$$\sqrt{2} \rightarrow 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$$

(знак равенства вместо стрелки мы пока еще поставить не можем — см. выше).

Можно ли утверждать, что дробь, построенная по рациональному α , всегда конечна? Да, можно. Ведь в этом случае r_1, r_2, \dots, r_k —

рациональные числа, числители и знаменатели которых уменьшаются с ростом k (докажите!) Поэтому мы в конце концов придём к случаю, когда какой-то из $\frac{1}{r_k}$ — целое число, тогда $r_{k+1} = 0$ и разложение закончится.

Другой закономерный вопрос — а не могут ли разные (конечные) дроби иметь одно и то же значение? Могут — например, разложение

$$\frac{61}{27} \text{ мы можем записать так: } 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}}}}$$

т.е. мы можем от последнего элемента дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ отнять 1 (если, конечно, $a_n > 1$) и приписать ее после запятой: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1]$. Обратно, единицу, стоящую в конце цепной дроби, мы смело можем приплюсовать к предпоследнему элементу, не изменив значения дроби.

Легко доказать (докажите!), что это — единственный случай, когда разные цепные дроби могут иметь одинаковое значение.

2.2. Подходящие дроби.

Если у цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_n]$ отбросить первые k ее элементов, то получится дробь $[0; a_k, \dots, a_n]$, значение которой равно определенному выше r_k и называется k -тым остатком этой цепной дроби. (Здесь нужно остановиться и чуть-чуть подумать — а почему это r_k и то r_k , которое было раньше — одно и то же?). Если мы теперь отбросим в цепной дроби все элементы, стоящие после элемента a_k , то получится конечная цепная дробь (она будет конечной, даже если исходная была бесконечной), значение которой называется k -той подходящей дробью исходного числа α (или исходной дробью).

Итак, по определению:

$S_k = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ — k -тая подходящая дробь, тогда

$$S_0 = a_0,$$

$$S_1 = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

и т.д.

Примеры.

1°. Подходящие дроби к $\frac{61}{27} = [2; 3, 1, 6] \approx 2,259$ — это:

$$S_0 = 2 = 2,000$$

$$S_1 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \approx 2,333$$

$$S_2 = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \approx 2,250$$

$$S_3 = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6}}} = \frac{61}{27} \approx 2,259$$

2°. Подходящие дроби к $\sqrt{2} \rightarrow [1; 2, 2, 2, \dots]$:

$$S_0 = 1 = 1,0000$$

$$S_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5000$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1,4000$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} \approx 1,4167$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} \approx 1,4138$$

Учитывая, что $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$, замечаем, что и в первом, и во втором случаях подходящие дроби дают довольно хорошее приближение к исходному числу α с довольно маленькими знаменателями. Кроме того замечаем, что S_0 является приближением с недостатком, S_1 — с избытком, S_2 — с недостатком, S_3 — с избытком и т.д., т.е. число α всегда заключено между S_{k-1} и S_k — соседними подходящими дробями.

Это наблюдение является общим. Более того, подходящие дроби дают не просто "хорошие", а в некотором смысле "наилучшие" приближения.

Теорема. Если $s_k = p_k/q_k$ — подходящая дробь (все дроби всегда предполагаются несократимыми) к числу α , то абсолютная погрешность $|\alpha - p_k/q_k|$ приближения $\alpha \approx \frac{p_k}{q_k}$ является наименьшей среди всех дробей со знаменателями не превосходящими q_k .

Это не единственное и далеко не самое интересное свойство подходящих дробей. Подробнее мы ими займемся на следующей лекции, а пока

2.3. Разгадки загадок Архимеда и календаря

1°. Разложим число π в цепную дробь (т.к. π иррационально, эта дробь бесконечна, но нам хватит и нескольких первых членов разложения):

$$\pi = 3 + 0,14159265... = 3 + \frac{1}{7 + \frac{0,00885145}{0,14159265}} = \dots, \text{ то есть получаем:}$$

$$\pi \rightarrow [3; 7, 15, 1, \dots].$$

Подходящие дроби

$s_0 = 3, s_1 = \frac{22}{7}, s_2 = \frac{333}{106}, s_3 = \frac{355}{113}$ дают ответ на вопрос о приближении Архимеда, а заодно и Меция.

2°. Поступим так же и с длиной года:

$$365\text{д } 5\text{ч } 48\text{м } 46\text{с} = 365,242199 \text{ д} = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 20, 6, 12] \text{ д.}$$

Каждая из подходящих дробей дает нам решение проблемы календаря. Соберем данные в таблицу:

k	s_k	средняя длина года	Δ	кто предлагал
0	365д	365д	+5ч48м46с	глупцы
1	$365\frac{1}{4}$	365д6ч	-11м14с	Ю. Цезарь (Созиген)
2	$365\frac{7}{29}$	365д5ч47м35с	+1м11с	никто (следующий гораздо лучше)
3	$365\frac{8}{33}$	365д5ч49м5с	-19с	О. Хайям
4	$365\frac{31}{38}$	365д5ч48м45с	+1с	Медлер

Но где же календарь Григория XIII?! Неужели он плохой?! Если честно, то да, т.к. его ошибка — 26 секунд, в то время как календарь О. Хайяма проще и дает всего -19 секунд. Но дело в том, что в XVI веке продолжительность года считалась равной 365д5ч49м16с (т.е. на 30 секунд больше). Для этого числа предложение Григория дает ошибку всего в 4 сек, а О. Хайяма — 11 сек. Вот как оно было!

Задача. Прodelайте с годом XVI века аналогичное исследование и посмотрите, есть ли среди подходящих дробей юлианский и григорианский календари. А Хайямовский?

Лекция 3: Свойства подходящих дробей

3.1. Закон образования подходящих дробей

Рассмотрим цепную дробь $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ (конечную или бесконечную – все равно). Выпишем несколько ее первых подходящих дробей:

$$\begin{aligned} S_0 &= [a_0] = a_0 = \frac{a_0}{1} \\ S_1 &= [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} \\ S_2 &= [a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, \frac{1}{\frac{1}{a_2} + a_1}] = \frac{a_0(a_1 + \frac{1}{a_2}) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \\ &= \frac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_2 a_1 + 1} \end{aligned}$$

(последнее равенство было получено подстановкой в выражение для S_1 суммы $a_1 + \frac{1}{a_2}$ вместо a_1). Пусть p_n и q_n – числитель и знаменатель n -ной подходящей дроби S_n . (Мы считаем, что p_n и q_n – это числитель и знаменатель дроби, полученной приведением исходной цепной дроби $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ к обыкновенной без последующих сокращений. Несколько позже мы увидим, что эти дроби несократимы). Тогда имеем:

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & q_0 &= 1; \\ p_1 &= a_0 a_1 + 1, & q_1 &= a_1; \\ p_2 &= a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0, & q_2 &= a_2 a_1 + 1 \end{aligned}$$

или, с использованием двух предыдущих строк

$$p_2 = a_2 p_1 + p_0, \quad q_2 = a_2 q_1 + q_0.$$

Аналогичная формула имеет место и в общем случае. Рассмотрим, например, S_3 :

$$S_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = [a_0; a_1, a_2 + \frac{1}{a_3}]; \text{ подставляя в формулу}$$

$S_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0}$ выражение $a_2 + \frac{1}{a_3}$ вместо a_2 , получаем

$$S_3 = \frac{(a_2 + \frac{1}{a_3})p_1 + p_0}{(a_2 + \frac{1}{a_3})q_1 + q_0} = \frac{a_3(a_2 p_1 + p_0) + p_1}{a_3(a_2 q_1 + q_0) + q_1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1}$$

(мы воспользовались формулами для p_2 и q_2). Отсюда $p_3 = a_3 p_2 + p_1$ и $q_3 = a_3 q_2 + q_1$.

Теперь, используя эти равенства, мы можем получить формулы для p_4 и q_4 , затем для p_5 и q_5 и т.д. В общем случае имеем такой закон образования подходящих дробей^{*1}:

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{и} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (1)$$

(он позволяет вычислить числитель и знаменатель n -той подходящей дроби по известным числителям и знаменателям двух предыдущих и элементу a_n).

Этот закон позволяет существенно упростить процедуру вычисления подходящих дробей. Для этого удобно составить таблицу,

a_0	a_1	a_2		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p_0	p_1	p_2	\dots	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n
q_0	q_1	q_2		q_{n-2}	q_{n-1}	q_n

очередной (n -й) столбец которой получается так

умножаем $(n-1)$ -й столбец на a_n и прибавляем $(n-2)$ -й.

Пример. Найдем подходящие дроби для $\alpha = [2; 3, 1, 5, 4]$. S_0 и S_1 придется вычислить руками: $S_0 = \frac{2}{1}$, $S_1 = \frac{7}{3}$. Далее

^{*1}Метод, с помощью которого доказан этот закон, называется методом математической индукции. Для знакомых с этим методом полезным упражнением будет проведение доказательства по всей форме.

$a_n =$	2	3	1	5	4
$p_n =$	2	7	9	52	217
$q_n =$	1	3	4	23	96

(вычисления проведите сами).

Полезное замечание. Необходимости вычисления p_1 и q_1 можно избежать, если применить одну маленькую хитрость. Положим по определению $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ (Что такое s_{-1} , мы не определяем, т.к. $\frac{1}{0}$ лишено смысла. Но это нам и не потребуется). Тогда формулы основного закона будут справедливы и при $n = 1$ (раньше лишь при $n \geq 2$). Действительно, имеем $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$; $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ (см. конец стр.). Тогда $p_1 = a_1 p_0 + p_{-1}$, $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$, что и требовалось. Начало таблицы из примера теперь можно переписать так:

$n =$	-1	0	1	...
		2	3	...
	1	2	7	...
	0	1	3	...

Следствие 1. Если элементы a_n цепной дроби — натуральные числа, то ее знаменатели возрастают.

Действительно, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1} + q_{n-2} > q_{n-1}$. Таким образом, $q_1 < q_2 < q_3 < \dots < q_n$, что и требовалось.

3.2. Разность между соседними подходящими.

Найдем разность $s_{n-1} - s_n$:

$$s_{n-1} - s_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}. \quad \text{Обозначим числитель}$$

$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}$ через D_n и рассмотрим его повнимательнее. Согласно формулам закона образования

$$\begin{aligned} D_n &= p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = \\ &= (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n - p_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) = \\ &= a_{n+1}p_n q_n + p_{n-1}q_n - a_{n+1}p_n q_n - p_n q_{n-1} = \\ &= -(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n) = -D_{n-1} \end{aligned}$$

Получилось, что $D_n = -D_{n-1}$; применяя это равенство n раз, получаем $D_n = -D_{n-1} = D_{n-2} = -D_{n-3} = \dots = (-1)^n D_0$. Но $D_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1) \cdot 1 - a_1 a_0 = 1$, т.е. $D_n = (-1)^n$.

Итак,

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \quad \text{и} \quad (2)$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}} \quad (3)$$

Из этих двух формул (они, очевидно, являются следствиями закона образования) следуют многие важные свойства цепных дробей. Вот одно из них:

Следствие 2. Подходящая дробь p_n/q_n несократима.

Если бы p_n и q_n имели общий делитель k , то левая часть равенства (2) делилась бы на k . Но она равна ± 1 , откуда k тоже равно ± 1 и дробь $\frac{p_n}{q_n}$ сократить нельзя.

3.3. Сравнение подходящих дробей.

Разберемся с тем, что произойдет с цепной дробью (конечной), если один из ее элементов увеличится. Рассмотрим два случая: 1) увеличился элемент с нечетным номером (скажем a_3) и 2) увеличился элемент с четным номером (пусть a_4).

1) Если a_3 увеличился, то $\frac{1}{a_3 + \dots}$ уменьшилось, $a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}$ — тоже, $\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ и $a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}$ — увеличились,

$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ и $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ — уменьшились.

2) Аналогично, если увеличивается a_4 , то $a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}$ тоже увеличивается.

Итак, с увеличением элемента a_n значение дроби увеличивается при четных n и уменьшается при нечетных n .

Вспомнив теперь, что для разложения произвольного числа α в цепную дробь справедливо $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + r_n]$, где r_n — n -й остаток (лекция 2, стр. ...), получим, что при нечетных n значение α больше значения n -й подходящей дроби S_n , а при нечетных — меньше. Учтя также, что S_n является подходящей дробью не только для α , то и для всех S_k , при $k > n$ (почему?), окончательно имеем цепочку неравенств:

$$S_0 < S_2 < S_4 < \dots < S_{2k} < \dots < \alpha < \dots < S_{2k+1} < \dots < S_3 < S_1 \quad (4)$$

Т.е. значения подходящих дробей S_n с четными номерами возрастают с ростом n , оставаясь при этом меньше α , а значения подходящих дробей с нечетными номерами, оставаясь при этом больше α , убывают.

Отсюда следует, что α всегда лежит между S_n и S_{n+1}

$$\begin{array}{c} | \\ S_n \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ \alpha \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ S_{n+1} \end{array} \quad \text{и} \quad |S_n - \alpha| \leq |S_n - S_{n+1}|.$$

Из формулы (3) немедленно получаем

$$\text{Следствие 3. } \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad (5)$$

(абсолютная погрешность приближения α с помощью n -й подходящей дроби не превосходит величины, обратной произведению знаменателей n -й и $n+1$ -й подходящих дробей). Вспомнив (следствие 1), что знаменатели q_n возрастают, можем написать:

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}, \text{ откуда коэффициент выгодности этого приближения (см. лекцию 1) } \lambda = \frac{1}{2q_n} / \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{q_n}{2}.$$

3.4. "Наилучшее приближения подходящими дробями".

Теперь у нас все готово для доказательства теоремы, сформулированной в лекции 2 (стр. 12).

Пусть $\frac{p_n}{q_n}$ — n -я подходящая дробь к числу α , а $\frac{p}{q}$ — произвольная дробь, знаменатель q которой меньше q_n . Тогда

наилучшее приближения $\alpha \approx \frac{p_n}{q_n}$ означает, что погрешность

$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$ больше, чем $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$. Докажем это. Для доказательства

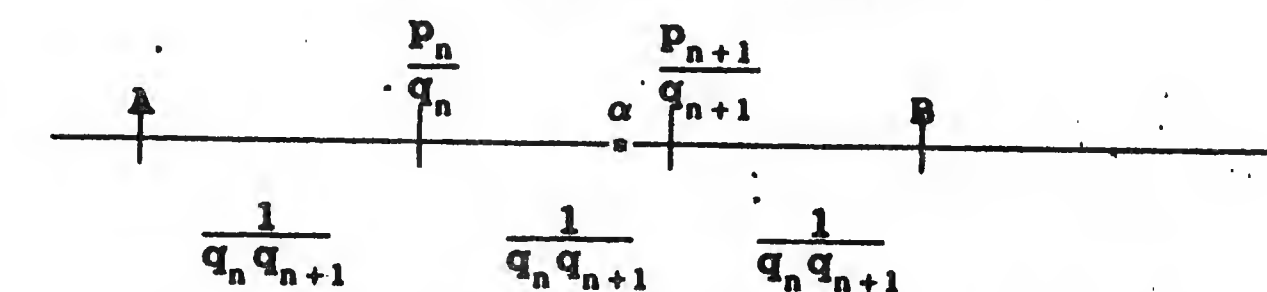
неравенства $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$ достаточно доказать, что

$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$, так как в силу следствия 3

$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$. Изобразим интересующие нас точки на прямой

и отметим заодно еще точки A и B , находящиеся от $\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ на

$$\text{расстоянии } \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$



Если мы теперь докажем, что точка $\frac{p}{q}$ не принадлежит отрезку

$[AB]$, то это позволит утверждать, что расстояние между нею и

точкой α (т.е. $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$) больше $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$, т.к. либо на отрезке

$[\frac{p}{q}, \alpha]$ (в случае, если $\frac{p}{q}$ левее A):

лежит отрезок длины $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$ (отрезок $[A, \frac{p_n}{q_n}]$ в данном случае),

либо такой отрезок лежит на отрезке $[\alpha, \frac{p}{q}]$ (в том случае, когда

$\frac{p}{q}$ лежит правее B):

Нам осталось доказать выделенное утверждение. Для этого оценим

разности $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right|$ и $\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right|$. Прежде всего заметим, что

они не равны 0, так как из равенства $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ (или $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$)

следует сократимость $\frac{p_n}{q_n}$ (или $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$) (так как $q < q_n < q_{n+1}$), что

невозможно по следствию 2. Итак,

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|pq_n - p_n q|}{qq_n} \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \text{ Аналогично,}$$

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{|pq_{n+1} - p_{n+1} q|}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{qq_{n+1}} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Поэтому точка p/q не принадлежит отрезку AB (из первого неравенства следует, что она удалена от $\frac{p_n}{q_n}$ больше, чем на $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$, т.е. не принадлежит $[A, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}]$, а из второго — что она не принадлежит отрезку $[\frac{p_n}{q_n}, B]$). Что и требовалось доказать.

Итак, среди всех дробей p/q со знаменателями, не превосходящими q_n , наименьшую погрешность в приближении $\alpha \approx \frac{p}{q}$ имеет подходящая дробь $\frac{p_n}{q_n}$.

Однако существуют и другие дроби (не являющиеся подходящими), дающие наилучшее приближение к α , чем любая дробь с меньшим знаменателем. Например, из таблицы на стр. (лекция 1) видно, что таким свойством обладают приближения к π : $\pi \approx \frac{19}{6}$; $\pi \approx \frac{13}{4}$; $\pi \approx \frac{16}{5}$.

Приведем без доказательства*⁴ две более сильные теоремы:

(1) Коэффициент выгодности $\lambda = \frac{1}{2|q_n \alpha - p_n|}$ для подходящей дроби больше, чем для любой другой дроби с меньшим знаменателем.

(II) Обратно, если для приближения $\alpha \approx \frac{p}{q}$ коэффициент выгодности $\lambda = \frac{1}{2|q\alpha - p|}$ больше, чем для всех дробей со знаменателем, меньшим q , то p/q — одна из подходящих дробей к α .

Т.е. иметь большой коэффициент выгодности — это монополия подходящих дробей.

Пример. Рассматривая ту же таблицу со стр. 5, мы видим, что приближение $\pi \approx \frac{22}{7}$ имеет наибольшую выгодность среди приближений дробями со знаменателями, не превосходящими 7.

Теорема (II) в таком случае позволяет утверждать, что дробь $\frac{22}{7}$ является подходящей к π , не произволя разложения.

*⁴ Все доказательства можно найти в книжке А.Я.Хинчина "Цепные дроби", Москва, "Наука", 1978 г.

Лекция 4. Первые приложения

4.1. Мы сейчас займемся решением уравнений вида

$$ax+by=c \quad (*)$$

в целых числах. Уравнения такого вида часто приходится решать в различных жизненных ситуациях (Примеры: отлить 100л с помощью 8 и 11-литровых сосудов; заплатить в кассу 1 рубль, если у Вас на руках только купюры по 19 рублей, а у кассира — по 7 и т.п.). Решать такие уравнения нам поможет доказанное на прошлой лекции равенство

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n \quad (**)$$

для соседних подходящих дробей.

Вот как с его помощью можно найти решение уравнения $19x - 7y = 1$. Разложим $\frac{19}{7}$ в цепную дробь и найдем подходящие. Имеем: $\frac{19}{7} = [2; 1, 2, 2]$, $\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1}$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{1}$, $\frac{p_2}{q_2} = \frac{8}{3}$, $\frac{p_3}{q_3} = \frac{19}{7}$. Применим равенство (**) при $n=2$: $19 \cdot 3 - 8 \cdot 7 = (-1)^2$, т.е. пара $x=3$, $y=8$ удовлетворяет нашему уравнению. Ясно, что равенство (**) позволяет найти одно решение уравнения (*) при $c=\pm 1$, но как найти все решения? А как быть в том случае, когда $c \neq \pm 1$?

С этим мы сейчас разберемся.

4.2. Рассмотрим несколько случаев.

1. Коэффициенты a и b уравнения (*) имеют общий делитель k , отличный от ± 1 . В этом случае левая часть (*) всегда (при любых x и y) делится на k . Поэтому, если c (правая часть) не делится на k , то уравнение решений не имеет. Если же c делится на k , то можно разделить на k обе части уравнения.

Итак, либо уравнение (*) не имеет решений в целых числах (как, например, в случае уравнения $5x-9y=5$), либо его можно привести к уравнению того же вида, но уже с взаимно простыми a и b (например, уравнение $6x-9y=12$ приводится к уравнению $2x-3y=4$).

II. Коэффициенты a и b уравнения (*) взаимно просты (т.е. не имеют общих делителей, отличных от ± 1).

Этот случай разбивается на два:

1) коэффициент c равен 0. Тогда уравнение (*) имеет вид

$$ax+by=0 \quad (***)$$

Все его решения легко находятся. Имеем $x = -\frac{by}{a}$ и, т.к. x — целое число, а b — взаимно просто с a , y делится на a . Т.е. $y=ta$, где t — произвольное целое число, а $x = -\frac{by}{a} = -tb$. Итак, все решения уравнения (***) таковы:

$$x=-tb, y=ta, t=0;\pm 1;\pm 2;\dots$$

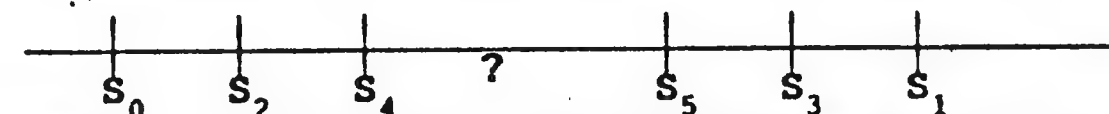
2) Пусть теперь $c \neq 0$ и пусть x_0, y_0 — какое-то решение уравнения (*). Если x_1, y_1 — тоже решения этого уравнения, то вычтя из равенства $ax_1+by_1=c$ равенство $ax_0+by_0=c$, получим $a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0$, т.е. $(x_1-x_0), (y_1-y_0)$ — решение уравнения с нулевой правой частью. Но все решения такого уравнения мы уже нашли в случае 1). Поэтому $x_1-x_0 = -tb$, $y_1-y_0 = ta$, где t — некоторое целое число. Отсюда $x_1 = x_0 - tb$, $y_1 = y_0 + ta$. Понятно, что все x_1, y_1 , получающиеся по этой формуле при различных целых t , являются решениями уравнения (*) (нужно только проделать все выкладки в обратном порядке). Значит, зная какое-то решение уравнения (*), мы можем найти все его решения по формулам

$$x=x_0-tb, y=y_0+ta, t=0;\pm 1;\pm 2;\dots$$

Но где взять это какое-то решение? Здесь нам помогут цепные дроби. Пусть сначала $c=1$ или $c=-1$. Тогда, как мы уже видели, достаточно разложить число $-a/b$ в цепную дробь: последней подходящей дробью будет $-a/b$, а предпоследней — как раз дробь x_0/y_0 , дающая нужное решение. Зная решение x_0, y_0 для $c=1$ (или -1), легко указать одно решение и для любого другого c : это будет cx_0, cy_0 , если $ax_0+by_0=1$ (или соответственно $-cx_0, -cy_0$, если $ax_0+by_0=-1$).

Лекция 5: Бесконечные цепные дроби

5.1. У нас все готово, чтобы придать выражению $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ с натуральными a_0, \dots, a_n, \dots конкретное числовое значение. Из неравенств $S_0 < S_2 < S_4 < \dots < S_5 < S_3 < S_1$, где S_i — соответствующие подходящие, следует, что значение нашей дроби α должно находиться где-то между четными и нечетными подходящими. Но где?



Можно, например, по аналогии с бесконечными десятичными дробями, используя обычно при записи чисел, положить α равным пределу четных подходящих (т.е. приближать α с недостатком). Но тогда мы незаслуженно обидим нечетные подходящие (приближения с избытком). Но, к счастью, пределы последовательностей верхних и нижних подходящих дробей совпадают (это следует из того, что разность между соседними дробями $|S_{n+1} - S_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ становится сколь угодно малой с ростом n), и мы можем, не ограничиваясь только четными или нечетными подходящими, положить значение бесконечной цепной дроби по определению равным $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

Ясно теперь, что если дробь $[a_0; a_1, \dots]$ построена по числу α (раньше мы писали $\alpha \rightarrow [a_0; a_1, \dots]$), то именно это α и окажется значением этой дроби.

Итак, мы научились записывать все действительные числа в виде цепной дроби. При этом рациональные числа записываются в виде конечных дробей, а иррациональные — бесконечных.

5.2. Периодические дроби.

Разлагая в цепную дробь числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ и т.д., вы замечали, что получающиеся дроби являются периодическими (т.е. их элементы с некоторого места повторяются). Таким свойством (разлагаться в периодическую дробь) обладают все квадратичные

иррациональности — числа вида $\frac{a+b\sqrt{d}}{c}$, где a, b, c, d — целые числа, причем d — не полный квадрат. Квадратичные иррациональности ха-

рактируются тем, что они (и только они) являются корнями квадратных уравнений с целыми коэффициентами.

Докажем теперь обратное утверждение: всякая периодическая цепная дробь представляет собой квадратичную иррациональность (т.е. квадратичные иррациональности имеют, хоть и бесконечные, но в некотором смысле довольно простые разложения, в отличие от всех других иррациональностей).

Итак, пусть $\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n, b_1, \dots, b_n, \dots]$ — периодическая цепная дробь, и пусть $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n, b_1, \dots, b_n, \dots]$, тогда имеем

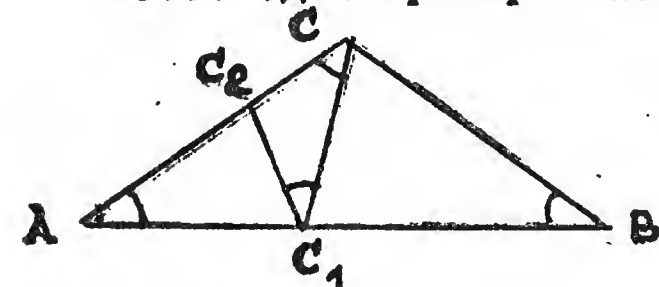
$$\beta = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots + \frac{1}{b_1 + \dots}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{\beta}}$$

откуда после приведения правой части к виду обыкновенной дроби $\frac{A\beta+B}{C\beta+D}$, где A, B, C, D — натуральные, получаем $\beta = \frac{A\beta+B}{C\beta+D}$ или $C\beta^2 + D\beta = A\beta + B$. Получилось квадратное уравнение на β , откуда β — квадратичная иррациональность. Но

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\beta}}}$$

поэтому, уничтожая поочередно иррациональности в знаменателях, получаем, что и α — квадратичная иррациональность. Что и требовалось.

5.3. Один пример. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC



с углом при вершине C в 108° . Найдем отношение основания AB к боковой стороне BC с помощью разложения в цепную дробь. Ясно, что $AB > BC$, но $2 \cdot BC = AC + BC > AB$ в

силу неравенства треугольника. Поэтому, деля AB на BC с остатком, получаем $AB = BC_1 + AC_1$, где $BC_1 = BC$, а $AC_1 < BC$. Заметим теперь, что образовавшийся треугольник AC_1C подобен исходному ACB (так как треугольник BC_1C равнобедренный, углы BCC_1 и C_1BC равны $\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$, поэтому углы треугольника AC_1C

таковы 36° ; $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ и $108^\circ - 72^\circ = 36^\circ$). Разлагая, получаем:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC_1 + AC_1}{BC} = 1 + \frac{AC_1}{BC} = 1 + \frac{AC}{AC_1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{CC_2}{AC_1}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

Вычислить же значение дроби $[1; 1, 1, 1, \dots]$ очень просто:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} = 1 + \frac{1}{\alpha}, \text{ откуда } \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \text{ и } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(отрицательный корень отбрасываем). Итак, $\frac{AB}{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Проведя биссектрису угла C, можем заодно найти $\cos 36^\circ$:

$$\cos 36^\circ = \frac{AB/2}{BC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Задачи

1. Разложить в цепную дробь: а) $\frac{127}{52}$; б) $\frac{24}{35}$; в) 1,23 и найти подходящие дроби.
2. Привести к виду простой дроби а) $[1; 1, 2, 1, 2, 1, 2]$, б) $[0; 1, 2, 3, 4, 5]$; в) $[5; 4, 3, 2, 1]$...
3. Разложить в цепную дробь: а) $\sqrt{3}$, б) $\sqrt{5}$, в) $\sqrt{7}$, г) $\sqrt{13}$, д) $\frac{5 + \sqrt{2}}{2}$.
4. Вычислить значения дробей: а) $[1; 2, 2, 2, 2, \dots]$; б) $[2; 1, 2, 1, 2, \dots]$; в) $[1; 1, 1, \dots]$; г) $[a; a, a, a, \dots]$; д) $[a; a, b, a, b, \dots]$; е) $[1; 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots]$; ж) $[3; 2, 1, 3, 2, 1, 3, 2, 1, \dots]$.
5. Найти рациональное приближение: а) к $\sqrt{5}$ с точностью 0,0001; б) к $\sqrt{3}$ с точностью 0,001; в) к $\sqrt{10}$ с точностью 0,00003.
6. Заменить число $\frac{355}{113}$ дробью с наименьшим знаменателем так, чтобы погрешность не превышала 0,002.
7. Решить в целых числах уравнения: а) $70x + 33y = 11$;

- 6) $129x - 53y = 2$.
8. Решить в натуральных числах: а) $60x - 91y = 2$;
б) $12x + 7y = 200$.
9. Сколькими способами можно разменять 100 рублей : а) на 3-х и 5-ти рублевые бумажки? б) на 5-ти и 8-ми? в) на 6-ти и 9-ти?
10. Пусть $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Чему равно $\frac{1}{\alpha}$?
11. Не вычисляя значения дроби, найти $\underbrace{[4; 4, 4, 4, \dots, 4]}_n \times 2$; $\underbrace{[8; 8, 8, 8, \dots, 8]}_n : 2$ при а) четном n ; б) нечетном n .
12. Найти отношение стороны правильного 10-угольника к радиусу описанной окружности.
13. Иванушка Дурачок борется со Змеем Горынычем, у которого 1989 голов. Махнув мечом налево, Иван срубает 5 голов, взамен которых вырастает 9 новых, а махнув направо – срубает 20, а вырастает 8. Если все головы срублены, новых не вырастает. Может ли И. Дурачок победить З. Горыныча? (Махать можно в любом порядке – например, сначала 3 раза налево, потом раз направо... Если голов меньше 20, то махать можно только налево, а если меньше 5, то вообще нельзя. Будьте осторожны!)
14. Доказать, что дроби $\frac{p_n}{p_{n+1}}$ и $\frac{q_n}{q_{n+1}}$ несократимы ($\frac{p_n}{q_n}$ и $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ – это соседние подходящие).
15. а) Решить уравнение $[1; x, 3, 4] = \frac{43}{30}$.
б) Решить в натуральных числах уравнение $30(4xy + 4y + x + 5) = 43(4xy + x + 4)$
16. Решить уравнение $7(xyz + x + z) = 10(yz + 1)$ в натуральных числах.
17. На плоскости в точках, обе координаты которых целые числа, растут деревья с диаметром ствола 0,001. Доказать, что если охотник выстрелит из Начала координат, то пуля обязательно попадет в одно из деревьев.

Сдано в набор 12.10.90

Формат 60x90¹/₁₆

Усл. печ. л. 1,75

Усл. кр.-отт. 1,87

Тир. 500 экз.

В печать 02.10.90

Печать офсетная

Уч.-изд. л. 1,04

Зак. 7867 Цена 15 коп.

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ

140010, Люберцы 10, Московской обл.,

Октябрьский проспект, 403

направленных (см. рис. 23). Вы, наверное, уже поняли, как можно вывести формулу площади любого выпуклого многоугольника. Надо взять какую-нибудь его вершину и провести из неё все возможные диагонали. При этом многоугольник разобьётся на треугольники, причем, если складывать площади этих треугольников, набедающие по формуле (2), все "лишние" слагаемые взаимно уничтожаются, как в случае четырехугольника.

Итак, если $(x_1; y_1), (x_2; y_2), (x_3; y_3), \dots, (x_n; y_n)$ — координаты вершин выпуклого n -угольника, взятых в таком порядке, что его обход по этим вершинам происходит против часовой стрелки, то для площади S_n этого n -угольника имеет место формула

$$S_n = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \dots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)]. \quad (4)$$

Замечания. 1. Подумайте, почему при выводе формулы мы требовали, чтобы n -угольник (и четырехугольник в задаче 6-2) был выпуклым: где мы использовали это условие. На самом деле выведенная нами формула верна и для невыпуклых многоугольников, но доказательство её в этом случае несколько сложнее. Желающие могут попробовать её вывести. (Аналогичная ситуация возникает при выводе формулы суммы внутренних углов многоугольника — см. школьный учебник).

2. При выводе формул (2) — (4) мы спроектировали вершины многоугольников на ось OX и получили трапеции с основаниями, параллельными оси OY . Понятно, что можно было проектировать вершины на ось OY , тогда получились бы аналогичные формулы. Выведите их.

ВОКРУГ ФОРМУЛЫ ПИКА

Н.Б.Васильев

Чтобы оценить площадь многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, достаточно подсчитать, сколько клеток покрывает этот многоугольник (площадь клетки мы принимаем за единицу). Точнее, если S — площадь многоугольника, N_1 — число клеток, которые целиком лежат внутри многоугольника, и N_2 — число клеток, которые имеют с внутренностью многоугольника хотя одну общую точку, то $N_1 \leq S \leq N_2$. (Этот факт можно использовать для того, чтобы дать точное определение площади многоугольника и дру-

гих фигур).

Мы будем рассматривать ниже только такие многоугольники, все вершины которых лежат в узлах клетчатой бумаги — в точках, где пересекаются линии сетки. Оказывается, что для таких многоугольников можно указать простую формулу: $S = \frac{Z}{2} + L - 1$, где S — площадь, Z — число узлов, которые лежат на границе многоугольника (то есть на сторонах и в вершинах), L — число узлов, которые лежат строго внутри многоугольника.

Эту формулу называют иногда "формулой Пика" — по имени математика, открывшего её в 1899 году. (Впрочем, нельзя быть уверенным в том, что эту естественную формулу, допускающую целый ряд различных доказательств, не придумал никто раньше).

В нашей заметке и доказательство, и применения формулы Пика отчасти будут связаны с некоторыми задачами из "Задачника "Кванта"

Простые треугольники.

Напомним, что мы рассматриваем только многоугольники, — в частности, треугольники — с вершинами в узлах клетчатой бумаги; каждый раз это специально не оговаривается. Лист клетчатой бумаги мы считаем бесконечным во всех направлениях, клетки — квадратами со стороной 1.

Площадь любого треугольника, нарисованного на клетчатой бумаге, легко посчитать, представив её как сумму или разность площадей прямоугольных треугольников и прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, проходящим через вершину нарисованного треугольника. Проделав это, например, для треугольников, изображенных на рисунке 24, вы убедитесь, что площадь получается всегда равной "получелому" числу — числу вида $m/2$, где m — целое.

Назовем треугольник простым, если ни внутри него, ни на его сторонах нет узлов сетки, за исключением вершин. (Такое название выбрано потому, что любой другой треугольник можно составить из простых; это одно из тех утверждений, которые понадобятся нам ниже). Обратите внимание, что все простые треугольники на рисунке 24 имеют площадь $1/2$. Мы увидим, что это не случайно.

В решении задачи М226, опубликованной в "Кванте", 1974, № 6, читателям предлагалось подумать над такой задачей. Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трех вершинах одной клетки, а затем начинают "играть в чехарду": каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке (рис. 25, ясно что после любого

числа таких прыжков кузнечики будут попадать в узлы клетчатой бумаги). В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

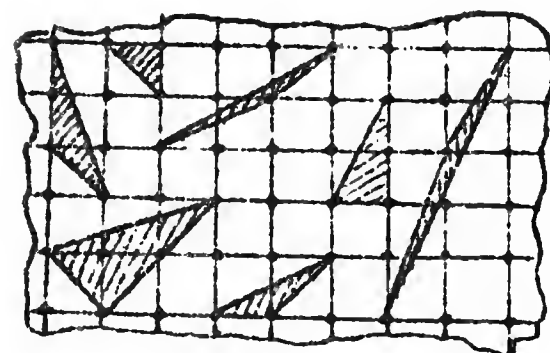


Рис. 24

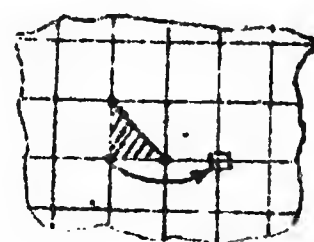


Рис. 25

Назовем треугольник достижимым, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика, которые вначале были в трех вершинах одной клетки; прыжком будем называть преобразование треугольника, заключающееся в том, что одна из вершин переходит в точку, симметричную относительно любой из двух других вершин (эти две вершины остаются на месте).

Теорема I. Следующие три свойства треугольников с вершинами в узлах клетчатой бумаги эквивалентны друг другу: 1) треугольник имеет площадь $1/2$, 2) треугольник прост, 3) треугольник достижим.

В справедливости этой теоремы вы можете убедиться, доказав следующие 12 утверждений. Звездочкой отмечены те, к доказательству которых имеются указания в конце статьи. Остальные — почти очевидны, если доказывать их в таком порядке:

$$\begin{array}{ccccc} 3 \Rightarrow 4 & & 1 \Rightarrow 2 & & 10 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 8 \Rightarrow 9 \Rightarrow 11 \Rightarrow 12 \end{array}$$

1. Площадь треугольника при прыжке не меняется.
2. Любой достижимый треугольник имеет площадь $1/2$.
3. Если достроить простой треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, то ни внутри, ни на сторонах этого параллелограмма не будет узлов (не считая вершин).

4. Из простого треугольника при прыжке получается простой.
5. У простого треугольника один из углов — тупой или прямой (причем последний случай возможен только для треугольников, у которого три вершины принадлежат одной клетке, такой простой треугольник — со сторонами $1, 1, \sqrt{2}$ мы будем называть минимальным).

6. Из любого простого не минимального треугольника можно одним прыжком получить треугольник, у которого наибольшая сторона меньше, чем наибольшая сторона исходного.

7. Любой простой треугольник можно конечным числом прыжков перевести в минимальный.

8. Любой простой треугольник достижим.

9. Любой простой треугольник имеет площадь $1/2$.

10. Любой треугольник можно разрезать на простые.

11. Площадь любого треугольника равна $m/2$, причем при любом разрезании его на простые их количество равно m .

12. Любой треугольник площади $1/2$ — простой.

Ясно, что из утверждений 2, 8 и 12 вытекает теорема I. Докажите еще несколько свойств простых треугольников.

13. Для любых двух узлов A и B решетки, на отрезке между которыми нет других узлов, найдется узел C такой, что треугольник ABC — простой.

14. Узел C в предыдущей задаче можно всегда выбрать так, что угол ACB будет тупым или прямым.

15. Пусть клетчатая плоскость разрезана на конгруэнтные параллелограммы так, что все узлы являются вершинами параллелограммов (рис. 26). Тогда каждый из треугольников, на которые один из этих параллелограммов разрезается своей диагональю — простой.

Это утверждение вместе с обратным к нему можно сформулировать так.

16. Треугольник ABC — простой тогда и только тогда, когда всевозможные треугольники, полученные из ABC параллельным переносом, переводящими узел A в различные узлы решетки, не накладываются друг на друга (рис. 26).

Вернемся теперь к задаче про трех кузнечиков. Пусть кузнечики в начальном положении занимают какой-то определенный (а не произвольный) минимальный треугольник — в первоначальной формулировке задачи именно это и предполагалось.

Поскольку каждый кузнечик смещается при прыжке обязательно на четное число клеток по горизонтали и вертикали, то он обязательно попадет в узел "своей" решетки с размером клеток 2×2 . На рисунке 27 три из четырех "подрешеток", составляющих всю решетку, отме-

чены разными знаками (каждый кузнечик прыгает в узлы своего знака).

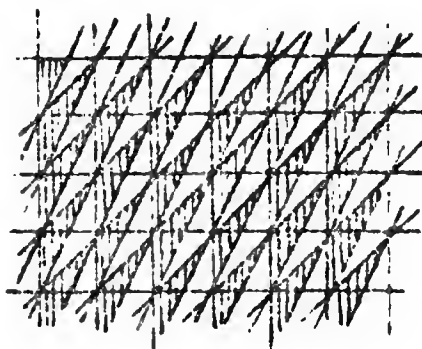


Рис. 26

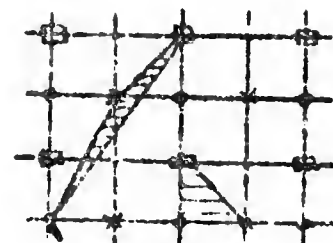


Рис. 27

Согласно теореме 1, кузнечики могут одновременно попасть в вершины простого треугольника.

Отсюда вытекает еще одно интересное свойство этих треугольников.

[17.] Если решетку - узлы клетчатой бумаги - разбить на четыре подрешетки с клетками 2×2 (рис. 27), то вершины простого треугольника обязательно попадут в три разные подрешетки (все три имеют разные обозначения).

Теперь уже нетрудно доказать следующие два утверждения, дающие ответ к задаче о трех кузнечиках (в том случае, когда начальный треугольник фиксирован; рис. 27).

[18.] Три кузнечика могут одновременно попасть в те и только те тройки точек, которые служат вершинами простого треугольника и имеют тот же знак, что и соответствующие вершины начального треугольника.

[19.] Два кузнечика могут одновременно попасть в те и только те пары узлов соответствующих знаков, на отрезке между которыми нет других узлов.

Триангуляция многоугольника.

Мы подробно изучили частный вид многоугольников на клетчатой бумаге, которому в формуле Пика соответствуют значения $i = 0$, $\tau = 3$, $S = 1/2$. Но от этого частного случая можно перейти сразу к самому общему, воспользовавшись теоремой о разрезании на треугольники произвольного многоугольника (клетчатая бумага больше не нужна).

Пусть на плоскости задан некоторый (не обязательно выпуклый) многоугольник и некоторое конечное множество K точек, лежащих внутри многоугольника и на его границе (причем все вершины многоугольника принадлежат множеству K).

Триангуляцией с вершинами K называется разбиение данного многоугольника на треугольники с вершинами в множестве K такое, что каждая точка из K служит вершиной каждому из тех треугольников триангуляции, которым эта точка принадлежит (то есть точки из K не попадают внутрь или на стороны треугольников, см. рис. 28).

Теорема 2. а) Любой n -угольник можно разрезать диагоналями на треугольники, причем количество треугольников будет равно $n-2$. (Это разбиение - триангуляция с вершинами в вершинах n -угольника).

б) Пусть на границе многоугольника отмечено τ точек (включая все вершины), внутри - еще i точек. Тогда существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках, причем количество треугольников такой триангуляции будет равно $\tau + 2i - 2$.

Разумеется, а) - частный случай б), когда $\tau = n$, $i = 0$. Доказательство этой теоремы мы снова разобьем на ряд простых утверждений.

[20.] Из вершины наибольшего угла n -угольника ($n > 3$) всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника.

[21.] Если n -угольник разрезан диагональю на p -угольник и q -угольник, то $n = p + q - 2$.

[22.] Сумма углов n -угольника равна $180^\circ (n-2)$.

[23.] Любой n -угольник можно разрезать диагоналями на $n-2$ треугольника.

[24.] Для любого треугольника, внутри и на границе которого отмечено несколько точек (в том числе - все три его вершины), существует триангуляция с вершинами в отмеченных точках.

[25.] То же самое верно и для любого n -угольника.

[26.] Число треугольников триангуляции равно $\tau + 2i - 2$, где i и τ - количество отмеченных точек соответственно внутри и на границе многоугольника.

Отсюда вытекает теорема 2.

[27.] Выведите из теорем 1 и 2 формулу Пика: $S = \tau/2 + i - 1$. Прием, который удобно использовать в доказательстве утверждения,

дения 26 - подсчет суммы углов, - помогает и при решении других комбинаторных задач по геометрии, в частности, задач на разбиения многоугольника. Приведем еще два примера.

Назовем разбиение \mathcal{N} - угольника на несколько многоугольников правильным, если каждая вершина одного из многоугольников разбиения служит вершиной всех других многоугольников разбиения, которым она принадлежит.

[28.] Если из вершин k - угольника, на которые разбит правильным образом \mathcal{N} - угольник, i вершин лежат внутри и ℓ - на границе \mathcal{N} - угольника, то количество k - угольников равно

$$m = \frac{\ell + 2i - 2}{k - 2}.$$

[29.] (Вариант "теоремы Эйлера"). Если N_0 точек плоскости и N_1 отрезков с концами в этих точках образуют многоугольник, правильно разбитый на N_2 многоугольников, то (рис.29) $N_2 - N_1 + N_0 = 1$.

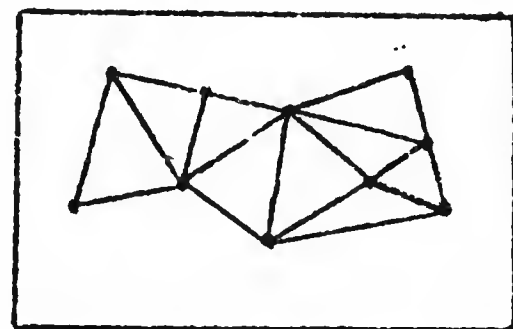


Рис.28

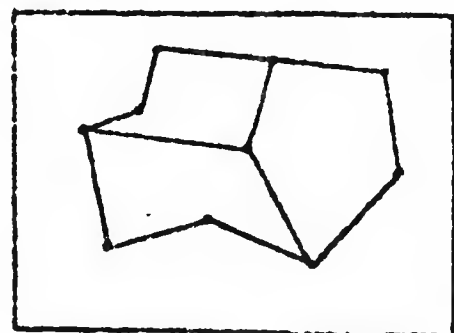


Рис.29

Несколько задач.

Применения формулы Пика в основном связаны не с подсчетом площадей конкретных многоугольников, а с различными задачами и теоремами о ломаных на клетчатой бумаге.

[30.] Пусть отношение площади многоугольника к квадрату одной из его сторон иррационально (так обстоит дело, например, для правильного треугольника). Докажите, что подобный ему многоугольник нельзя нарисовать на клетчатой бумаге, так, чтобы вершины лежали в узлах.

[31.] Пусть A и B - два узла клетчатой бумаги, из которых второй на p клеток правее и на q выше первого (то есть расстоя-

ние между узлами равно $\sqrt{p^2 + q^2}$). Чему равно расстояние до прямой AB от ближайшего к ней узла, не лежащего на этой прямой?

[32.] Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на исходное поле. Ломаная, соединяющая последовательно центры полей, которые проходил король, не имеет самопересечений.

а) Какую наибольшую длину она может иметь?

б) Какую площадь может ограничивать эта ломаная? (Сторона клетки равна 1).

Задача а) уже разбиралась в "Кванте" № 5 за 1974г. (с.52), она имеет номер M220 в "Задачнике "Кванта". Здесь мы приведем другое решение. Но начнем с задачи б). Из формулы Пика сразу следует, что площадь, ограниченная ломаной, равна $64/2 - 1 = 31$ (узлами клетчатой бумаги служат центры 64 полей, по условию все они лежат на границе многоугольника). Перейдем к задаче а).

На рисунке 30 приведен пример пути короля, в котором 36 из 64 ходов имеют длину $\sqrt{2}$ (направлены по диагонали). Докажем, что больше 36 таких ходов быть не может.

На каждом отрезке длины $\sqrt{2}$, входящем в путь короля, построим, как на диагонали, квадрат 1×1 . Одна половинка этого квадрата лежит вне многоугольника, который ограничивает путь короля. Но большая площадь, занятая такими половинками, не превышает

$49 - 31 = 18$, поскольку все они не выходят за пределы квадрата 7×7 клетчатой бумаги. Значит, количество диагональных ходов не превышает 36.

Итак, ответы к задаче 32:

а) $28 + 36\sqrt{2}$; б) 31.

[33.] Нужно провести по линиям сетки замкнутую несамопересекающуюся ломаную, которая бы проходила через все узлы клетчатой бумаги, лежащие внутри прямоугольника $p \times q$ клеток.

а) При каких p и q это возможно?

б) Какую длину будет иметь эта ломаная?

в) Какую площадь она будет ограничивать? (рис.31).

Указания к отдельным задачам статьи.

[3.] Пусть M - середина отрезка с концами в узлах. Тогда точка, симметричная узлу относительно точки M , - тоже узел.

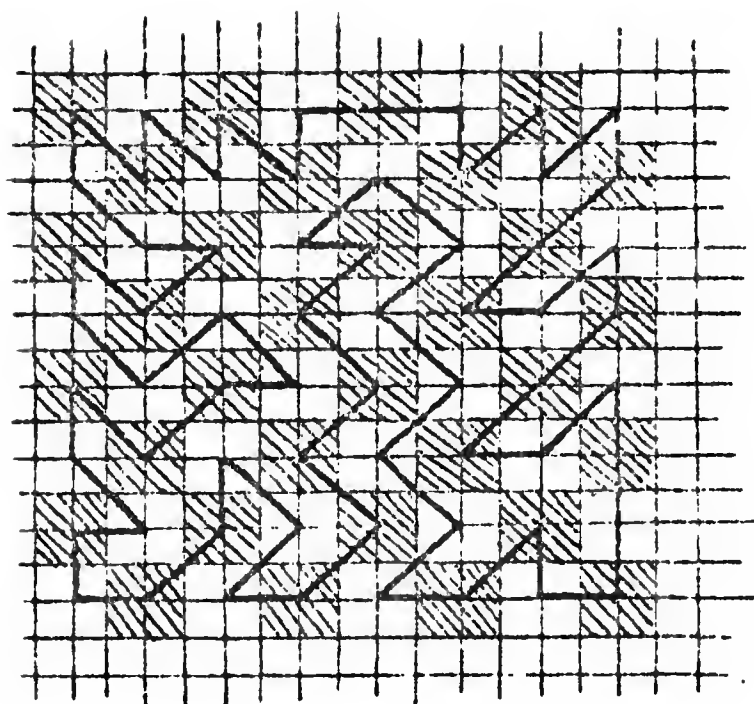


Рис. 30

4. Пусть при прыжке вершина A треугольника ABC переходит в узел A' , B — середина $[AA']$. Параллелограмма $ABCS$ получается из параллелограмма $BA'ES$ параллельным переносом, который все узлы переводит в узлы так, что внутри и на сторонах $BA'ES$ не может быть узлов.

5. Проведем через все вершины треугольника линии сетки и рассмотрим прямоугольник, образуемый четырьмя из этих линий, заключающий данный треугольник ABC . Можно считать, что A — вершина этого прямоугольника (все точки A, B, C не могут лежать не в вершинах прямоугольника). Если вершины P и C не лежат в вершине E прямоугольника $ADEF$ — скажем, $B \in [DE]$, $C \in [EF]$ — то перпендикуляры, восстановленные в B и C к прямым DE и EF , пересекаются в узле решетки, лежащем внутри или на границе треугольника ABC . Если же одна из вершин B или C — скажем, B — совпадает с E , то угол ACB тупой или прямой.

7. Длины отрезков, соединяющих узлы, могут принимать лишь такие значения, квадрат которых — натуральное число. Поэтому убывающая последовательность таких длин обязательно конечна.

10. Прделайте в любом порядке такие операции: один из узлов, лежащих внутри или на границе треугольника (одного из уже полученных треугольников разбиения), соединяется с вершинами этого треугольника.

20. Для выпуклого многоугольника это очевидно. В невыпуклом наибольший угол больше 180° . Проведите биссектрису "до упора" и затем сдвигайте полученную точку по стороне, пока отрезок, соединяющий её с вершиной угла, не встретит какую-то вершину многоугольника.

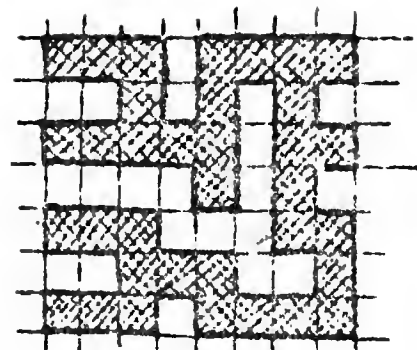


Рис. 31

З а д а н и е №

Обязательные задачи:

- | | | |
|---------|----------|----------|
| 1) 1.3. | 5) 2.1. | 9) 2.20. |
| 2) 1.4. | 6) 2.3. | 10) 3.2. |
| 3) 1.7. | 7) 2.5. | 11) 3.3. |
| 4) 1.8. | 8) 2.18. | 12) 3.4. |

Дополнительные задачи.

- | | | |
|---------|----------|----------|
| 1) 2.6. | 5) 2.13. | 9) 2.21. |
| 2) 2.7. | 6) 2.14. | 10) 3.6. |
| 3) 2.8. | 7) 2.15. | 11) 3.7. |
| 4) 2.9. | 8) 2.19. | |

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" — решено не менее 6 обязательных задач;

"4" — решено не менее 9 обязательных задач;

"5" — решены все обязательные задачи.

Дополнительные задачи: "4" — решено не менее 5 дополнительных задач;

"5" — решено не менее 8 дополнительных задач.

Методическая комиссия ВЗМП.

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ АПН СССР

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(Сборник заданий для учащихся У111 - IX кл.)

МОСКВА 1975

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ
И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ АПИ СССР

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
(сборник заданий для учащихся УШ -- IX кл.)

Москва, 1975

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник предназначен для заданий учащимся 8-9 классов.

В первых трех параграфах мы напоминаем основные факты школьной планиметрии.

Надеемся, что доказательства теорем и формул, которые отсутствуют в школьном учебнике, послужат хорошими упражнениями для школьников, интересующихся геометрией. Кроме того, конспективный характер изложения даст им возможность ориентироваться сразу во всем материале и успешно решать задачи, которые приведены в последнем параграфе.

В конце сборника имеется довольно большой список литературы по геометрии, который можно рассматривать как дополнительный материал.

Составители: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ.

О Г Л А В Л Е Н И Е

§1. Геометрические преобразования	4
§2. Метод координат (сводка формул)	18
§3. Основные факты школьной планиметрии	20
§4. Разные задачи	25
Книги и учебники по геометрии	34

§ 1. Геометрические преобразования плоскости

Геометрические преобразования плоскости — это функции, у которых и "область определения", и "множество значений" является множеством точек плоскости. Этим для удобства они собраны вместе.

1. Параллельный перенос (или поступательное перемещение):

каждая точка M сдвигается в точку M' в одном и том же направлении и на одно и то же расстояние.

Можно говорить о переносе на данный вектор \vec{a} , тогда $\vec{MM'} = \vec{a}$ для всех точек M .

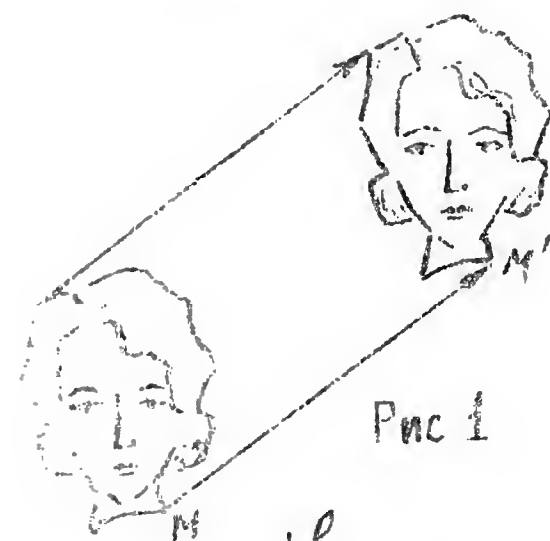


Рис. 1

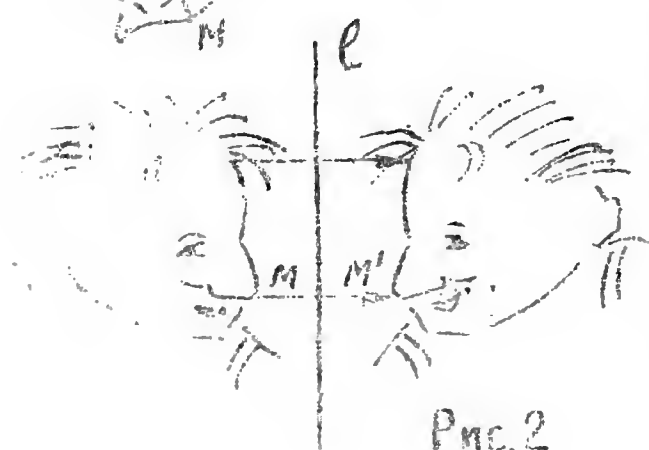


Рис. 2

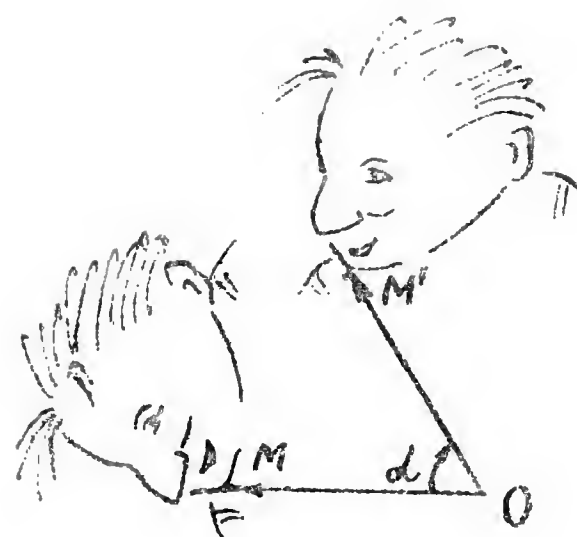


Рис. 3

2. Симметрия относительно прямой ℓ :

каждой точке M ставится в соответствие точка M' так, что $(MM') \perp \ell$ и середина $[MM']$ лежит на прямой ℓ .

3. Поворот на угол α вокруг точки O : $|OM| = |OM'|$ и $\angle MOM' = \alpha$; (заметьте, что кроме угла α и точки O , нужно всегда указывать и направление поворота — по или против часовой стрелки. Часто считают, что положительные значения α соответствуют вращению против часовой стрелки, отрицательные — по).

4. Симметрия относительно точки O : каждая точка M переходит в точку M' такую, что середина отрезка MM' лежит в точке O . Это — то же самое преобразование, что и поворот на угол 180° вокруг точки O .



Рис. 4

Все эти преобразования сохраняют расстояния между точками:

$$|MN| = |M'N'|$$

Такие преобразования называются перемещениями (или, в более старой терминологии — движениями).

В геометрии две фигуры считаются конгруэнтными, если одну из них можно перевести в другую с помощью перемещения. Пусть, в самом деле, на плоскости расположены две конгруэнтные фигуры. Каким наиболее простым движением можно передвинуть первую фигуру на место второй? Оказывается, что это всегда можно сделать либо поворотом, либо параллельным переносом.

*)

Условием представлять себе дело так. На неподвижной плоскости нарисована фигура — эталон. На этой плоскости лежит еще одна плоскость, которую можно двигать относительно первой, и на ней тоже нарисована фигура, конгруэнтная эталону. Все происходит так, как-будто что-то нарисовано на столе и то же самое нарисовано на большом листе прозрачной бумаги, который лежит на этом столе.

Рассмотрим сначала случай, когда фигура представляет собой отрезок. Итак, пусть на плоскости как-то расположены два конгруэнтных отрезка AB и $A'B'$. Мы утверждаем, что $[AB]$ можно переместить в положение $[A'B']$ либо поворотом вокруг некоторой точки O , либо параллельным переносом.

Найдем нужный центр O поворота. Точка O должна быть центром окружности, проходящей через точки A и A' , и следовательно, точка O лежит на перпендикуляре ℓ_1 к отрезку AA' , проходящем через его середину.

В то же время точка O должна быть и центром окружности, проходящей через точки B и B' , следовательно, точка O лежит на перпендикуляре ℓ_2 к отрезку BB' в его середине. Таким образом, точка O должна быть точкой пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 (рис. 5).

*) Здесь и далее в книге ошибка — вопреки определению, симметрия (осевая) не считается перемещением.

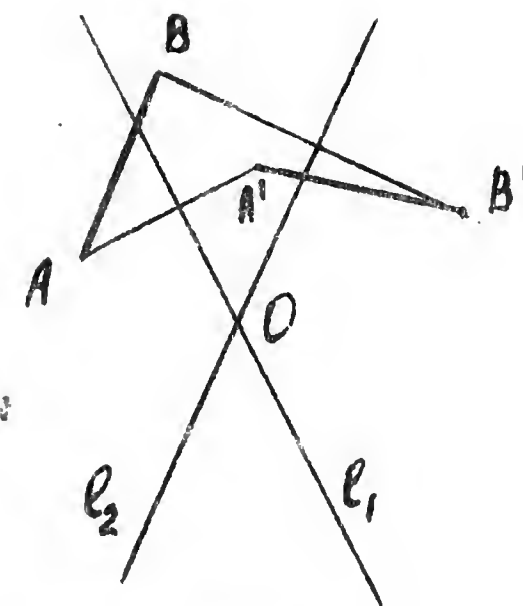


Рис. 5

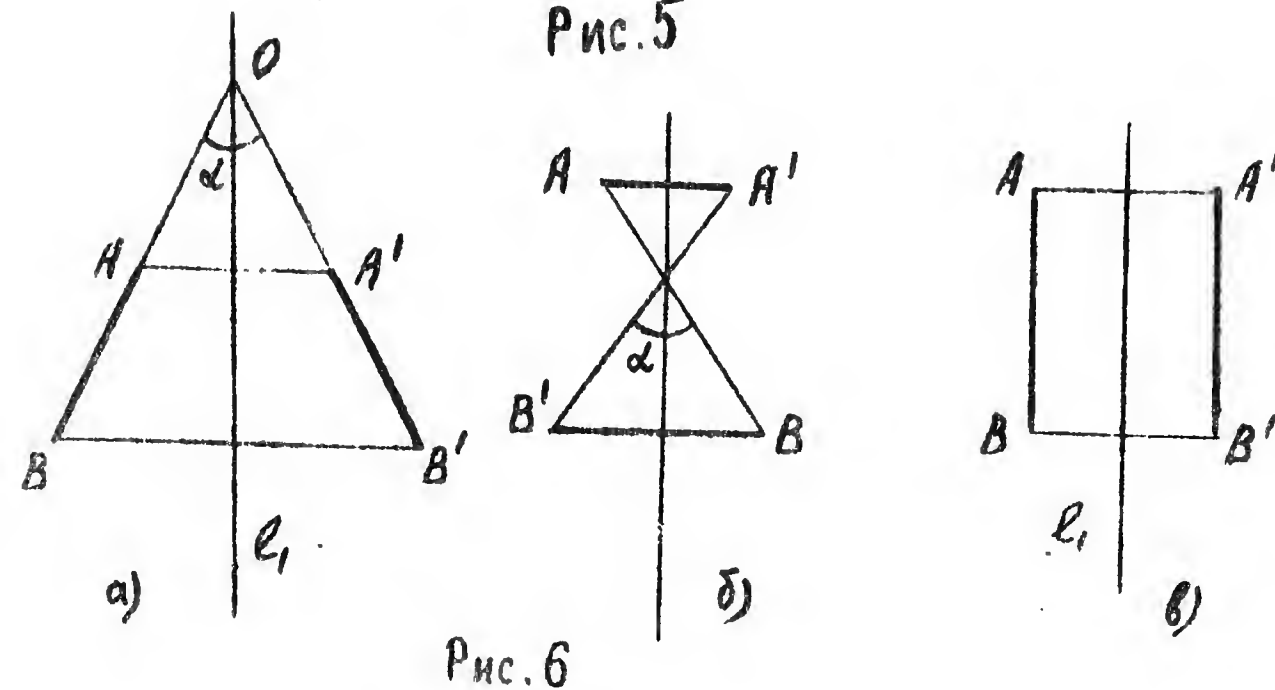


Рис. 6

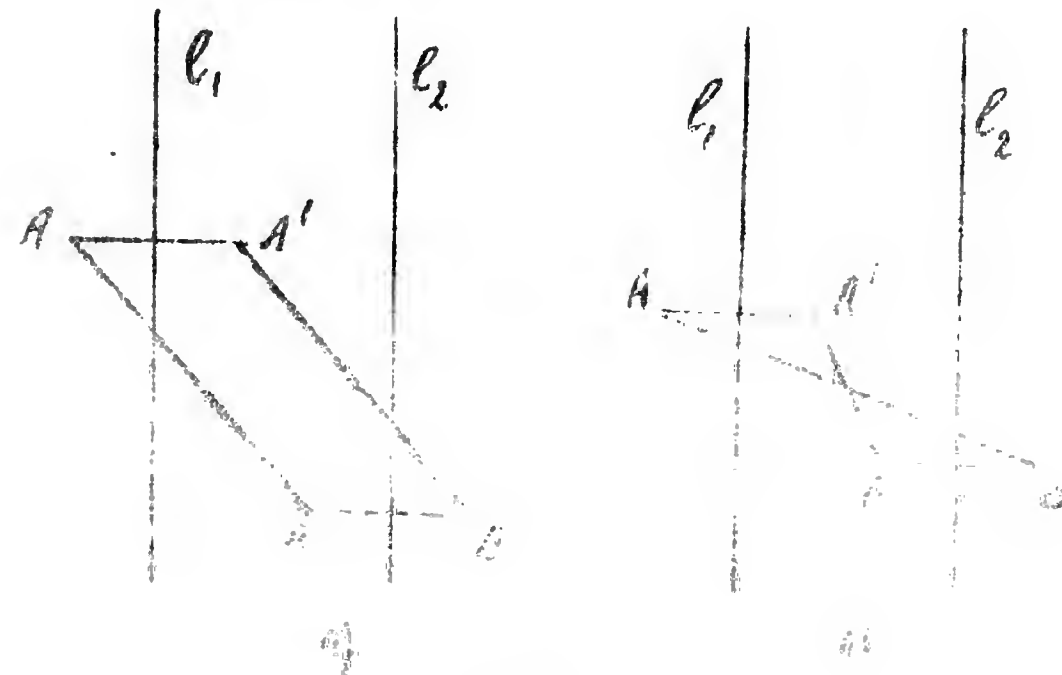


Рис. 7

Остается показать, что, действительно, повернув на некоторый угол отрезок AB вокруг точки O , мы получим отрезок $A'B'$, т.е. что $\angle AOA' = \angle BOB'$.

Для этого заметим, что во-первых, $\angle AOA' = \angle AOB + \angle BOA'$
 $\angle BOB' = \angle A'OB' + \angle BOA'$,
 и, во-вторых, $\angle AOB = \angle A'OB'$, т.к. треугольники AOB и $A'OB'$ конгруэнтны. Тем самым точка O действительно является искомым центром вращения.

Конечно, приведенное рассуждение годится, только если прямые l_1 и l_2 пересекаются. Но может случиться, что прямые l_1 и l_2 совпадают или параллельны.

Когда прямые l_1 и l_2 совпадают, отрезки AB и $A'B'$ симметричны относительно прямой l_1 . В этом случае отрезки AB и $A'B'$ можно совместить либо поворотом вокруг точки пересечения прямых AB и $A'B'$ (см. рис. 6а)б), либо параллельным переносом (если $(AB) \parallel (A'B')$ — рис. 6в).

Когда прямые l_1 и l_2 параллельны, отрезки AB и $A'B'$ параллельны друг другу и их можно совместить параллельным переносом (рис. 7а), подумайте, почему невозможен случай, изображенный на рис. 7б).

Пусть теперь у нас имеется произвольная фигура. Заметим, что ее положение на плоскости вполне определяется положением только двух ее точек. В самом деле, если закрепить одну точку фигуры, то фигура сможет только вращаться вокруг этой точки, если же закрепить еще одну ее точку, то сдвинуть фигуру уже не удастся.

Из этого замечания следует ответ на вопрос, поставленный в самом начале параграфа. Пусть на плоскости как-то расположены две конгруэнтные фигуры. Отметим две точки A и B на одной из них и соответствующие им точки A' и B' на другой. Если отрезок $A'B'$ получается из отрезка AB параллельным переносом, то при том же параллельном переносе первая фигура займет положение второй. Если отрезок $A'B'$ получается из отрезка AB поворотом вокруг точки O , то же можно сказать и про фигуры.

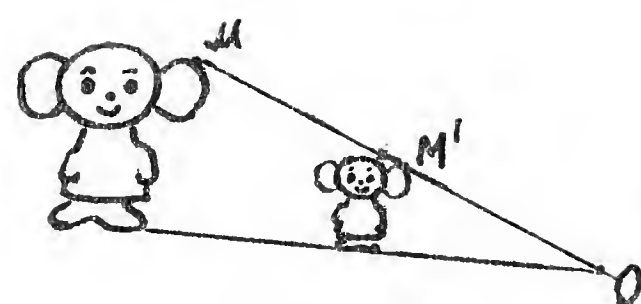


Рис. 8

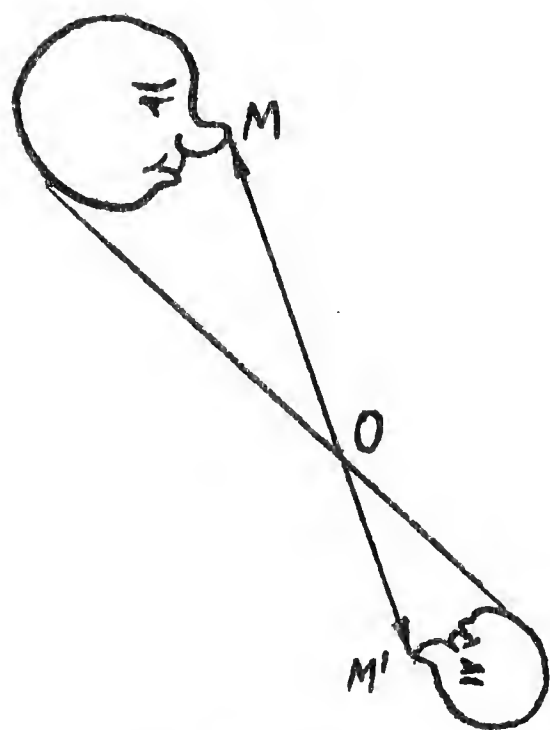


Рис. 9

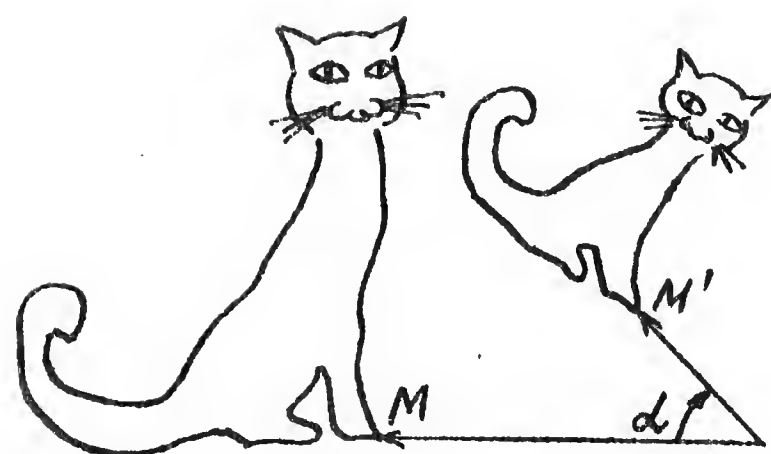


Рис. 10

5. Гомотетия с центром O и коэффициентом $K > 0$.

Каждая точка M переходит в такую точку M' , которая лежит на луче $[OM)$ и для которой

$$\frac{|OM'|}{|OM|} = K.$$

6. "Обратная" гомотетия, или гомотетия с центром O и коэффициентом $K < 0$. Каждая точка M переходит в такую точку M' , что точка O лежит на отрезке MM' и $|OM'|/|OM| = |K|$.

(При $K = -1$ получаем симметрии относительно точки O).

7. Центрально-подобный поворот на угол α с центром O и коэффициентом $K > 0$:

$$\angle MOM' = \alpha \quad (\text{с учетом направления!}), \quad |OM'|/|OM| = K$$

Заметим, что при $\alpha = 180^\circ$ получаем гомотетию с коэффициентом $(-K)$, так что наш пункт

7 охватывает пункты 3, 4 и 5 как частные случаи.

Мы не будем строить здесь красивую теорию геометрических преобразований. О ней можно почитать во многих книгах (см. список в конце брошюры). Укажем только одну теорему:

если преобразование $M \rightarrow M'$ обладает тем свойством, что отрезок $M'N'$ параллелен $[MN]$

$$\text{и } |N'N'|/|MN| = K,$$

то при $K \neq 1$ это преобразование - обязательно гомотетия с коэффициентом K или $-K$, а при $K = 1$ - либо (1) перенос, либо (2) симметрия относительно некоторой точки. (Поэтому преобразования (1) и (2) иногда считаются частным случаем гомотетии).

Заметим, что у нас геометрическое преобразование определено сразу на всей плоскости. Но... впрочем, предоставим лучше слово Ж.Адамару.

"Однако не всегда следует применять преобразование ко всей рассматриваемой фигуре. Напротив, во многих случаях оказывается удобнее преобразовать только часть фигуры.

Последнее имеет, в частности, место в случае тех простых преобразований, о которых мы только что говорили: перемещения, симметрии, гомотетии и общего случая подобия. В большинстве случаев нет никакого смысла применять эти преобразования ко всей фигуре, поскольку свойства преобразованной фигуры не проще и не сложнее свойств первоначальной фигуры: обе фигуры обладают одними и теми же свойствами ¹⁾. Напротив, во многих задачах бывает необходимо подвергнуть одному из этих преобразований определенную часть фигуры.

Задача I. Пусть даны две параллельные прямые и две точки A и B , находящиеся вне этих параллельных и расположенные по обе стороны от них; найдите ломаную линию наименьшей длины, соединяющую точку A и B , если вершины этой ломаной лежат на данных прямых и отрезок ломаной между обеими параллельными имеет данное направление:

Решение. Пусть $ACDB$ - искомая ломаная, точка D

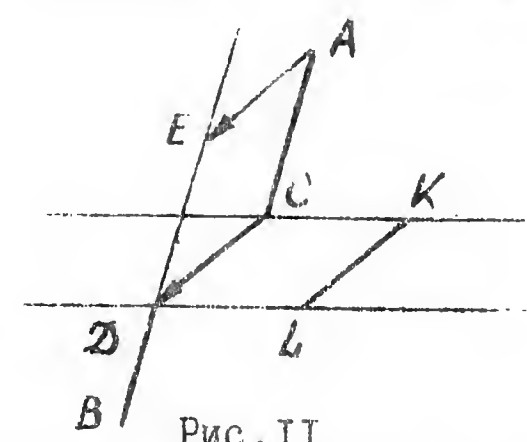


Рис. II.

получается из точки C с помощью параллельного переноса, который можно, очевидно, считать известным, так как отрезки, отсекаемые двумя данными параллельными прямыми на любой прямой данного направления, имеют одну и ту же длину. Мы можем выполнить этот перенос над

1). Геометрия изучает как раз те свойства фигур, которые не изменяются при их перемещении.

отрезком AC ; точка A преобразуется в точку E , положение которой известно, а отрезок AC - в отрезок ED той же длины. Отсюда легко вывести, что точки E, D, B должны лежать на одной прямой".

Задача 1-2. Дана прямая ℓ и точка A .

- Найдите множество середин отрезков AL , где L - произвольная точка прямой ℓ .
- Найдите множество точек M таких, что середина отрезка MA лежит на прямой ℓ .
- Найдите множество точек N таких, что конец L отрезка NL с серединой в данной точке A лежит на прямой ℓ .

Решение задачи 1-2 (б). Для каждой точки K прямой ℓ можно построить единственный отрезок AM , у которого конец A - данная точка и K - середина: для этого нужно отложить на продолжении отрезка AK отрезок $[KM] \cong [AK]$ (рис.12).

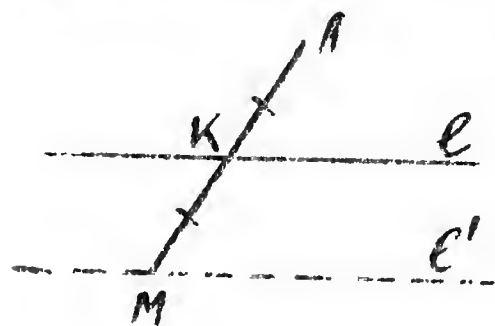


Рис.12.

Итак, любая точка M искомого множества получается из какой-то точки прямой ℓ , если ее "отодвинуть в 2 раза дальше" от точки A .
При подобном преобразовании - гомотетии с центром в точке A и с коэффициентом 2 - прямая ℓ перейдет, конечно, в прямую ℓ' , параллельную ℓ и отстоящую от точки A вдвое дальше, чем прямая ℓ . Эта прямая ℓ' (показанная на рисунке пунктиром) и будет искомым множеством.

Указание к задаче в). Постройте прямую ℓ' , симметричную прямой ℓ относительно центра A . Она и будет искомым множеством.

Задача 1-3. Постройте трапецию по заданным основаниям a, b и боковым сторонам c и d .

Указание. Заметим, что точка K (см.рис.13) получается переносом из точки L на расстояние b в направлении (NM) . Отсюда ясно, что дело сводится к построению треугольника NLM

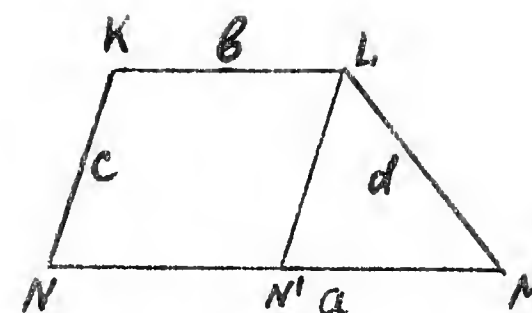


Рис.13.

Задача 1-4. Дана точка A и прямая ℓ . Найдите множество вершин C равносторонних треугольников ABC , у которых вершины B лежат на прямой ℓ .

Указание. Вершина C получается из B поворотом на 60° (в ту или другую сторону!) вокруг точки A (см.рис.14).

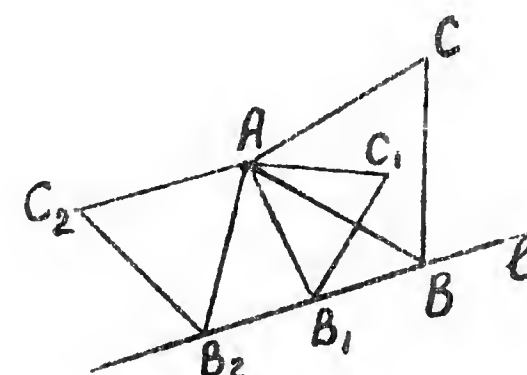


Рис.14.

по трем сторонам: c, d и $|a-b|$ (Здесь N' - точка, полученная тем же переносом из точки N).

Поэтому искомым множеством будут две прямые, получающиеся из ℓ при повороте на $\pm 60^\circ$ вокруг точки A .

Задача 1-5. Даны две точки A и B и две прямые, ℓ_1 и ℓ_2 . Постройте параллелограммы $ABCD$ так, чтобы C лежала на ℓ_1 и D - на ℓ_2 .

Задача 1-6. Две окружности пересекаются в точках A и B . Проведите через точку A прямую, на которой обе окружности высекают конгруэнтные хорды.

Задача 1-7. Пусть O - центр окружности, описанной около треугольника ABC ; точки K, C, M симметричны точке O относительно прямых AB, BC, CA . Докажите, что $\triangle KLM \cong \triangle ABC$. Будут ли эти треугольники гомотетичны?

Задача 1-8. Крышка ломберного стола имеет размеры $2a \times b$. Она прикреплена к раме только в одной точке O , вокруг которой может вращаться. Размеры рамы - $b \times a$. Точка O выбрана так, что если сложить крышку вдвое (по средней линии AB) и повернуть ее вокруг точки O на 90° , то она в точности совпадет с рамой (см.рис.15). Где находится точка O ?

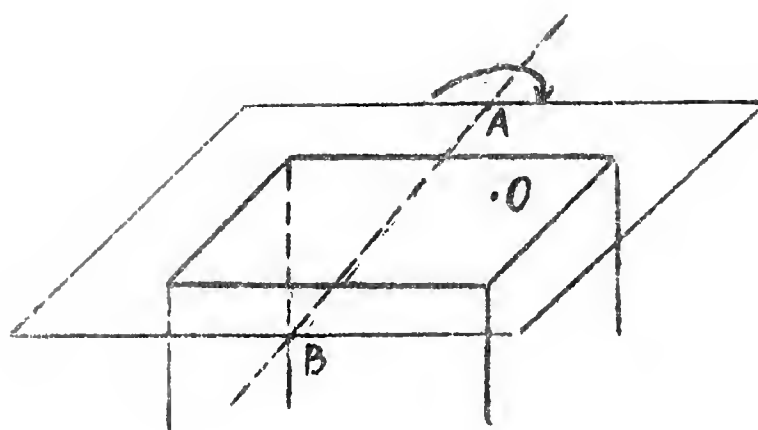


Рис.15.

Задача I-9. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку написано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть, если вначале написано: а) 7 минусов; б) 8 минусов; в) K минусов?

Решение. Выигрывает начинающий. Опишем, как он может играть, чтобы наверняка выиграть. Первый ход надо сделать в середине, чтобы оставшиеся минусы образовали два отдельных

$- - - + - - -$
 $K = 7$
 $- - - + + - - -$
 $K = 8$

Рис.16.

"куска" равной длины (на рис.16 изображена позиция после первого хода для $K = 7$ и $K = 8$).

После этого надо переправлять минусы, симметричные тем, которые переправлял второй. Так, если второй переправил n -й (или n -й и $n+1$ -й) минус справа, то надо переправить n -й (или n -й и $(n+1)$ -й) минус слева. Тогда после каждого хода первого будет получаться симметричная позиция. Второй будет вынужден каждым ходом нарушать симметрию и не сможет получить после своего хода позицию "все плюсы", так как она симметрична.

Задача I-10. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге по кругу нарисовано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть?

Задача I-11. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки O на угол 48° она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте вокруг той же O на угол: а) 90° ; б) 72° ?

Ответ: а) нельзя, б) можно.

Решение. Понятно, что если повернуть фигуру дважды на 48° , то она тоже перейдет в себя. Вообще она заведомо перейдет в себя при повороте на любой угол вида

$$(1) \quad 48^\circ \cdot K + 360^\circ \cdot n$$

где K, n — любые целые числа. К таким углам относятся:

$48^\circ \cdot 8 = 384^\circ$ (получается из (1) при $K=8, n=0$); $384^\circ - 360^\circ = 24^\circ$ ($K=8, n=-1$), а значит и $24^\circ \cdot 3 = 72^\circ$. Ответ на вопрос б) получен: да, при повороте на 72° фигура заведомо переходит в себя.

Но 90° не представимо в виде (1), так как любое число вида (1) делится на 4 (так как и 48, и 360 делятся на 4), а 90 на 4 не делится. Следовательно, таким способом нельзя доказать, что фигура при повороте на 90° переходит в себя. Повидимому, для 90° надо доказывать противоположное утверждение: "существует фигура на плоскости, которая при повороте вокруг точки O на 48° переходит в себя, а при повороте вокруг O на 90° не переходит в себя". Достаточно указать хоть одну такую фигуру, все равно какую. Мы для построения такой фигуры воспользуемся тем, что уже заметили: 48 и 360 делятся на 4, а 90 на 4 не делится. Построим фигуру, для которой 4° — это наименьший угол, при повороте на который она переходит в себя. Для этого проведем окружность с центром в точке O и отметим на ней точки через каждые четыре градуса. Всего получится $\frac{360}{4} = 90$ точек. Множество, состоящее из этих 90 точек и есть нужная нам фигура. Действительно, она

переходит в себя при повороте на 4° : каждая точка переходит в соседнюю. Поэтому фигура переходит в себя и при повороте на $12 \cdot 4^\circ = 48^\circ$. При повороте же на 90° она не переходит в себя: ее точки попадают в центры незаполненных промежутков окружности.

Замечание. Можно привести и более простой пример к пункту а). Так как $360^\circ : 24^\circ = 15$, то это правильный 15-угольник: при повороте вокруг своего центра на 48° он переходит в себя, а на 90° — не переходит.

Задача I-12. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки O на угол в 19° она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол в 61° ?

Задача I-13. Угол между двумя осями симметрии фигуры равен 30° . Совпадает ли она сама с собой при повороте вокруг точки пересечения этих осей на угол:

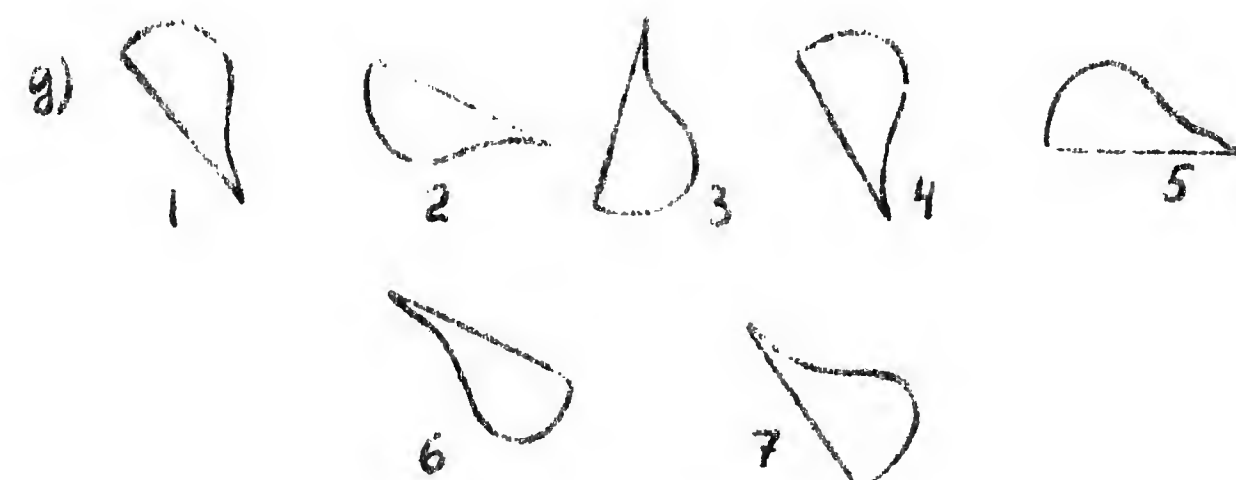
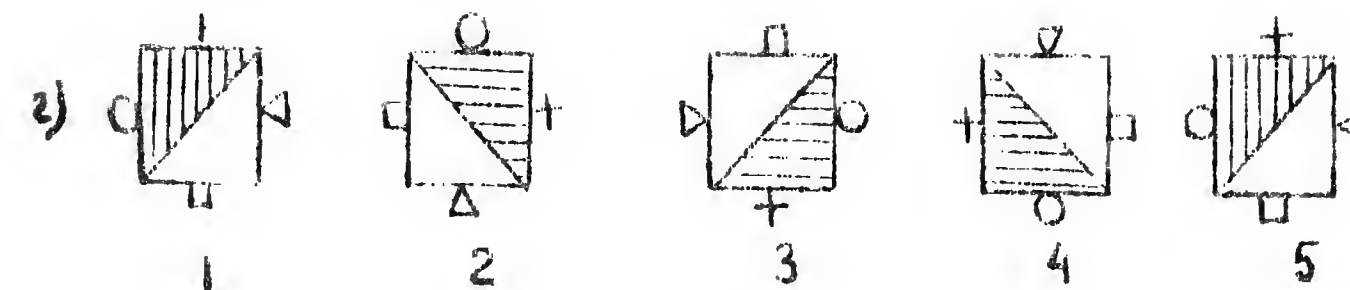
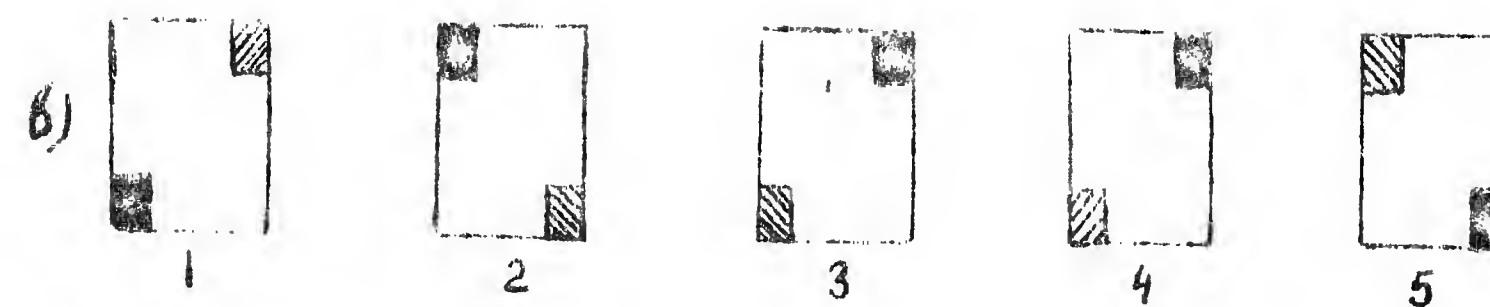
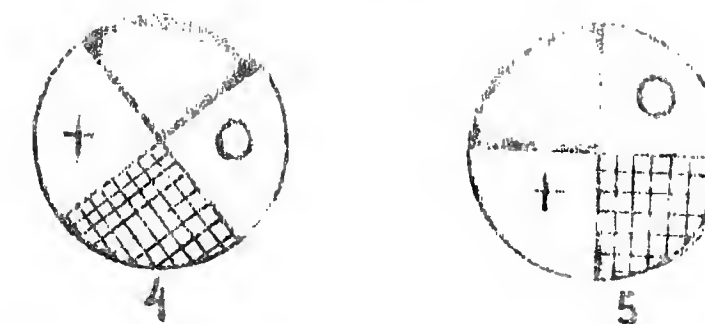
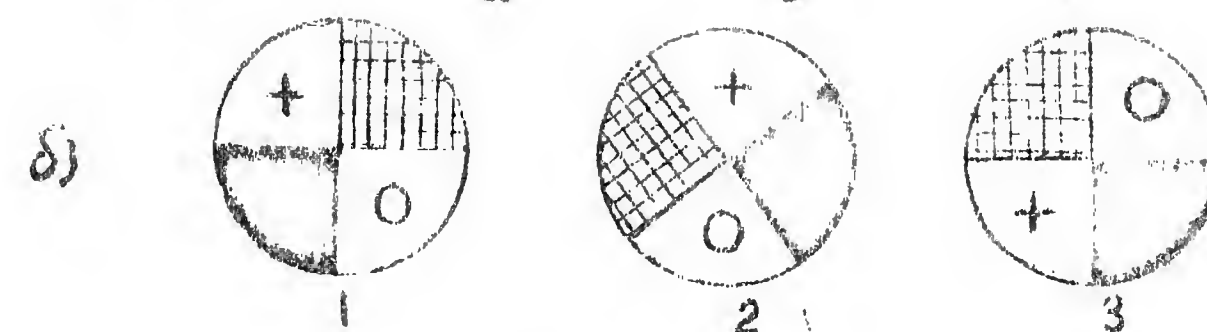
- а) 60° ,
- б) 30° ?

Задача I-14. Известно, что по двум прямым дорогам с одинаковой скоростью едут две машины. Докажите, что можно разместить наблюдателя в таком месте, что в любой момент времени машины будут находиться от него на одинаковом расстоянии.

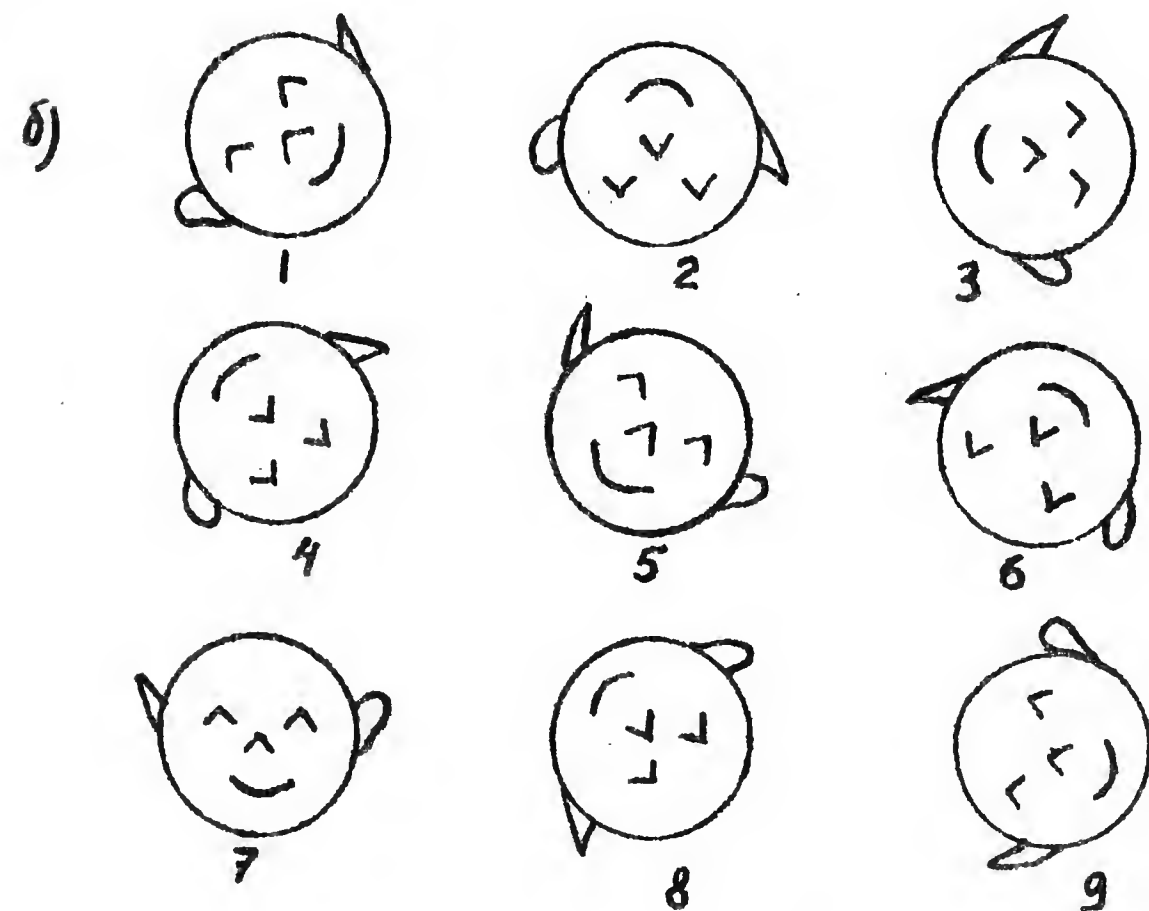
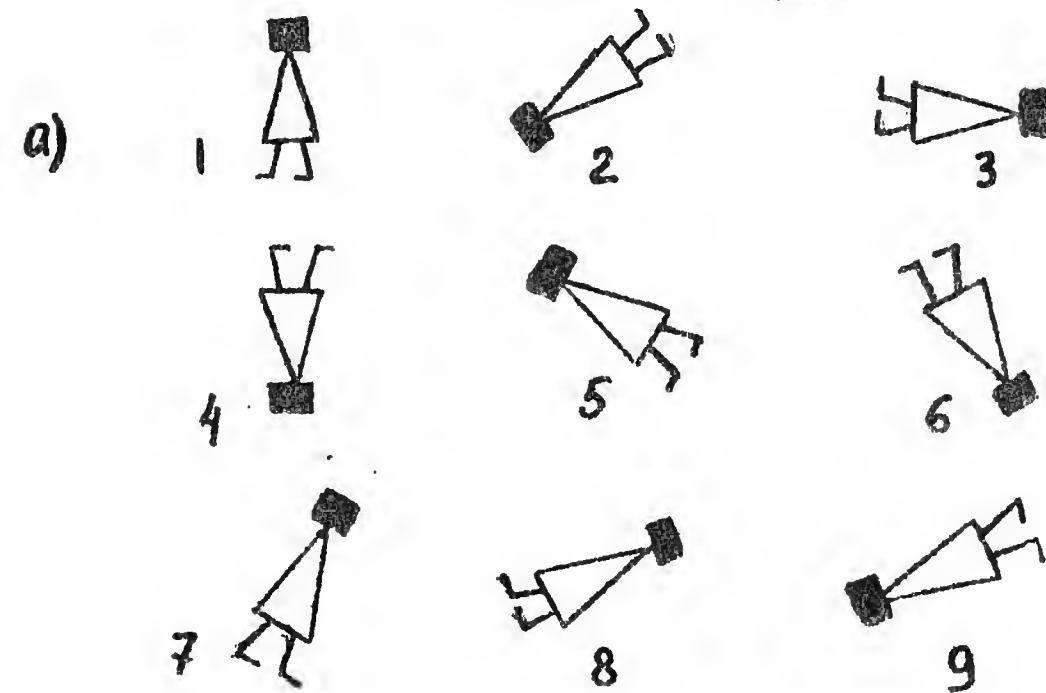
Задача I-15. а). Фигуру сдвинули на вектор $\overline{AA'}$ и потом повернули вокруг точки A' на угол против часовой стрелки. Каким единственным поворотом можно перевести фигуру из начального положения в конечное? (Где находится центр этого поворота?)

б). Фигуру повернули сначала на угол α_1 вокруг точки O_1 , а потом — на угол α_2 вокруг точки O_2 (все углы отсчитываются против часовой стрелки; $0 < \alpha_1 < 360^\circ$, $0 < \alpha_2 < 360^\circ$). К какому единственному повороту или переносу сводится последовательность этих двух движений?

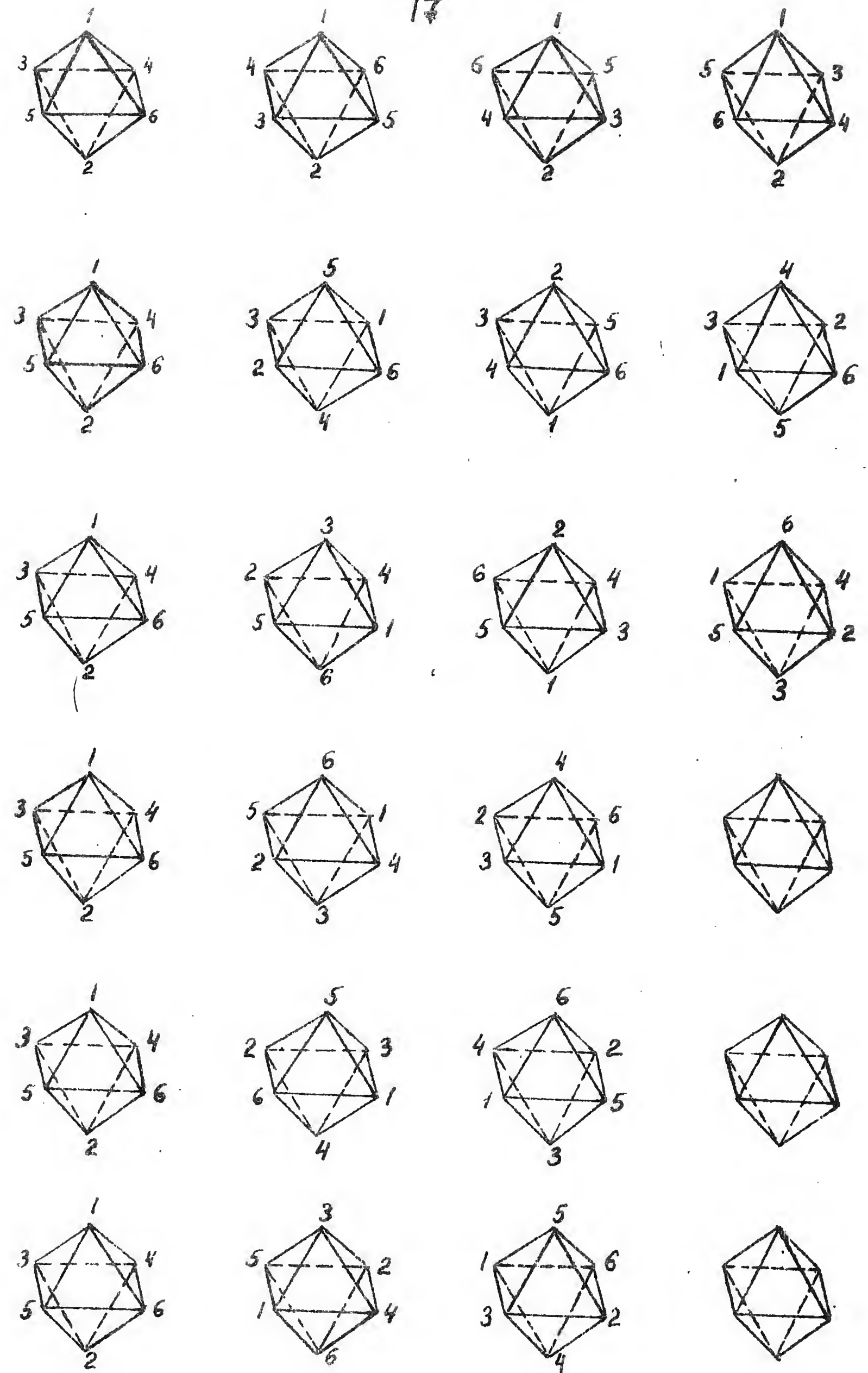
I-16. Исключите лишнюю фигуру и объясните, почему она лишняя. Например, в строчке а) фигура поворачивается на 45° против часовой стрелки и ее элементы перекрашиваются, поэтому лишняя — фигура 3.



I-17. Исключите три лишние фигуры:



I-18. В каждой строчке октаэдр вращается вокруг одной оси, например, в строчке а) – вокруг оси (1,2), в строчке г) – вокруг оси, проходящей через центры треугольников (1,4,6) и (5,3,2). Укажите оси для каждой строчки. Как надо расставить цифры в последних октаэдрах строчек г)–е)? Нарисуйте положение октаэдра, получающегося при вращении вокруг осей, проходящих через середины противоположных ребер (3,5) и (4,6); (1,4) и (5, 2) и т.д.



§ 2. Метод координат (основные формулы)

Как только на плоскости выбрана система координат Oxy , каждой точке A плоскости ставится в соответствие пара чисел $(x; y)$, — ее координаты. Соответствие между точками плоскости и парами чисел взаимно однозначно (т.е. каждой точке соответствует одна пара чисел, и обратно).

1). Середина отрезка между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ имеет координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$.
Вообще, точка, делящая отрезок A_1A_2 в отношении $p_1:p_2$, имеет координаты

$$(\frac{p_2 x_1 + p_1 x_2}{p_1 + p_2}; \frac{p_2 y_1 + p_1 y_2}{p_1 + p_2}).$$

2). Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ равно $|A_1A_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

Отсюда следует, что множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, есть окружность с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиуса r .

3). Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax+by+c=0$ (a, b, c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно), есть прямая. Обратно, каждая прямая задается уравнением $ax+by+c=0$. При этом числа a, b, c определяются для данной прямой однозначно с точностью до пропорциональности (если умножить их все на одно и то же число k , то полученное уравнение $kax+kby+kc=0$ будет определять ту же прямую).

4). Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой ℓ , задаваемой уравнением $ax+by+c=0$, равно

$$\rho(M, \ell) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Покажем, как можно вывести эту формулу, когда $b \neq 0$.
в этом случае уравнение прямой можно записать так: $y = -\frac{ax+c}{b}$.

найдем на прямой точку $(x'; y')$, расстояние от которой до точки $(x_0; y_0)$ наименьшее. Квадрат расстояния от точки $(x; y)$, лежащей на прямой, до точки $(x_0; y_0)$ равен

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (x-x_0)^2 + (\frac{-ax+c}{b}-y_0)^2 =$$

$$= Ax^2+Bx+C = A(x+\frac{B}{2A})^2 + \frac{4Ac-B^2}{4A},$$

$$\text{где } A = 1 + \frac{a^2}{b^2}; \quad B = 2 \frac{ac+aby_0-b^2x_0}{b^2},$$

$$C = x_0^2 + (\frac{c}{b} + y_0)^2.$$

Минимум квадрата расстояния достигается при

$$x' = -\frac{B}{2A} = -\frac{b(ac+aby_0-b^2x_0)}{a^2b^2}$$

и равен $\frac{(ax_0+by_0+c)^2}{a^2b^2}$, что и требовалось доказать.

5). Параллельный перенос. Если точка M имеет координаты $(x_0; y_0)$, то при переносе на данный вектор \vec{a} с координатами $(a; b)$ точка M переходит в точку M' с координатами $(x_0+a; y_0+b)$.

6). Симметрия относительно координатных осей. Точка $M(x_0; y_0)$ при симметрии относительно оси Ox переходит в точку $M'(x_0; -y_0)$, а при симметрии относительно оси Oy — в точку $M'(-x_0; y_0)$.

7). Поворот на угол α около начала координат. При таком повороте точка $M(x_0; y_0)$ переходит в точку

$$M'(x_0 \cos \alpha - y_0 \sin \alpha; x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha).$$

8). Симметрия относительно начала координат. При этой симметрии точка $M(x_0; y_0)$ переходит в точку $M'(-x_0; -y_0)$.

9). Гомотетия с центром в начале координат с коэффициентом k . Точка $M(x_0; y_0)$ переходит в точку $M'(kx_0; ky_0)$.

§ 3. Основные факты школьной планиметрии

1. Параллелограммы

Параллелограмм называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Теорема 1-1. Во всяком параллелограмме противоположные стороны попарно конгруэнтны.

В этой теореме условие состоит из двух частей:

1) две противоположные стороны параллельны; 2) две другие стороны также параллельны. Заключение тоже состоит из двух частей: 1) две противоположные стороны конгруэнтны; 2) две другие также конгруэнтны.

Так как заключение обратного предложения можно получить, беря либо часть условия, либо полностью все условие данного предложения, то теорема 1-1 имеет две обратные теоремы.

Обратные теоремы 1-1. Четырехугольник будет параллелограммом:

- 1⁰) если его противоположные стороны попарно конгруэнтны;
- 2⁰) если какие-нибудь противоположные его стороны конгруэнтны и параллельны.

Теорема 1-2. Диагонали параллелограмма делят друг друга в точке пересечения пополам.

Обратная теорема 1-2. Если диагонали четырехугольника делятся в точке пересечения пополам, то четырехугольник — параллелограмм.

Теорема 1-3. Диагонали прямоугольника конгруэнтны между собой.

Следствие. В прямоугольном треугольнике медиана, выходящая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Обратная теорема 1-3. Всякий параллелограмм, в котором диагонали конгруэнтны — прямоугольник.

Следствие. Треугольник, в котором длина медианы конгруэнтна половине длины соответствующей стороны — прямоугольный.

Теорема 1-4. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Обратная теорема 1-4. 1⁰). Всякий параллелограмм, диаго-

нали которого перпендикулярны, есть ромб; 2⁰). Всякий параллелограмм, диагонали которого делят углы пополам, есть ромб.

2. Прямые в треугольнике, проходящие через одну точку

Теорема 2⁰.1. Во всяком треугольнике перпендикуляры, восстановленные к сторонам в их серединах (медиатрисы), пересекаются в одной точке.

Теорема 2⁰.2. Во всяком треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

Указание. Пусть дан треугольник ABC (рис. 17). Проведем через точку A прямую, параллельную (BC) , через

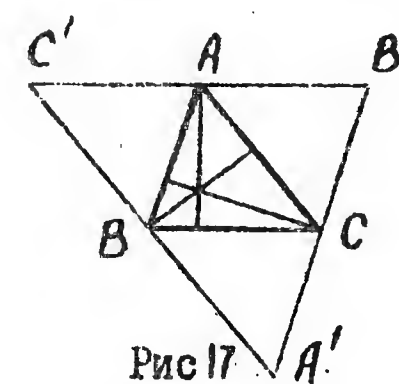


Рис. 17

точку B — прямую, параллельную (AC) и через C — прямую, параллельную (AB) . Мы получим, таким образом, новый треугольник $A'B'C'$. Можно доказать, что высоты треугольника ABC являются перпендикулярами, восстановленными к сторонам

нового треугольника в их серединах, и затем сослаться на теорему 2⁰.1.

Теорема 2⁰.3. Во всяком треугольнике:

- 1⁰) биссектрисы трех углов пересекаются в одной точке;
- 2⁰) биссектриса одного из углов и биссектрисы двух внешних углов, к нему не прилежащих, пересекаются в одной точке.

Теорема 2⁰.5. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей на одной трети длины каждой из них, считая от соответствующего основания.

3⁰. Свойство вписанного угла.

Углом, вписанным в окружность, называется угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец.

Теорема 3⁰.1. Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги, на которую он опирается.

Следствия. 1⁰. Все углы, вписанные в одну и ту же дугу окружности, конгруэнтны как имеющие одну и ту же меру.

2°. Угол, вписанный в полуокружность - прямой угол.

Теорема 3.2. Величина угла, образованного касательной и хордой, имеющими общую точку на окружности, равна половине угловой величины дуги, лежащей внутри этого угла.

Теорема 3.3. Величина угла, образованного двумя секущими, пересекающимися внутри окружности, равна полусумме величин дуг, заключающихся: одна - между его сторонами, другая - между их продолжениями.

Теорема 3.4. Величина угла, образованного двумя секущими, пересекающимися вне окружности, равна полуразности величин дуг, заключенных между его сторонами.

Теорема 3.5. Во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 2α .

Обратная теорема 3.5. Если в выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым углам, то четырехугольник может быть вписан в окружность.

4°. П о д о б и е .

Основная теорема 4.1. Если несколько параллельных прямых пересечены двумя секущими, то эти секущие делятся параллельными на пропорциональные части.

Следствие. Прямая DE , параллельная стороне BC треугольника ABC , делит две другие стороны AB и AC на пропорциональные части.

Обратная теорема к следствию. Если прямая делит две стороны треугольника на пропорциональные части, то она параллельна третьей стороне.

Теорема 4.2. Во всяком треугольнике:

1°) биссектриса любого угла делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам;

2°) биссектриса внешнего угла делит противоположную сторону внешним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Указание. 1°. Пусть $[AD]$ - биссектриса угла A треугольника ABC (рис. 18). Нужно доказать, что $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Проведите прямую (CE) , параллельную (AD) , до пересечения в точке E с (AB) и докажите, что $|AE| = |AC|$; затем воспользуйтесь теоремой 4.2 для треугольника BEC .

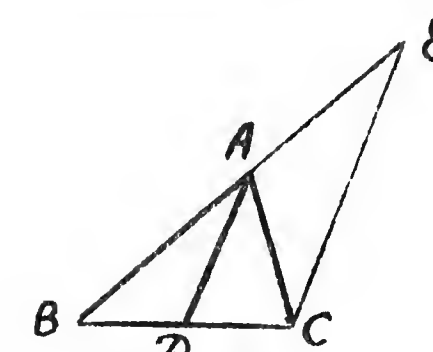


Рис. 18

Указание 2°. Биссектриса $[AF]$ внешнего угла A (рис. 19) треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке F (если треугольник - неравнобедренный). Нужно доказать, что $\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Проведите прямую (CG) , параллельную (AF) , и докажете, что $|AC| = |AG|$.

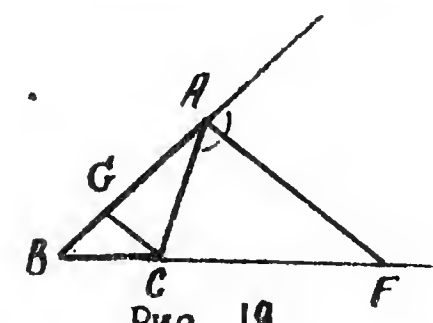


Рис. 19

Обратная теорема 4.3. 1°. Если прямая, выходящая из вершины треугольника, делит внутренним образом противоположную сторону на части, пропорциональные двум прилежащим сторонам, то она является биссектрисой угла при вершине.

2°. Если прямая, выходящая из вершины треугольника, делит внешним образом противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то она является биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Теорема 4.4. (признаки подобия треугольников).

Два треугольника подобны, если выполнено одно из следующих условий:

1°) они имеют по два угла, соответственно конгруэнтных друг другу;

2°) они имеют по конгруэнтному углу, заключенному между пропорциональными сторонами;

3°) три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого.

Отношение соответственных сторон подобных треугольников или многоугольников равно коэффициенту подобия.

Теорема 4.5. Отношение площадей подобных многоугольников равно отношению квадратов их периметров и равно квадрату коэффициента подобия.

5°. Метрические соотношения в треугольнике

Введем следующие обозначения: a, b, c - длины сторон треугольника;

A, B, C - углы против этих сторон соответственно;

m_a, m_b, m_c - длины медиан, выходящих соответственно из этих углов;

$\beta_a, \beta_b, \beta_c$ - длины биссектрис, выходящих соответственно из этих углов;

h_a, h_b, h_c - длины высот треугольника;

R - радиус описанной окружности;

$\frac{1}{2}(a+b+c)=p$ - полупериметр треугольника.

Пифагора теорема 5.1. Если угол C прямой, то $a^2 + b^2 = c^2$.

Обратная теорема 5.1. Если $a^2 + b^2 = c^2$, то угол C прямой.

Теорема косинусов 5.2. Имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Теорема синусов 5.3. Имеет место равенство

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Следствие. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорема 5.4. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

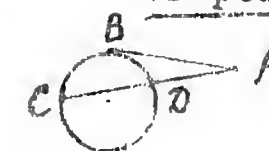
Теорема 5.5. $\beta_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{(b+c)^2 \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{4b^2 c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2}$.

Теорема 5.6.

$$h_a^2 = \frac{4}{a^2} (2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 + 2a^2 b^2 - a^4 - b^4 - c^4) = \frac{4}{a^2} p \cdot (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{4b^2 c^2 \sin^2 A}{a^2}$$

6°. Пропорциональные отрезки в круге

Теорема 6.1.



Если через точку A , лежащую вне окружности, провести касательную (AB) и секущую (AC), то $|AB|^2 = |AD| \cdot |AC|$ (см. чертёж).

Следствие. Если через точку A , взятую в плоскости данной окружности, провести к этой окружности секущие, то произведение расстояний от точки A до двух точек пересечения каждой секущей с окружностью есть величина постоянная.

Теорема 6.2. Если в круге провести две хорды $[AB]$ и $[CD]$ (см. рис. 20), пересекающиеся в точке E внутри круга, то $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$.



Рис. 20

7°. Площади многоугольников

Приведем аксиоматическое определение площади многоугольника, перечислив те её свойства, которые необходимы.

- А 1. Площадь многоугольника - положительное число.
- А 2. Площади равных (конгруэнтных) многоугольников равны.
- А 3. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
- А 4. Площадь треугольника равна половине произведения длины его основания на длину его высоты.

8°. Основные геометрические неравенства

Теорема 8.1. Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

Следствие. 1°. Длина каждой стороны треугольника больше разности длин двух других сторон.

2°. Периметр выпуклого многоугольника меньше периметра любого многоугольника, внутри которого содержится первый.

Теорема 8.2. Против большего угла в треугольнике лежит большая сторона.

Следствие. Против тупого или прямого угла треугольника всегда лежит наибольшая сторона.

Теорема 8.3. Если два треугольника имеют по неравному углу, заключённому между соответственно конгруэнтными сторонами, то против большего из неравных углов лежит большая сторона.

Много полезных теорем о геометрических неравенствах можно получить, слегка переделав теоремы об основных "геометрических местах" - множествах точек.

Приведем несколько примеров.

[А]. Множество точек, расстояние от которых до данной точки O меньше данного положительного числа r , есть внутренность круга радиуса r с центром в точке O . (А множество точек $\{M: p(M, O) > r\}$ - внешность этого круга).

[В]. Прямая, проходящая через середину отрезка AB и ему перпендикулярная, разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них (содержащей точку A) расположены все точки, которые ближе к A , чем к B , в другой - все точки, которые ближе к B , чем к A .

[Г]. Для любой точки M , лежащей внутри двух симметричных сегментов с общей хордой $[AB]$, $\widehat{AMB} > \widehat{ANB}$, где N - любая точка на дуге одного из сегментов; для любой точки M , лежащей вне этих сегментов, $\widehat{AMB} < \widehat{ANB}$.

Следствие. Если медиана $[AK]$ треугольника ABC по длине меньше (больше) половины стороны $[BC]$, то угол BAC - тупой (острый).

Эти теоремы (их список можно было бы продолжить) позволяют доказывать многие геометрические неравенства, решать задачи на отыскание максимумов и минимумов.

Часто геометрические неравенства бывает удобно доказывать с помощью алгебраических выкладок или тригонометрических формул. Например, из теоремы косинусов 5.2 сразу следует, что если для сторон a, b, c треугольника выполнено неравенство $a^2 > b^2 + c^2$ ($a^2 < b^2 + c^2$), то угол A - тупой (острый).

§ 4. Множество задач

Большинство задач этого параграфа взяты из выпусков ВзмШ "Избранные задачи" (1964-1974 гг.), а также задачник Б.Делоне, О.Витомирского "Задачник по геометрии", Э.А.Скопца и В.А.Жарова "Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия)" и из журнала "Квант" (1970-1974 гг.).

К некоторым задачам в конце параграфа имеются указания. Но не обязательно решать их так, как подсказывают эти указания.

4-1. Пусть две стороны и угол одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники конгруэнтны?

4-2. На данной прямой найдите такую точку M , чтобы расстояния от нее до двух данных точек имели: а) минимальную сумму, б) максимальную разность.

4-3. На сторонах угла найдите такие точки B , C соответственно, чтобы периметр треугольника ABC был минимален (A - данная точка внутри угла).

4-4. Два зеркала образуют угол в 2° . Луч света пущен по направлению, параллельному биссектрисе угла, в сторону его вершины. Сколько раз луч отразится в зеркалах?

4-5. Докажите, что если соединить середины сторон произвольного четырехугольника, то получится параллелограмм. Для каких четырехугольников этот параллелограмм будет прямоугольником? Ромбом? Квадратом?

4-6. Пусть медианы треугольника равны 3 см, 4 см, 5 см. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

4-7. Пусть высоты треугольника равны 3 см, 5 см, 4 см. Какой это треугольник: прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

4-8. Найдите все треугольники, у которых стороны составляют арифметическую прогрессию и углы составляют арифметическую прогрессию.

4-9. Найдите все треугольники, у которых стороны составляют геометрическую прогрессию, а углы - арифметическую прогрессию.

4-10. Каково наибольшее число острых углов может иметь выпуклый многоугольник?

4-11. Пусть a, b - две стороны треугольника, а S - его

площадь. Докажите, что: а) $S \leq \frac{ab}{2}$; б) $S \leq \frac{a^2+b^2}{4}$.

4-12. Пусть a, b, c - стороны треугольника, S - его площадь. Докажите, что: а) $S < \frac{ab+bc+ac}{6}$; б) $S < \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$.

4-13. Докажите следующие утверждения (a, b, c - стороны треугольника, p - его полупериметр, S - площадь; R, r - соответственно радиусы описанного и вписанного кругов):

$$\text{а) } S = p \cdot r; \quad \text{б) } R = \frac{abc}{4S}.$$

4-14. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ со стороны I взяты точки K, L, M, N так, что $|AK|=|BL|=|CM|=|DN|=\frac{1}{4}$. Определите площадь четырехугольника, образованного пересечениями отрезков AL, BM, CN и DK .

4-15. Докажите, что прямая, соединяющая середины оснований трапеции, проходит: а) через точку пересечения диагоналей, б) через точку пересечения продолжений боковых сторон.

4-16. Докажите, что в любой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $|AO| \cdot |BO| = |CO| \cdot |DO|$ где O - точка пересечения диагоналей AC и BD .

4-17. Точка D делит сторону AC треугольника ABC в отношении $|AD|:|DC|=1:4$. В каком отношении делит отрезок BD медиану AE треугольника ABC ?

4-18. AC и BD - две хорды окружности радиуса R , пересекающиеся под прямым углом в точке M . Найдите $|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2$.

4-19. Даны два диаметра окружности AB и CD . Из точки M окружности опущены $[MP] \perp [AB]$ и $[MQ] \perp [CD]$. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

4-20. Заданы две пересекающиеся окружности; $(CA), (DB)$ - их общие касательные (C, A, D, B - точки касания); (EF) - прямая, проведенная через точки пересечения окружностей. Докажите, что $[EF]$ - средняя линия трапеции $ABCD$.

4-21. Докажите, что прямые, соединяющие основания высот данного треугольника, ограничивают треугольник, для которого высоты данного треугольника являются биссектрисами.

4-22. На сторонах произвольного четырехугольника как на диаметрах построены круги. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.

4-23. В описанном шестиугольнике даны длины пяти сторон (по

порядку): a, b, c, d, e . Найдите длину шестой стороны.

4-24. Длины сторон треугольника равны a, b, c , причем $a^2+b^2=5c^2$. Докажите, что его медианы к сторонам a и b взаимно перпендикулярны.

4-25. Докажите, что во всяком треугольнике $h_a < \sqrt{p(p-a)}$, где p - полупериметр, h_a - высота, опущенная на сторону a .

4-26. Пусть a, b, c - длины сторон треугольника и p - его полупериметр. Докажите, что $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{1}{8}abc$.

4-27. Пусть h_1 и h_2 - две высоты треугольника и r - радиус вписанного круга. Докажите, что $\frac{1}{2r} < \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} < \frac{1}{r}$.

4-28. Радиусы двух кругов равны R и r , а расстояние между их центрами равно d . Определите длину общей внешней и общей внутренней касательной.

4-29. Два круга радиусов R и r внешне касательны. Определите радиус круга, касательного к ним и к их общей касательной.

4-30. Через точки A, B и C проведем окружность. Докажите, что расстояние от точки C до прямой AB равно среднему геометрическому расстояний от C до касательных к окружности, проведенных в точках A и B .

4-31. По основаниям a, b трапеции определите длину отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения продолжений боковых сторон, заключающегося между продолжениями диагоналей.

4-32. Докажите, что прямая, соединяющая точки пересечения биссектрис двух внутренних углов треугольника с противолежащими сторонами, пересекает третью сторону в той же точке, что и биссектриса внешнего угла при противолежащей вершине.

4-33. Через середину хорды круга длины a проведена другая хорда длины b . Определите длины отрезков, на которые хорда b делится хордой a .

4-34. По сторонам a, b, c, d (или a, b, c) трапеции определите ее площадь.

4-35. Может ли вписанный многоугольник иметь:

- а) конгруэнтные углы, но неравные стороны;
- б) конгруэнтные стороны, но неравные углы?

- 4-36. Может ли описанный многоугольник иметь:
 а) разные стороны, но равные углы;
 б) равные углы, но неравные стороны?
- 4-37. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого пятиугольника:
 а) больше периметра,
 б) меньше удвоенного периметра.
- 4-38. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки треугольника до его сторон:
 а) больше половины периметра,
 б) меньше периметра.
- 4-39. На плоскости даны три параллельные прямые. Постройте квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трех данных прямых.
- 4-40. Дан $\triangle ABC$. Из его медиан построен $\triangle A_1B_1C_1$, а из медиан этого треугольника — $\triangle A_2B_2C_2$. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$ и найдите коэффициент подобия.
- 4-41. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы конгруэнтны. Докажите, что $|AB|/|DE| = |EF|/|BC| = |CD|/|FA|$.
- 4-42. Из точки M проведены две прямые, касающиеся окружности O в точках A и B и еще одна окружность с центром в точке M и радиусом $|MA|$. На ее части, лежащей внутри окружности O , выбрана точка C . Прямая AC пересекает окружность O в точках A и K , прямая BC — в точках B и H . Докажите, что $[KH]$ — диаметр окружности O .
- 4-43. Окружность с центром O , лежащим на основании треугольника ABC ($|AB| = |BC|$), касается его боковых сторон. Проведена касательная к окружности, пересекающая отрезки AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $\triangle AMO \sim \triangle MON \sim \triangle NCO$.
- 4-44. Для всякого ли треугольника ABC найдется такая точка P , что все три точки, симметричные точке P относительно прямых AB , AC и BC , лежат на окружности, описанной около треугольника ABC ?
- 4-45. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 60^\circ$. На стороне AB лежит точка P , а на стороне BC — точка M , причем $|BP| + |BM| = |AB|$. Докажите, что $\triangle PMD$ — равносторонний.

- 4-46. Картонный треугольник с величинами углов 40° , 60° и 80° выкрасили с одной стороны черной краской, с другой — красной, положили на лист бумаги черной стороной вверх и обвели карандашом. Как разрезать треугольник на несколько частей так, чтобы, перевернув эти части красной стороной вверх, можно было покрыть ими треугольник, обведенный карандашом?
- 4-47. В треугольнике центры вписанного и описанного кругов симметричны относительно одной из его сторон. Найдите его углы.
- 4-48. Треугольник ABC после поворота около вершины A занял положение AB_1C_1 . Докажите, что если прямая AC делит пополам отрезок BB_1 , то прямая AB_1 делит пополам отрезок CC_1 .
- 4-49. Дана окружность с диаметром $[AB]$ и точка C на этом диаметре. Постройте две точки X и Y окружности, симметричные относительно прямой AB , для которых прямая YC перпендикулярна прямой XA .
- 4-50. Возьмем на высоте BH треугольника ABC произвольную точку P . Докажите, что если K — точка пересечения прямых AP и BC , L — точка пересечения прямых CP и AB , то $\angle KHB \cong \angle LHB$.
- 4-51. а). C_1 — середина отрезка A_1B_1 , C_2 — середина отрезка A_2B_2 . Докажите, что середины отрезков A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 лежат на одной прямой.
 б) Докажите, что если C_1 делит отрезок A_1B_1 в том же отношении λ , что и C_2 — отрезок A_2B_2 (но это отношение λ не равно 1), то точки A_3 , B_3 , C_3 , делящие отрезки A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 в одном и том же отношении μ , лежат на одной прямой.
- 4-52. Построим точки A_1 , B_1 , C_1 , симметричные некоторой точке M относительно середин сторон BC , CA и AB треугольника ABC . Докажите, что:
 а) точки A_1 , B_1 , C_1 лежат на одной прямой;
 б) прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке.
- 4-53. Докажите, что центр симметрии центра окружности, описанной около треугольника, относительно середины средней линии, перпендикулярной основанию, лежит на той же средней линии.
- 4-54. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , G — точка пересечения медиан. Докажите, что отрезок OG равен $\frac{1}{3}$ отрезка OH , где H — ортоцентр, и что точка H

лежит на каждой высоте треугольника (отсюда получается еще одно доказательство того, что его высоты пересекаются в одной точке; прямая OG называется прямой Эйлера треугольника ABC).

4-55. Докажите, что для любой точки M в плоскости треугольника ABC выполнено неравенство:

$$|MA| \leq |MB| + |MC|,$$

которое превращается в равенство

$$|MA| = |MB| + |MC|$$

в том случае, если $\triangle ABC$ - равносторонний и точка M лежит на меньшей дуге BC его описанной окружности (теорема Помпея).

4-56. Докажите, что для любого треугольника ABC :

а) точка пересечения продолжения биссектрисы угла A с описанной окружностью одинаково удалена от центра вписанной окружности и от вершин B и C ;

б) квадрат расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей равен $R^2 - 2Rr$ где r, R - радиусы вписанной и описанной окружностей (формула Эйлера).

Указания

4-2. Отрадите одну из данных точек симметрично относительно данной прямой.

4-3. См. 4-2а).

4-4. С помощью симметрии задача сводится к такой: сколько из 180 лучей, выходящих из одной точки под равными углами (2° между соседними лучами), пересечет прямая, параллельная биссектрисе одного из углов между соседними лучами?

4-8. Числа p, q, r образуют геометрическую (арифметическую) прогрессию, или - что то же самое - q является средним геометрическим (арифметическим) между p и r , если $q^2 = pr$ (соответственно, $2q = p + r$).

4-12. б) следует из а), поскольку $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ при любых a, b, c (ведь $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$).

4-22. Из любой точки внутри $ABCD$ одна из сторон видна под углом величиной не меньше 90° .

4-23. Две касательные, проведенные к кругу из одной точки, равны.

4-39. Представьте, что квадрат построен, и поверните его на прямой угол относительно одной из вершин.

4-50. Можно продлить отрезки NK и NL до пересечения в точках K_1 и L_1 с прямой, параллельной (AC) и проходящей через B , и доказать, что $\triangle K_1NL_1$ - равнобедренный.

4-52. Нужно доказать, что $\triangle A, B, C_1$ получается симметричной (поворотом на 180°) $\triangle ABC$ относительно некоторой точки C .

4-53. Рассмотрите симметрию относительно середины средней линии (эта же точка - середина медианы треугольника).

4-54. Воспользуйтесь тем, что если K - середина стороны BC , то $[OK] \perp [BC]$ (если точки K и O не совпадают) и $|OA| = 2|OK|$.

4-56. Чтобы вывести 4-56б) из 4-56а), достаточно опустить перпендикуляры $[JA]$ и $[JZ]$ из центра J вписанного круга на основание треугольника $[BC]$ и на перпендикуляр $[OQ] \perp [BC]$, проходящий через его середину N (O - центр описанного круга, Q - точка пересечения с продолжением биссектрисы угла BAC) и применить теорему Пифагора к $\triangle JZQ$, $\triangle BNQ$ и $\triangle BON$, откуда что $|JK| = r$, $|BZ| - |GZ| = R$, $|JQ| = |BQ|$ согласно а).

Книги и задачки по геометрии

1. Ж.Адамар. "Элементарная геометрия". Подробный школьный учебник геометрии со множеством полезных задач и несколькими интересными дополнениями.
2. А.В.Погорелов. "Элементарная геометрия" (1972). Краткий школьный учебник, где аккуратно излагается аксиоматика геометрии, использующая понятие вещественного числа как известное.
3. Ж.Дьедонне. "Линейная алгебра и элементарная геометрия". Формальное изложение элементарной геометрии на языке алгебраических структур с множеством задач про соответствующие алгебраические понятия. В большом введении темпераментно объясняется, почему, по мнению автора, традиционные изложения геометрии в школе не нужны.
4. Г.Шоке. "Геометрия". Изложение наглядной аксиоматики и ее обсуждение, рассчитанное на специалиста.
5. Книги из серии "Библиотека математического кружка" Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома:
 - а) "Избранные задачи и теоремы элементарной математики";
 - б) "Геометрические преобразования" (2 тома);
 - в) "Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум" (1970);
 - г) "Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии" (1974);и книга В.Г.Болтянского и И.М.Яглома
д) "Выпуклые фигуры" (из той же серии).
В б)-д) содержательные геометрические теории изложены в виде серий интересных задач с решениями. В а) собрано много "олимпиадных" задач по геометрии с решениями.
6. Б.Делоне и О.Житомирский. "Задачник по геометрии" (1950). Хорошие задачи по геометрии, близкие к школьным. Много задач на построение.
7. Э.А.Скопец и В.А.Жаров. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия) (1962). Справочник геометрических формул и теорем, много интересных и трудных задач.
8. а) Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер. "Прямые и кривые";
б) Н.Б.Васильев, С.А.Молчанов, В.Л.Розенталь, А.П.Савин. "Математические соревнования" (геометрия) (1974). Брошюры из серии "Библиотека физико-математической школы". В первой мно-

го задач на множество точек, на максимум и минимум, во второй - нестандартных олимпиадных задач.

9. Г.С.М.Кокстер. "Введение в геометрию". Прекрасная книга, состоящая из 22 глав - рассказов о различных геометрических фактах и теориях, многие из которых примыкают к "школьной" геометрии.

Подписано к печати 29/IV-76, Л-36193 Заказ 038

Тираж 10000 экз. Цена 5 коп. Объем 2,25 н.л.

Ротапринт НИИ общей педагогики АПН СССР
Нахимовский проспект, д.4

1976/77 учебный год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся I курса ВЗМШ по теме "Геометрические
преобразования"

Задания по этой теме Вы будете выполнять по брошюре
Н.Б.Васильева, В.Л.Гутенмахера, Ж.М.Работа "Геометрические
преобразования"

З а д а н и е № 5

Обязательные задачи:

1. I.2 а)	3. I.I0	5. I.I6	7. I.I8
2. I.6	4. I.I2	6. I.I7	

Дополнительные задачи:

8. I.7	10. I.I3a)	12. I.I4	14. 4.52
9. I.8	11. I.I3б)	13. I.I5	15. 4.54

Критерии оценок

За обязательные задачи: "5" решено не менее 6 задач;
"4" - решено не менее 5 задач;
"3" - решено не менее 3 задач.

За дополнительные задачи: "5" - решено не менее 5 задач;
"4" - решено не менее 3 задач.

Срок присылки задания № 5 - 10 ноября 1976 года

З а д а н и е № 6

Обязательные задачи из § 4

1. 4.1	4. 4.17	7. 4.31	10. 4.43
2. 4.15a)	5. 4.21	8. 4.35	11. 4.47
3. 4.15б)	6. 4.28	9. 4.36	

Дополнительные задачи:

12. 4.7	15. 4.19	18. 4.30	21. 4.55
13. 4.10	16. 4.20	19. 4.37	
14. 4.18	17. 4.22	20. 4.41	

Критерии оценок:

За обязательные задачи: "5" - решено не менее 11 задач;
"4" - решено не менее 8 задач;
"3" - решено не менее 5 задач.

За дополнительные задачи: "5" - решено не менее 4 задач;
"4" - решено не менее 6 задач.

Срок присылки задания № 6 - 1 декабря 1976 г.

Методическая комиссия ВЗМШ
Методические разработки составили: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутен-
махер.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для проверяющих по заданиям № I-9 и № I-11 ("Геометрические
преобразования")

I. Используемые обозначения:

- (AB) - прямая AB
[AB] - отрезок AB
|AB| - длина отрезка AB
 \hat{A} - величина угла A
 H_0^n - гомотетия с центром O и коэффициентом n .

II. 0 проверке задания.

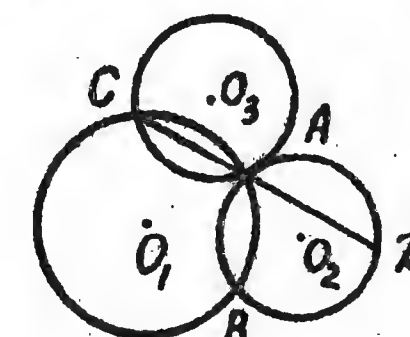
Если задачи этих заданий решены нерационально, отметки не снижать, но указать на лучший способ решения.

Указания по отдельным задачам

Задание № I-10

I.2 а. Указание к решению: искомое множество - результат гомотетии прямой ℓ относительно т. A с коэффициентом 1/2.

I-6. Если задача не решена, указать учащимся, что искомые точки пересечения прямой с окружностями должны быть симметричны относительно точки A .



I.10. Если задача не решена, то указать, что первый ход первого игрока разрывает круг и сводит задачу к ситуации задачи I.9, которая решена в брошюре.

I.12. Если задача не решена - указать, что, как следует из условия, фигура переходит в себя при повороте на угол $360^\circ m + 19^\circ k$, где k и m - любые целые числа. Надо найти наименьшее число, которое можно найти по этой формуле.

I.17. Если дан верный ответ на один из подпунктов - ставить "1".

I.18. В задаче надо различать 3 пункта.

1. Указать оси вращения в строчках б), в), д), е). Если верно в двух или в трех строчках - "1", если в одной - "1/2".

2. Дорисовать пифры в концах строчек г) - е). За этот пункт - если верно в двух строчках - "1", если в одной - "1/2".

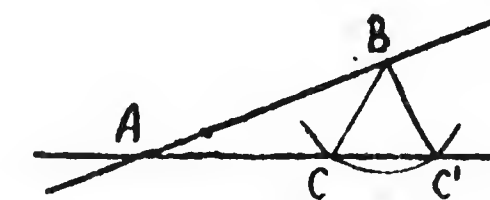
3. Нарисовать строчки для вращения тетраэдра вокруг осей, проходящих через середины ребер (3,5) и (4,6); (1,4) и (5,2) и т.д.

10-11-07
84-015-11-07

Если сделано хотя бы для одной пары - "+", если нет - "-".

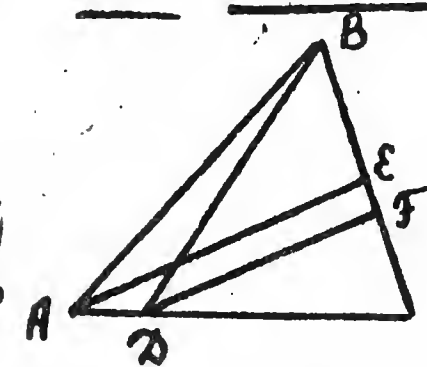
Задание № II

4.1. Если ответ неверен - привести опровергающий чертеж



4.15 а, б. Указание к решению: рассмотрите две гомотетии, переводящие нижнее основание трапеции в верхнее.

4.17. Указание к решению: проведите $(DF) \parallel (AC)$ и рассмотрите гомотетию с центром в т. B и в т. C.



4.35, 4.36. Подпункты а) и б) оценивать отдельно. За отсутствие примеров в пунктах а) оценку снижать до "F" и тщательно разъяснить логику.

4.43. В задаче 2 отображения: 1) $[OM]$ и $[ON]$ биссектрис углов четырехугольника $AMNC$; 2) сумма внутренних углов четырехугольника равна 360° .

4.47. Если не доказана равнобедренность $\triangle ABC$, оценку снизить до "F".

4.10. За отсутствие примера снизить оценку до "F".

Методические разработки составили:

Работ Ж.М., Дюна Г.Б.

Зах 6501

№ 1.6. К

Летнее задание ВЗМШ

- 3 -

минуты 1 и 2 года

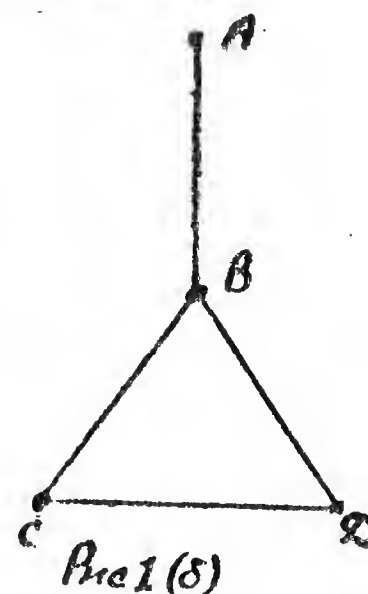
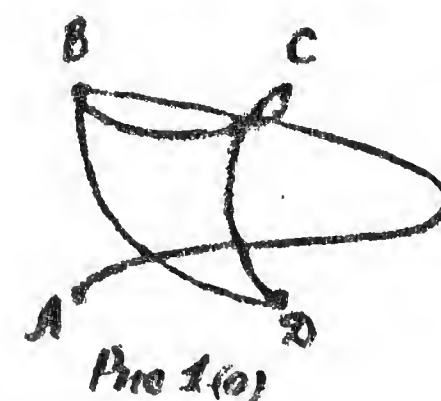
ГРАФЫ. Обусловие

§ I. Введение.

В математике, как вы знаете, все надо доказывать, такая уж это наука. Но как придумать доказательство? Тут часто помогают всякого рода наглядные соображения.

В этом задании собраны задачи, при решении которых используются графы. Напоминаем, что граф или любой другой чертеж не избавляет от необходимости рассуждать. Он только подсказывает, как рассуждать, и иногда дает для этого удобные термины. Граф, изображенный на бумаге, — это несколько (конечное число) точек (эти точки называются вершинами), соединенных отрезками прямых или кривых (эти отрезки называются ребрами).

Пример графа — схема метрополитена какого-нибудь города, например, Москвы. Как известно, она своей наглядностью очень помогает ориентироваться, даже и москвичам, хотя, формально говоря, ту же информацию можно было бы записать словами. Заметим, что точная форма линий метро в этой схеме не отражена. В математике принято полностью игнорировать расположение вершин и форму линий графа. Так, два графа на рис. 1 считаются изоморфными (то есть



по существу, в главном — одинаковыми). Во многих случаях (в этом задании во всех случаях) изоморфные графы взаимозаменяемы. Поэтому, когда при решении задачи у нас будут возникать графы, мы будем их "распутывать", то есть заменять на изоморфные, но более простые. При изображении графа на бумаге его ребра могут пересекаться (как на рис. 1a). Чтобы отличать вершины от этих случайных точек пересечения, мы будем изображать вершины жирными точками или кружочками.

Вершины графа могут обозначать самые разные объекты: станции метро, поля шахматной доски, числа, ладей и т.д.

Введем некоторые термины, относящиеся к графам. Граф называется связным, если из любой его вершины можно, пройдя по ребрам, попасть

в любую другую вершину. Иначе говоря, граф несвязен, если он состоит из двух или большего числа отдельных кусков. Например, граф — схема авиалиний СССР, который Вы, возможно, видели в каком-нибудь аэропорту — связан, а если составить граф-схему паромных линий СССР, то он будет несвязен, так как некоторые водные трассы (например, в бассейне Аральского моря) изолированы от других.

Простой, но важный пример графов представляют циклические графы или, короче, циклы. Пример цикла — схема движения любого вида транспорта по кольцевому маршруту. Цикл порядка n — это граф с n вершинами, которые можно пронумеровать числами от 1 до n так, что вершина 1 будет соединена только с n и 2, вершина 2 — только с 1 и 3 и т.д., вершина n только с $n-1$ и 1.

В принципе ничто не мешает рассматривать графы, в которых:

- а) какое-нибудь ребро упирается обоими концами в одну и ту же вершину;
- б) какие-нибудь две вершины соединены более, чем одним ребром.

Однако, случилось так, что ни в одной из задач, вошедших в это задание, такие графы не нужны. Поэтому мы для простоты запретим указанные выше возможности а) и б).

§ 2. Кони, цифры, люди.

Продemonстрируем пользу применения графов на одном примере.

Задача. Можно ли обойти шахматную доску размером 3×4 клетки (см. рис. 2) ходами шахматного коня, побывав на каждой клетке один раз, и последним ходом вернуться в исходную клетку?

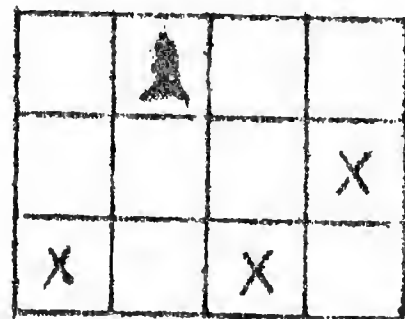


Рис. 2

Напомним ход шахматного коня: конь ходит буквой "Г" — в любом направлении на две клетки плюс на одну в поперечном направлении. Например, конь на рис. 2 может пойти на любое из полей, отмеченных крестиком.

Решение. Заменяем каждое поле на рис. 2 точкой. Соединим отрезками — ребрами те пары точек, для которых из одной в другую возможен ход конем. Получился граф. Он изображен на рис. 3.

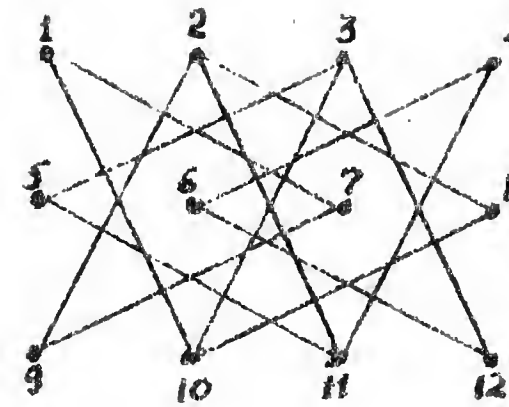


Рис. 3

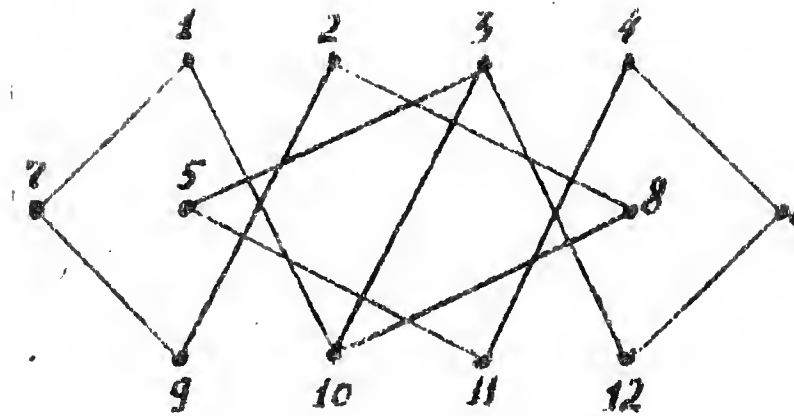


Рис. 4

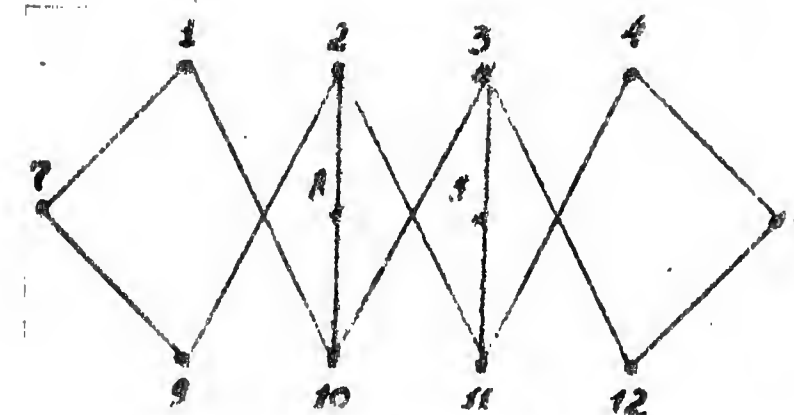


Рис. 5

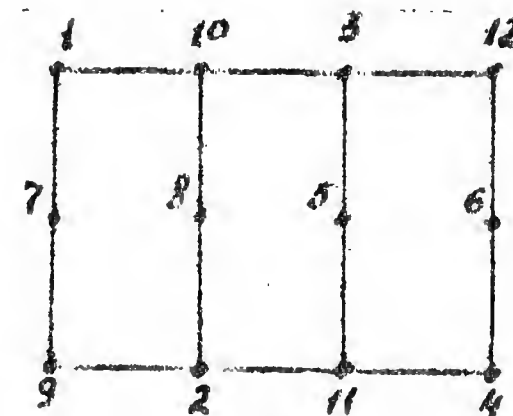


Рис. 6

На рис. 4, 5, 6 изображены последовательные стадии "распутывания" этого графа. Нумерация вершин поможет Вам проследить, как "распутывается" граф. Для графов вопрос задачи означает: можно ли обойти граф (все равно на каком рисунке: 3, 4, 5 или 6, так как все они изоморфны), проходя только по ребрам, побывав в каждой вершине один раз, и последним ходом вернуться в исходную вершину. Сформулируем этот же вопрос иначе: можно ли стереть часть ребер этого графа так, чтобы получился циклический граф?

Теперь начнем рассуждать, пользуясь рисунком 6. Предположим, так обойти граф можно. Пусть мы хотим стереть ребра, не используемые при этом обходе. Очевидно, после стирания из каждой вершины должны будут выходить два ребра (так как получится цикл). Из вершины 10 выходят три ребра. Значит, одно из них надо стереть. Какое? Сотрем ребро 10-1. Тогда из вершины 1 выходит только одно ребро, что запрещено. По аналогичной причине нельзя стереть 10-8. Значит, надо стереть 10-3. Аналогично рассуждая, получаем, что надо стереть ребро 2-11.

Пусть мы сотрем ребра 10-3 и 2-11. Но теперь граф стал несвязным, то есть разделился на две части, и из одной вообще нельзя пройти в другую, тем более вернуться назад. Итак, мы рассуждением от противного доказали, что так обойти граф, как этого требуется в задаче, нельзя. Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Можно ли обойти шахматную доску размером 3 х 4 клетки ходами шахматного коня, побывав на каждой клетке один раз? (Теперь не требуется вернуться в исходную клетку).

Указание. Воспользоваться тем же чертежом.

В следующих задачах придется чертить новые графы.

2. В четырех углах шахматной доски размером 3 х 3 клетки стоят четыре коня: черные — наверху, белые — внизу (см. рис. 7).

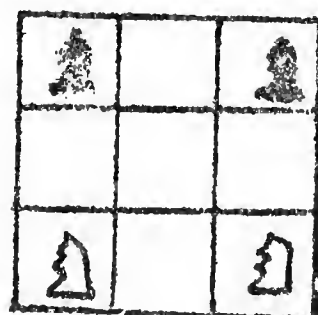


Рис. 7

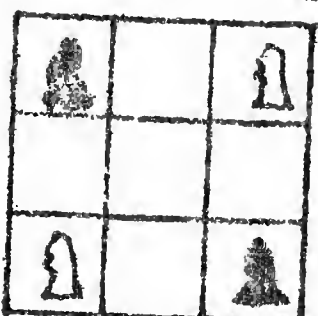


Рис. 8

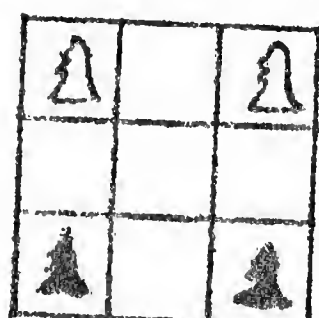


Рис. 9

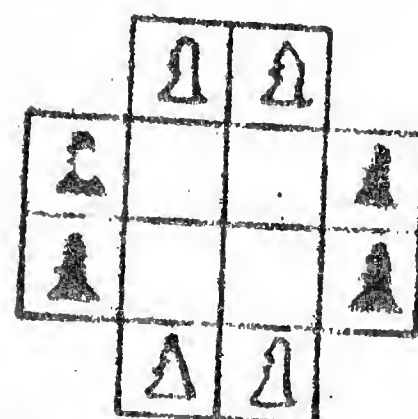


Рис. 10

За один ход разрешается пойти любым конем (но только одним и только на свободное поле). Как ходит конь, сказано выше.

а) можно ли после нескольких ходов получить позицию, изображенную на рис. 8: черные на одной диагонали, белые — на другой?

б) какое наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы получить позицию, изображенную на рис. 9: черные — внизу, белые — вверху?

3. Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4 х 4 клетки выпилить угловые клетки (рис. 10).

а) можно ли обойти её ходами шахматного коня, побывав на каждом поле один раз?

б) тот же вопрос, если последним ходом требуется вернуться на исходное поле.

в) пусть четыре черных коня стоят слева и справа, четыре белых — вверху и внизу, как показано на рис. 10. За один ход можно пойти одним конем на свободное поле. Какое наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы черные кони оказались на местах белых, а белые — на местах черных?

г) можно ли после нескольких ходов получить позицию, изображенную на рис. 11?

4. Двое играют на шахматной доске размером 3 х 3 клетки. У белых два коня, у черных —

— один. Проигрывает тот, кто остается без фигур. При каких начальных положениях белые могут выиграть?

Примечание. Легче решить эту задачу, прочитав § 3 этого задания.

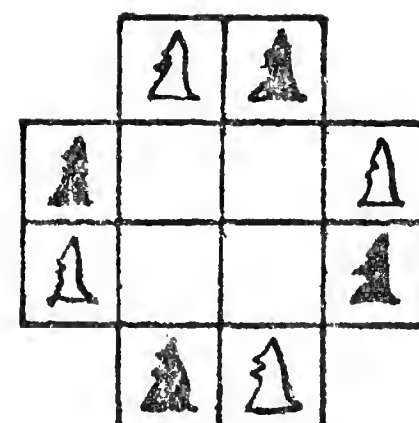


Рис. 11

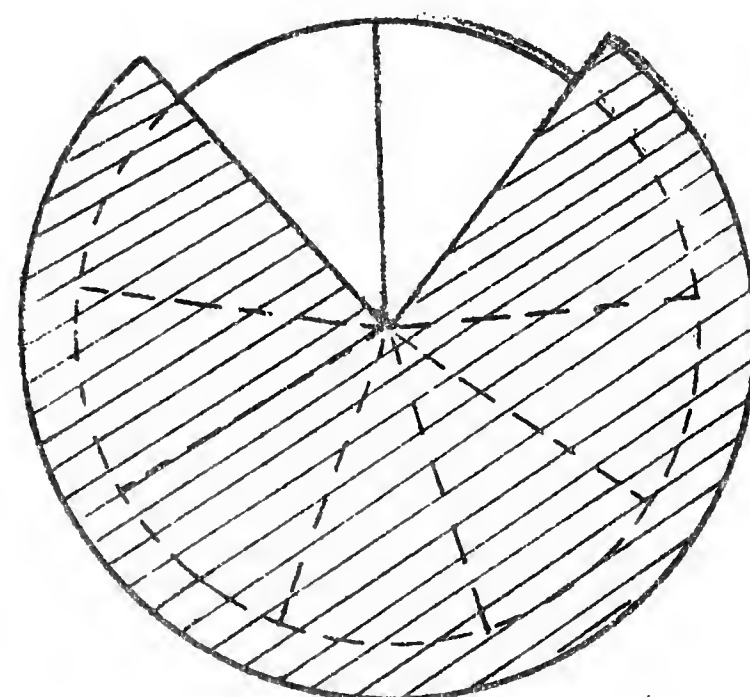


Рис. 12

Задача. Диск поделен на 9 секторов и загорожен так, что видны только два сектора, находящиеся в данный момент наверху (см. рис. 12, где пунктиром изображена невидимая часть диска). Можно ли так расположить в секторах цифры 1, ..., 9 (по одной — в каждом секторе), чтобы при всяком повороте диска двузначное число, видимое в прорезь, делилось на 13, или на 17, или на 23 (хотя бы на одно из этих чисел)? Если можно, то сколькими способами?

Решение. Легко составить список всех двузначных чисел, кратных 13, 17 или 23. Он дан на рис. 13 в виде таблицы. Построим ориентированный граф с девятью вершинами, занумерованными цифрами от 1 до 9. Правило построения: проводим стрелку от цифры x к цифре y , если двузначное число xy (x — цифра десятков, y — цифра единиц) входит в эту таблицу.

Полученный граф лучше перерисовать, чтобы

x	13	17	23
1	13	17	23
2	26	34	46
3	39	51	69
4	52	68	92
5	65	85	
6	78		
7	91		

Рис. 13

"распутать" его. У нас получился граф, изображенный на рис. 14.

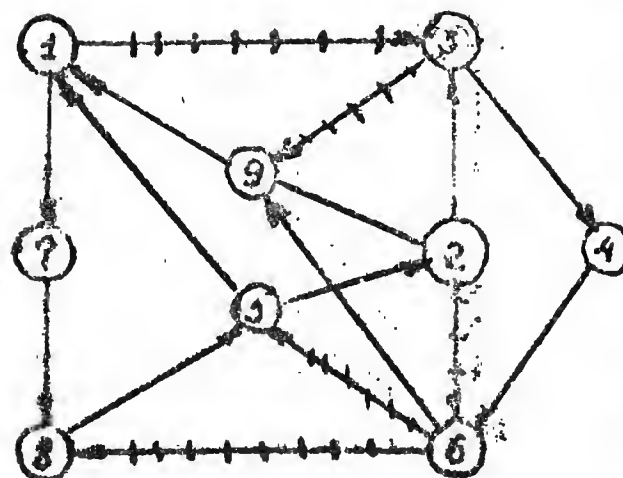


Рис. 14

У Вас может получиться другой рисунок, но граф будет, конечно, изоморфен нашему. Вопрос задачи теперь можно сформулировать так: можно ли совершить кольцевой обход по всем вершинам графа, побывав в каждом по одному разу, проходя только по ребрам в направлении стрелок?

Если можно, то сколькими способами?

Теперь начнем рассуждать. Предположим, мы совершили такой обход. Из вершины 7 мы могли пойти только в 8. Значит, из 6 мы не могли пойти в 8 (так как каждую вершину нужно посетить только один раз). Значит стрелку из 6 в 8 можно зачеркнуть, что и сделано на рисунке. Из 4 можно пойти только в 6. Поэтому стрелка из 2 в 6 тоже зачеркнута. В 7 можно пойти только из 1. Значит, из 1 нельзя было при обходе идти в 3, и стрелка из 1 в 3 тоже зачеркнута.

Так как из 8 можно пойти только в 5, зачеркиваем стрелку из 6 в 5. В 4 можно прийти только из 3, значит зачеркиваем стрелку из 3 в 9. Как надо закончить это рассуждение?

Пусть Вы его закончили. Тогда Вы убедитесь, что существует ровно один такой кольцевой маршрут. Значит, и способ расстановки цифр на диске существует, и притом только один (если, конечно, считать, что расположения, получающиеся друг из друга поворотами диска — например, 178523469 и 234691785 — не разные способы, а разные записи одного способа; ведь иначе придется считать, что есть девять способов). Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения.

5. Сколькими способами можно выписать в строчку девять цифр 1, ..., 9 в каком-то порядке так, чтобы число, образованное каждой парой последовательных цифр делилось

а) на 7? б) на 7 или на 13?

Указание. Начертить ориентированный граф.

6. Сколькими способами можно расположить цифры 1, ..., 9 по

кругу так, чтобы сумма каких-либо двух соседних цифр не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7? (Какой граф тут понадобится, ориентированный или нет?)

7. В строчку пишутся цифры по следующему правилу: каждая цифра, кроме первой, является последней цифрой увеличенного на единицу квадрата предыдущей цифры. Каким цифра стоит на первом месте, если на 1973-м месте стоит 0?

Указание. Поставьте на бумаге 10 точек с номерами 0, ..., 9 и проведите из каждой цифры — точки стрелку в ту цифру — точку, которая должна стоять за ней. Куда можно попасть, если сделать из точки 0 ровно 1972 хода против направления стрелок?

В предыдущих задачах помогало построение одного конкретного графа. В следующих задачах речь идет о большом числе случаев, каждый из которых изображается своим графом. Начертить все эти графы часто практически невозможно (их слишком много). Проще и к тому же полезнее научиться рассуждать так, чтобы рассуждения относились сразу ко всем графам, возможным в данной задаче. Приведем пример.

Задача. Собралась компания из семи человек. Каждый из них знаком ровно с тремя другими. Может ли так быть? (Считается, что, если A знаком с B , то B знаком с A).

Решение. Попробуем сначала доказать, что так может быть. Для этого достаточно привести хоть один пример. Будем изображать систему в виде графа. Поставим семь точек — вершин, означающих людей, и начнем соединять их ребрами. Если мы соединим две вершины ребром, это будет значить, что эти два человека знакомы. Мы чертим несколько таких графов, но пример построить не удастся. Например, в графе на рис. 15 из вершины 7 выходят всего два ребра, а про-

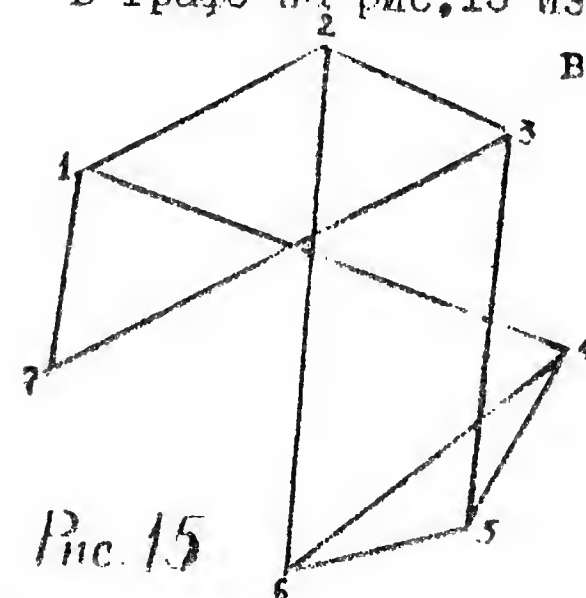


Рис. 15

вести третье некуда. Попробуем теперь доказать, что так не может быть. Будем рассуждать от противного. Пусть такая система знакомств существует. Рассмотрим граф, изображающий её. Разрежем в этом графе каждое ребро пополам. Подсчитаем число получившихся при этом "половинок" ребер. Из каждой вершины торчат три такие половинки, а вершин семь.

Значит, половинок $3 \times 7 = 21$. Но тогда разор $21 : 2 = 10\frac{1}{2}$, что невозможно. Значит, так быть не может. Задача решена. Заметим, что графы помогли решать нам эту задачу, хотя мы не начертили ни одного графа.

Задачи для самостоятельного решения.

8. Доказать, что 77 телефонов нельзя соединить между собой так, чтобы каждый был соединен ровно с 15 другими.

9. Собралась компания из n человек. Каждый из них знаком ровно с тремя другими. При каких n это возможно?

10. Ученые двух стран, Пингвинии и Дельфинии, переписываются между собой. Каждый пингвинский ученый переписывается с тремя дельфинскими учеными. Каждый дельфинский ученый переписывается с четырьмя пингвинскими. В Пингвинии всего 1972 ученых. Сколько ученых в Дельфинии?

11. Продолжение. Число ученых в Пингвинии увеличилось, и теперь не равно 1972. Но как и прежде, каждый пингвинский ученый переписывается с тремя дельфинскими, а каждый дельфинский — с четырьмя пингвинскими. Кроме того, наука развилась в стране Моллюсккии. Каждый Пингвинский ученый переписывается с пятью, а каждый дельфинский — с шестью моллюсскими. Каждый моллюсский ученый, в свою очередь, переписывается с тремя пингвинскими и двумя дельфинскими. Может ли так быть?

12. Пятьдесят из 64 полей шахматной доски пронумерованы числами от 1 до 50. Кроме того, имеются 50 фишек, тоже пронумерованных числами от 1 до 50. Каждая фишка положена на какое-то поле доски. Одним ходом разрешается переложить одну фишку на любое свободное поле. Докажите, что не более чем за 75 ходов можно положить все фишки на свои места. Придумайте пример расположения фишек, когда менее чем за 75 ходов их нельзя положить на свои места.

Указание. Представьте себе, что из каждого поля, где лежит фишка, проведена стрелка к полю с номером, равным номеру этой фишки. Получился ориентированный граф. Из каких связанных частей он может состоять?

13. У князя Гвидона было трое сыновей. Среди его потомков 93 имели по 2 сына и одну дочь, прочие были бездетны. Сколько всего потомков у князя Гвидона?

14. Руководитель математического кружка задал участникам дом 20 задач. На следующем занятии выяснилось, что каждую задачу решили два участника и каждый участник решил две задачи.

а) Сколько участников в кружке?

б) Докажите, что руководитель может так организовать разбор задач, что каждый участник расскажет одну задачу, которую он сам решил, и все задачи будут рассказаны по одному разу.

в) Докажите, что существует не менее двух способов так организовать разбор.

Приведите пример, когда способов ровно два.

г) Каким вообще может быть число этих способов?

Указание. Представьте себе граф с 43 вершинами, обозначенными участниками кружка и задачи. Ребро от x к y проводится, если x — участник, y — задача, и x решил y . Докажите, что граф состоит из одного или нескольких циклов.

15. (Продолжение). В следующий раз на том же кружке снова было задано 20 задач. Каждый участник решил три задачи, и каждую задачу решили три участника. Требуется доказать, что и на этот раз можно организовать разбор так, что каждый расскажет одну задачу, которую он решил, и все задачи будут рассказаны. Это можно доказать, опираясь на важную "теорему о представителях", которую мы сформулируем в виде следующей задачи.

16. На кружке, в котором m участников, было задано на дом n задач. На следующем занятии оказалось, что выполняется следующее условие: для любых k участников (для всех k от 1 до m) количество задач, решенных ими в совокупности (т.е. задач, решенных хотя одним из этих k человек), не меньше k .

В частности, из этого условия следует, что $n \geq m$. Пусть кроме того, каждую задачу кто-нибудь решил. Требуется доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый расскажет одну или большее число задач, которые он сам решил, и каждая

задача будет рассказана ровно один раз.

Чтобы свести задачу I5 к задаче I6, достаточно доказать, что в ситуации, описанной в условии задачи I5, выполняется условие (I). Докажем это.

Решение задачи I6. Представим себе граф Γ с $m+n$ вершинами: m из них обозначают участников, n остальных — задачи. Проведем ребра так: проводится ребро от участника x к задаче y , если x решил y . План разбора задач, который нам надо получить, тоже можно представить в виде графа Γ' с теми же вершинами, но ребра проводятся по другому принципу: проводится ребро от участника x к задаче y , если x рассказывает y . Очевидно, что Γ' , если он существует (а это мы и должны доказать), получается из Γ стиранием некоторых ребер, но не проведением новых, так как каждый участник рассказывает только ту или те задачи, которые он сам решил. По условию в графе Γ из каждой вершины — задачи должно выходить ровно одно ребро, а из каждой вершины — участника — не менее одного ребра.

Будем последовательно стирать в графе Γ ребра так, чтобы условие (I) при этом продолжало выполняться. Докажем, что это удается делать до тех пор, пока не получится граф, который можно принять за Γ' . Рассмотрим три случая.

а) На некотором этапе стирания ребер получился несвязный граф. Тогда надо рассматривать его связные части по отдельности: они относятся к случаям б), в) для меньших значений m .

б) Существуют такие k участников, $k < m$, что число решенных ими задач равно k . Тогда можно стереть все ребра, идущие от этих k задач к прочим участникам, и условие (I) по-прежнему будет выполняться. Действительно, пусть для каких-то ℓ из прочих участников условие перестало выполняться: число соединенных с ними вершин — задач стало меньше ℓ . Тогда и раньше оно не выполнялось для множества, состоящего из этих ℓ и наших k участников: в нем $k+\ell$ элементов, а число задач, ими решенных, есть сумма k и числа, меньшего ℓ , значит оно меньше числа $k+\ell$. Это противоречит предположению. Если мы стерли ребра от этих k задач к прочим участникам, то в результате получили случай (а).

в) Для любых k участников, $k < m$, число решенных ими задач больше k . Пусть из какой-то вершины — задачи выходят хотя бы два ребра (иначе наш граф уже есть граф Γ' , и задача решена). Тогда можно стереть любое из них, и условие (I)

по-прежнему будут выполняться. Действительно, раз стерто только одно ребро, то число задач, решенных любыми участниками, может уменьшиться только на 1, и станет не меньше k .

Таким образом, мы можем стирать ребра до тех пор, пока граф не распадется на такие связные компоненты, в которых из каждой вершины — задачи выходит ровно одно ребро. Условие (I) по-прежнему выполняется; оно гарантирует, что каждая вершина — участник соединена хотя бы с одной вершиной — задачей. Полученный граф и есть требуемый граф Γ' . Теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, решите задачу I5.

Эта теорема допускает дальнейшее обобщение, которое можно сформулировать следующим образом.

I7. Пусть на кружке, в котором m участников, было задано на дом n задач. Оказалось, что каждому участнику x можно сопоставить такое число $L(x)$, что для любых k участников x_1, \dots, x_k число задач, решенных хотя бы одним из них, не меньше, чем $L(x_1) + \dots + L(x_k)$. Кроме того, каждая задача хоть кем-то была решена. Тогда можно организовать разбор задач так, что каждый участник x расскажет не менее $L(x)$ задач, решенных им самим, и каждая задача будет рассказана ровно один раз. Доказательство мало чем отличается от данного выше.

§ 3. ИГРЫ.

Пусть двое играют в следующую игру. Перед ними на бумаге начерчены несколько кружков, соединенных стрелками — ориентированный граф, например, граф на рис. 16. Возможен и иной граф. Существование, чтобы это был граф без ориентированных циклов, то есть такой, что, двигаясь по нему в направлении стрелок, нельзя дважды попасть в одну и ту же вершину. В частности, все ребра должны быть снабжены стрелками: иначе можно будет ходить по ребру без стрелки назад — вперед. Перед началом игры на одну из вершин ставится фишка (например, на вершину 1). Игра состоит в том, что игроки по очереди ходят — передвигают фишку. За один ход фишку нужно передвинуть ровно по одному ребру в направлении стрелки.

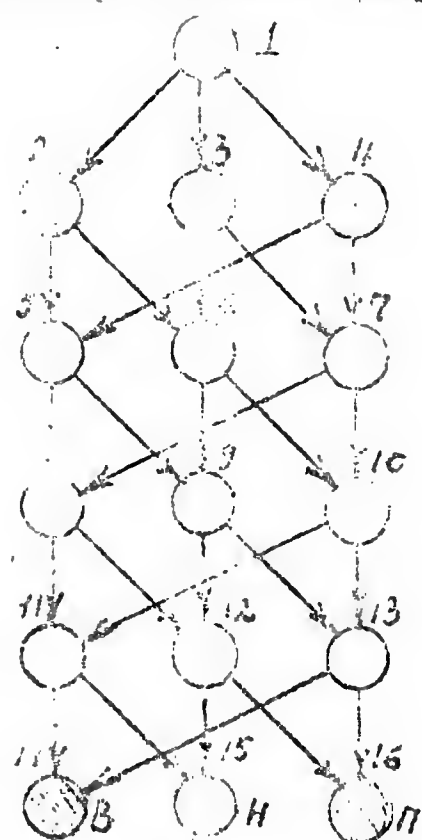


рис. 16

Если из вершины выходят несколько стрелок, то игрок может пойти фишкой по любой из них. Те вершины графа, из которых не выходят стрелки, называются финальными. На рис. 16 это вершины 14, 15, 16. Когда фишка попала на финальную вершину, игра заканчивается. У каждой финальной вершины написана одна из букв В, Н или П. Результат партии определяется буквой у той финальной вершины, где оказалась фишка к концу игры:

- если В (выигрыш), то выигрывает сделавший последний ход;
- если П (проигрыш), то выигрывает его партнер;
- если Н, то ничья.

Поиграйте с кем-нибудь в игру на рис. 16. Как лучше играть, и на какой исход можно рассчитывать (при наилучшей игре партнера)? Оказывается, для любой такой игры это в принципе всегда можно точно выяснить. Покажем на примере графа на рис. 16, как это сделать. Нужно рассуждать с конца. На что, например, может рассчитывать игрок, поставивший фишку на вершину 12? На ничью, так как его противник следующим ходом, конечно, пойдет на 15. Игрок, поставивший фишку на 11 или 13, конечно, проиграет. Поэтому по-

ставим у вершин 11 и 13 буквы П, а у вершины 12 — букву Н. Далее, игрок, поставивший фишку на 10, выиграет, так как, куда бы ни пошел после этого противник — на 11 или 13, он попадет на вершину с буквой П, то есть впоследствии проиграет. Ы, должно быть, уже поняли, как расставлять буквы. Расставьте буквы у всех вершин на рис. 16. Заметим, что присваивать какой-нибудь вершине А букву можно только тогда, когда уже присвоены буквы всем вершинам, в которые из нее ведут стрелки. (За одним исключением: если у одной из них уже стоит В, то вершине А можно заведомо присвоить П). Вершина 1 получила букву П. Это означает, что начинающий — делающий из нее ход может выиграть. Для этого он должен ходить всегда на вершину с буквой В.

Упражнения.

1. Почему этот метод расстановки букв может не привести к успеху, если в графе есть ориентированные циклы? Приведите конкретный пример, демонстрирующий это.

2. Докажите, что, если в графе нет ориентированных циклов, то всем вершинам удастся присвоить буквы.

3. Сформулируйте в общем виде правило, какую букву присвоить вершине в зависимости от букв у вершин, в которые из нее ведут стрелки.

За. Придадим буквам числовые значения: $B=1, H=0, P=-1$. Проверьте, что тогда это правило может быть задано формулой:

$$L(A) = -\max \{L(B_1), \dots, L(B_k)\},$$

где $L(A)$ — значение буквы, присвоенной вершине А, $L(B_1), \dots, L(B_k)$ — значения букв, присвоенных тем вершинам B_1, \dots, B_k , куда из А ведут стрелки.

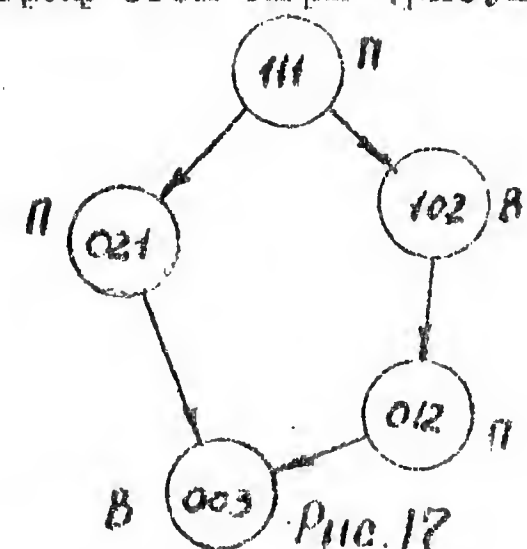
К играм на графах, которые мы описали, по существу сводится целый ряд игр, даже если их правила заданы, на первый взгляд, совсем иначе.

Следующие задачи содержат примеры таких игр.

4. Двое играют в следующую игру. Перед ними на столе лежат четыре коробки, пронумерованные от 1 до 4. Перед началом игры в каждой коробке по одной спичке. Ходят по очереди. Одним ходом

можно переложить из одной коробки все лежащие в ней спички (если она не пустая) в коробку с номером на единицу больше: из 1 в 2, из 2 в 3 или из 3 в 4. Проиграет тот, кто не сможет сделать очередной ход, так как 1, 2 и 3 коробки будут уже пусты. Кто выиграет: начинающий или его партнер и как ему надо для этого играть?

Указание. Решим аналогичную задачу для трех коробок. Начертим граф этой игры (рис. 17). Кружки означают состояние — позиции игры.



Тройка цифр в каждом кружке означает количества спичек в коробках: с первой до третьей. Стрелки означают возможные ходы. Позиция (003) — финальная, ей, по условию, присваивается буква В. Остальным позициям присваиваются буквы по правилу, которое Вы сформулировали, решая задачу 3. От того, что ничья невозможна, это правило только упрощается.

Проверьте, правильно ли поставлены буквы. Составьте теперь аналогичный граф для четырех коробок и проставьте буквы.

Теоретически можно составить граф и проставить буквы для этой игры с любым числом коробок. Но практически это при росте числа коробок скоро становится невозможным, так как число позиций быстро растет. Аналогичная трудность имеет место по отношению к таким играм как шашки и шахматы. Для каждой из них полное исследование с помощью графа возможно теоретически, но не практически.

Приведем несколько примеров игр, где удастся угадать общую для всех П закономерность в построении графа и расстановке букв на нем.

5. Двое играют в следующую игру. Перед ними кучка из n спичек. Ходят по очереди. За один ход можно взять из кучки одну или две спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выигрывает, и как ему надо играть, чтобы выиграть?

Указание. Фактически здесь требуется разобрать бесконечное множество различных игр, и каждой соответствует свой граф. К счастью, n -ый граф не надо строить заново: достаточно продолжать до n цепочку, начало которой изображено на рис. 18 (числа в кружках означают оставшееся количество спичек).

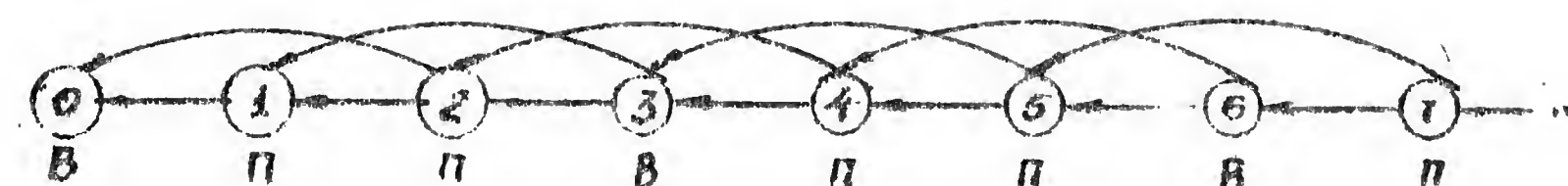


Рис. 18

Расставленные буквы позволяют предположить, по какому закону они расположатся дальше.

а) Сформулируйте, какова, по Вашему мнению, закономерность расположения букв при неограниченном продолжении цепочки.

б) Докажите, что если эта закономерность соблюдается до некоторого места, то она выполняется и на один кружок дальше.

6. Тот же вопрос, если за один ход можно взять две или три спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Если в кучке останется одна спичка, засчитывается ничья. Каков будет исход игры, если оба играют наилучшим для себя образом и перед началом игры в кучке 1973 спички?

7. Тот же вопрос, что в задаче 5, если за один ход можно взять одну спичку или не брать ни одной, но при этом запрещается не брать ни одной спички, если за два предыдущих хода не было взято ни одной спички.

Указание. Здесь, чтобы задать состояние игры, мало указать число оставшихся спичек. Граф этой игры на рис. 19.

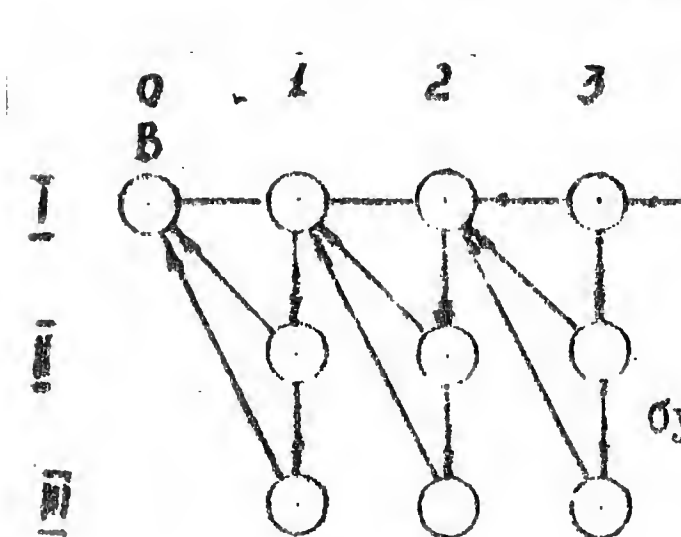


Рис. 19

В ряду I находятся состояния, когда последним ходом была взята спичка, в ряду II — когда спичка была взята не последним ходом, а предпоследним, в ряду III — когда за оба последних хода не было взято ничего. Проверьте, правильно ли проведены стрелки. Расставьте

буквы. В шахматах в задании позиции тоже, кроме расположения фигур и того, чей ход, входит указание, за сколько последних ходов не была взята ни одна фигура и не была передвинута ни одна пешка; если таких ходов слишком много, то игра прекращается, и засчитывается ничья. Только с учетом этого шахматы и изображаются графом (хотя бы в принципе) без ориентированных циклов. То же относится к шашкам.

8*. Двое играют в следующую игру. Они называют по очереди числа. В первый раз называется число 1973. Затем каждый называет разность между последним числом, названным его партнером и каким-нибудь его делителем (включая единицу и само это число). Проигрывает тот, кто назовет ноль. Кто выигрывает: начинающий или его партнер, и как ему надо играть, чтобы выиграть?

9. Двое играют в такую игру. Перед ними две кучки спичек по 10 штук в каждой. Ходят по очереди. Каждый ходом можно взять одну спичку из любой кучки или по одной из обеих. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, так как не осталось спичек. Кто выигрывает и как ему надо для этого играть?

Указание. Пусть в первой кучке x спичек, во второй — y спичек. Сопоставьте этому положению клетку на клетчатой бумаге с номером x по горизонтали и номером y по вертикали. Процесс игры состоит в перемещении фишки по бумаге. Как можно ходить? Начните расставлять в клетках буквы, начиная с клетки $(0; 0)$:

10. Тот же вопрос, если за один ход можно взять любое число спичек (хоть все, но не менее одной) из одной кучки (но нельзя брать за один ход спички из обеих кучек).

11. Тот же вопрос, что в задаче 9, если за один ход можно либо взять одну спичку из первой кучки, либо переложить одну спичку из второй кучки в первую.

N 1.6.У

1

Методические разработки по летнему заданию

для учащихся ВЗМШ. (методу 1 и 2 годов)

Перед Вами летнее задание ФЗ по программе ВЗМШ. В нем собраны задачи, при решении которых привлекаются некоторые простые понятия важного и красивого раздела современной математики - теории графов.

Среди этих задач есть как простые, так и трудные. Наиболее сложные из них отмечены знаком "ж".

Напоминаем Вам, что это задание, как и все математические книги, необходимо читать критически. Никакое утверждение не следует принимать на веру только потому, что оно исходит от педагогов или авторов учебников. Только при этом условии Вы сможете понять математические построения и доказательства, которые часто бывают куда сложнее, чем в этом задании.

Автор задания - А.Л.Тоом.

При n -звездах ≥ 2

Контрольные задачи.

Из §2 задачи № 3а, 3б, 3г, 5, 6, 9, 11, 14а, 14б, 14в;

из §3 задачи № 3, 4, 9.

Критерии оценок.

"3" - решено не менее 6 задач;

"4" - решено не менее 10 задач;

"5" - решено не менее 15 задач.

3) Если только П, то В
П и К, то К
есть В, то П
4) наличием
5) вторич

/Пункты а, б, в, г считаются как отдельные задачи/.

Срок присылки задания ФЗ - 10 сентября 1974 г.

во проверку воровства
и оду забавно

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
по заданию №11 для учащихся I курса ВЗМШ.

Перед вами летнее задание №11 по программе ВЗМШ. В нем собраны задачи, при решении которых привлекаются некоторые простые понятия важного и красивого раздела современной математики — теории графов.

Среди этих задач есть как простые, так и трудные. Наиболее сложные из них отмечены знаком "н".

Напоминаем вам, что это задание, как и все математические книги, необходимо читать критически. Никакое утверждение не следует принимать на веру только тому, что оно исходит от педагогов или авторов учебников. Только при этом условии вы сможете понять математические построения и доказательства, которые часто бывают куда сложнее, чем в этом задании.

Автор задания — А.Л.Тоом.

Список контрольных задач: из § 2 задачи № I, 2а, 3а, 3 б, 3 г, 5а, 5б, 6, 7, 10, 14а, 14б, 14в; из § 3: 3, 4, 6, 9, 10, 11.

Критерии оценок

"3" — решено не менее 6 задач;

"4" — решено не менее 10 задач;

"5" — решено не менее 15 задач.

О г л а в л е н и е

§ 1. Введение

§ 2. Конны, цифры, и люди

§ 3. ИгрыШ.....

О б о з н а ч е н и я

A, B, C — вершины графа.

Γ, Γ', E — графы.

(x, y) — целые числа.

a, b, k, l, m, n — натуральные (целые положительные) числа

§ I. Введение

В математике, как Вы знаете, все надо доказывать, такая уж это наука. Но как придумать доказательство? Тут часто помогают всякого рода наглядные соображения.

В этом задании собраны задачи, при решении которых используются графы. Напоминаем, что граф или любой другой чертеж не избавляет от необходимости рассуждать. Он только подсказывает, как рассуждать, и иногда дает для этого удобные термины. Граф, изображенный на бумаге, — это несколько (конечное число) точек (эти точки называются вершинами), соединенных отрезками прямых или кривых (эти отрезки называются ребрами).

Пример графа — схема метрополитена какого-нибудь города, например, Москвы. Как известно, она своей наглядностью очень помогает ориентироваться, даже и москвичам, хотя, формально говоря, ту же информацию можно было бы записать словами. Заметим, что точная форма линий метро в этой схеме не отражена. В математике принято полностью игнорировать расположение вершин и форму линий графа. Так, два графа на рис. I считаются изоморфными (то есть по существу, в главном — одинаковыми). Во многих случаях (в этом задании во всех случаях) изоморфные графы взаимозаменяемы. Поэтому, когда при решении задачи у нас будут возникать графы, мы будем их "распутывать", то есть заменять на изоморфные, но более простые. При изображении графа на бумаге его ребра могут пересекаться (как на рис. Ia). Чтобы отличать вершины от этих случайных точек пересечения, мы будем изображать вершины жирными точками или кружочками.

Вершины графа могут обозначать самые разные объекты: станции метро, поля шахматной доски, числа, люди и т.д.

Вершины графа могут обозначать самые разные объекты: станции метро, поля шахматной доски, числа, люди и т.д.

Введем некоторые термины, относящиеся к графам. Граф называется связным, если из любой его вершины можно, пройдя по ребрам, попасть в любую другую вершину. Иначе говоря, граф несвязен, если он состоит из двух или большего числа отдельных кусков. Например, граф — схема авиалиний СССР,

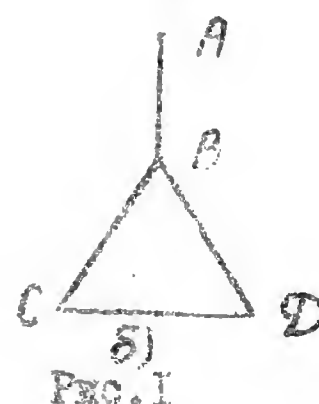
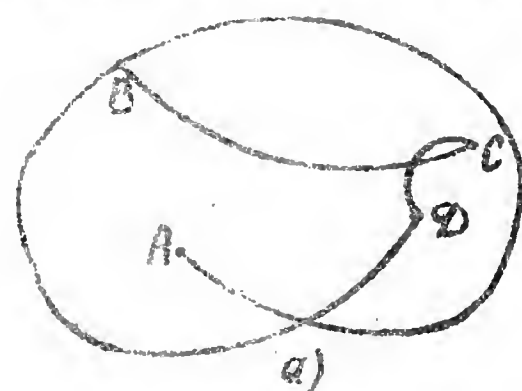
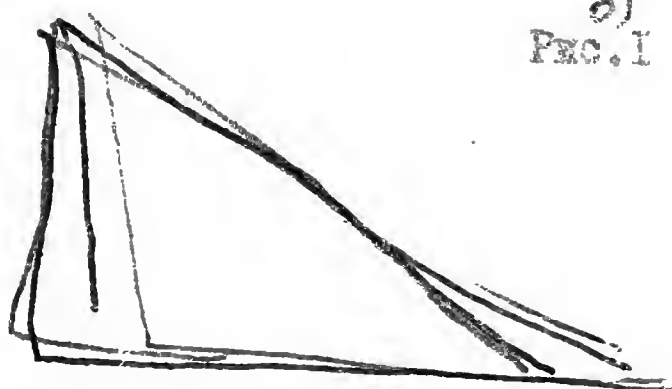


Рис. I



который Вы, возможно, видели в каком-нибудь аэропорту, связан, а если составить граф-схему паромных линий СССР, то он будет несвязен, так как некоторые водные трассы (например, в бассейне Аральского моря) изолированы от других.

Простой, но важный пример графов представляют циклические графы или, короче, циклы. Пример цикла — схема движения любого вида транспорта по кольцевому маршруту. Цикл порядка n — это граф с n вершинами, которые можно пронумеровать числами от 1 до n так, что вершина 1 будет соединена только с n и 2, вершина 2 — только с 1 и 3 и т.д., вершина n только с $n-1$ и 1.

В принципе ничто не мешает рассматривать графы, в которых:

а) какое-нибудь ребро упирается обоими концами в одну и ту же вершину;

б) какие-нибудь две вершины соединены более, чем одним ребром.

Однако, случилось так, что ни в одной из задач, вошедших в это задание, такие графы не нужны. Поэтому мы для простоты запретим указание выше возможности а) и б).

§ 2. Конь, цифра, люди.

Продemonстрируем пользу применения графов на одном примере.

Задача. Можно ли обойти шахматную доску размером 3x4 клетки (см. рис. 2) ходами шахматного коня, побывав на каждой клетке один раз, и последним ходом вернуться в исходную клетку?

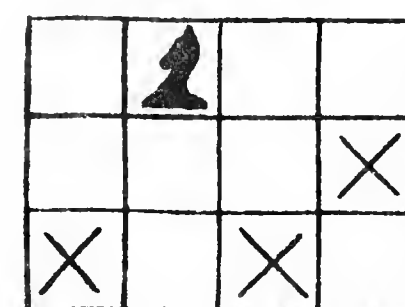


Рис. 2

Напомним ход шахматного коня: конь ходит буквой "Г" — в любом направлении на две клетки плюс на одну в поперечном направлении. Например, конь на рис. 2 может пойти на любое из полей, отмеченных крестиком.

Решение. Заменяем каждое поле на рис. 2 точкой. Соединим отрезками — ребрами те пары точек, для которых из одной в другую возможен ход конем. Получился граф. Он изображен на рис. 3.

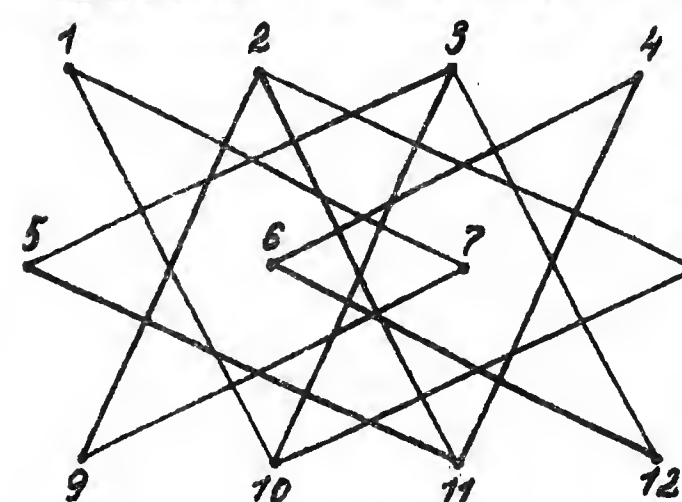


рис. 3

На рис. 4, 5, 6 изображены последовательные стадии "распутывания" этого графа. Нумерация вершин поможет Вам

проследить, как "распутывается" граф. Для графов вопрос задачи означает: можно ли обойти граф (все равно на каком рисунке: 3, 4, 5 или 6, так как все они изоморфны), проходя только по ребрам, побывав в каждой вершине один раз, и последним ходом вернуться в исходную вершину? Сформулируем этот же вопрос иначе: можно ли стереть часть ребер этого графа так, чтобы получился циклический граф?

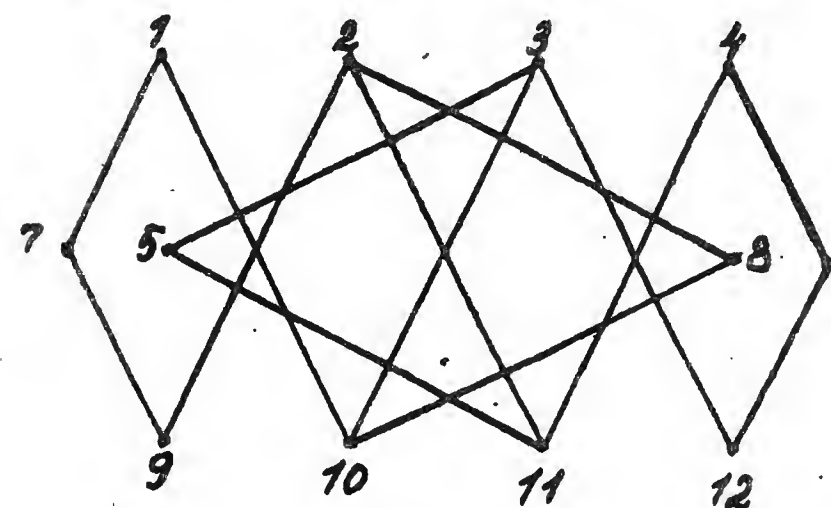


Рис. 4

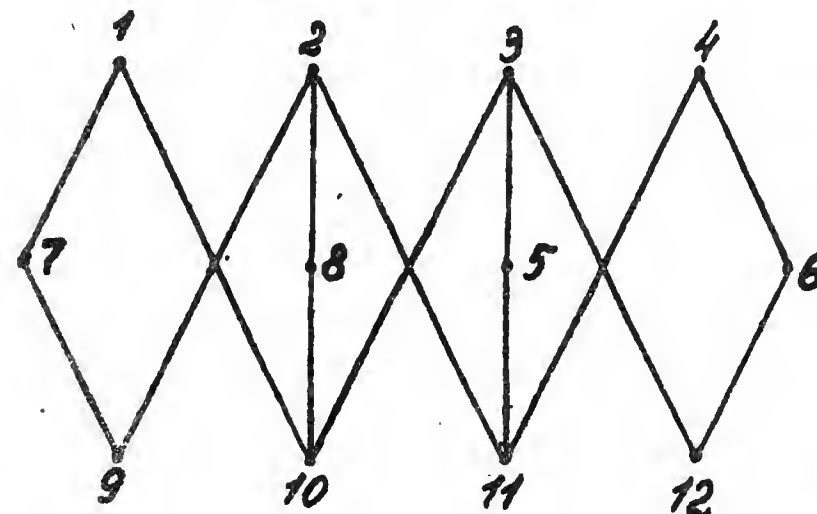


Рис. 5

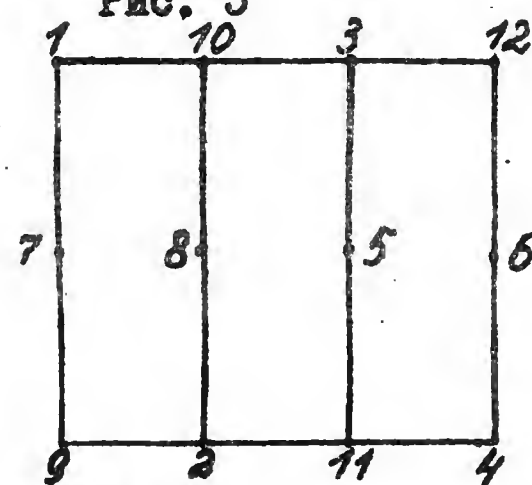


Рис. 6

Теперь начнем рассуждать, пользуясь рисунком 6. Предположим, так обойти граф можно. Пусть мы хотим стереть ребра, не используемые при этом обходе. Очевидно, после стирания из каждой вершины должны будут выходить два ребра (так как получится цикл). Из вершины 10 выходят три ребра. Значит, одно из них надо стереть. Какое? Сотрем ребро 10-1. Тогда из вершины 1 выходит только одно ребро, что запрещено. По аналогичной причине нельзя стереть 10-8. Значит, надо стереть 10-3. Аналогично рассуждая, получаем, что надо стереть ребро 2-11.

Пусть мы стерли ребра 10-3 и 2-11. Но теперь граф стал несвязным, то есть разделился на две части, и из одной вообще нельзя пройти в другую, тем более вернуться назад. Итак, мы рассуждением от противного доказали, что так обойти граф, как это требуется в задаче, нельзя. Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

I Можно ли обойти шахматную доску размером 3 x 4 клетки ходами шахматного коня, побывав на каждой клетке один раз? (Теперь не требуется вернуться в исходную клетку).

Указание. Воспользоваться тем же чертежом.

В следующих задачах придется чертить новые графы.

2 В четырех углах шахматной доски размером 3 x 3 клетки стоят четыре коня: черные — наверху, белые — внизу (см. рис. 7). За один ход разрешается пойти любым конем (но только одним и только на свободное поле). Как ходит конь, сказано выше.

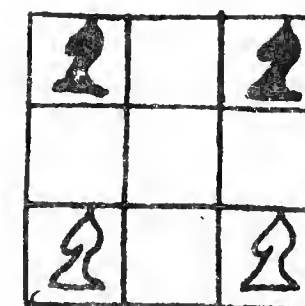


Рис. 7

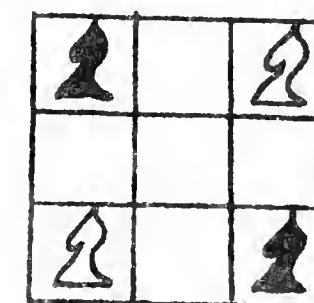


Рис. 8

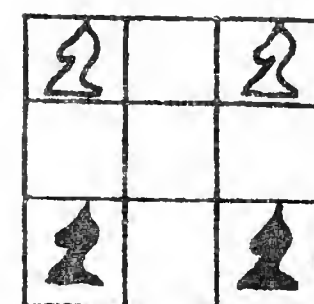


Рис. 9

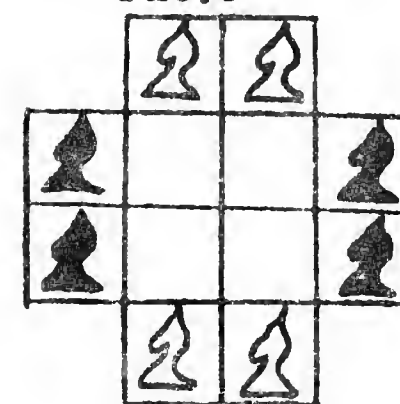


Рис. 10

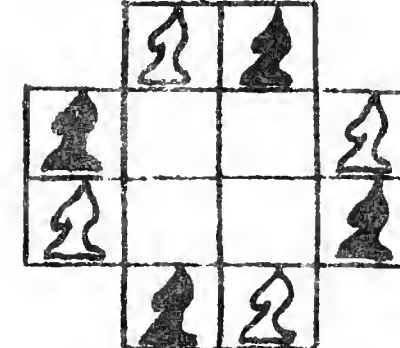


Рис. 11

а) можно ли после нескольких ходов получить позицию, изображенную на рис. 8: черные на одной диагонали, белые — на другой?

б) какое наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы получить позицию, изображенную на рис. 9: черные — внизу, белые — вверху?

3 Доска имеет форму креста, который получается, если из квадратной доски 4 x 4 клетки выпилить угловые клетки (рис. 10).

а) можно ли обойти ее ходами шахматного коня, побывав на каждом поле один раз?

б) тот же вопрос, если последним ходом требуется вернуться на исходное поле.

в) пусть четыре черных коня стоят слева и справа, четыре белых — вверху и внизу, как показано на рис. 10. За один ход можно пойти одним конем на свободное поле. Какие наименьшее число ходов нужно сделать, чтобы черные кони оказались на местах белых, а белые — на местах черных?

г) можно ли после нескольких ходов получить позицию, изображенную на рис. 11?

4 Двое играют на шахматной доске размером 3 x 3 клетки. У белых два коня, у черных — один. Выигрывает тот, кто "съест" все фигуры противника. При каких начальных положениях белые могут выиграть? (Белые начинают).

Примечание. Легче решать эту задачу, прочитав § 3 этого задания.

В следующих задачах вершины графа соответствуют цифрам от 0 до 9 (или от 1 до 9). В некоторых из них приходится чертить ориентированные графы. В ориентированном графе некоторые ребра (возможно, все) снабжены стрелками. Например, ориентированным графом является

схема улиц города, если на некоторых из них введено одностороннее движение. Продемонстрируем применение ориентированных графов на примере.

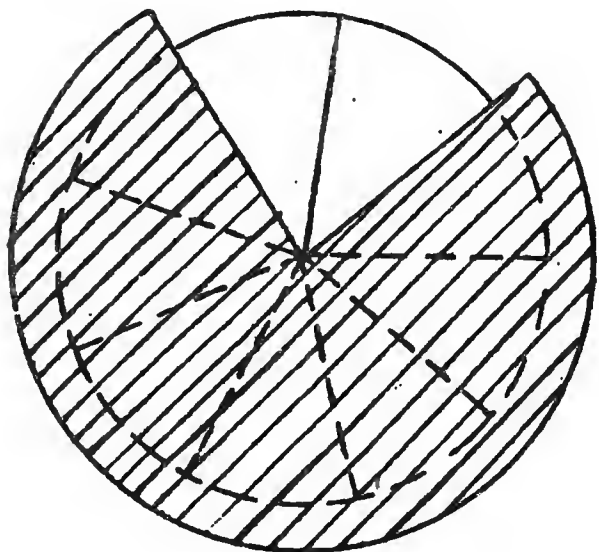


Рис. 12

x	13	17	23
1	13	17	23
2	26	34	46
3	39	51	69
4	52	68	92
5	65	85	
6	78		
7	91		

Рис. 13

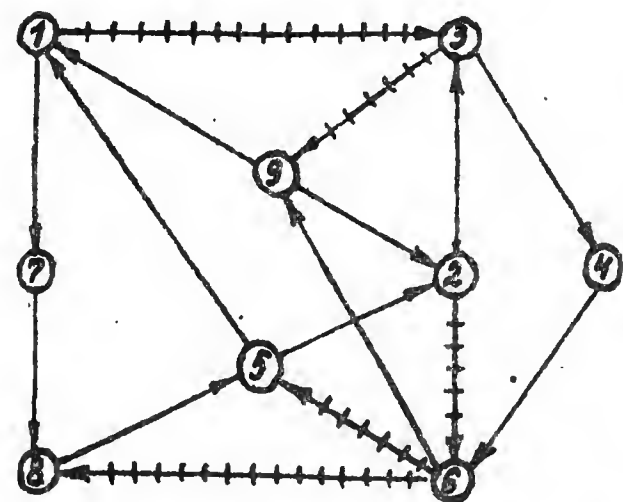


Рис. 14

Задача. Диск поделен на 9 секторов и загорожен так, что видны только два сектора, находящиеся в данный момент наверху (см. рис. 12, где пунктиром изображена невидимая часть диска). Можно ли так расположить в секторах цифры 1, ..., 9 (по одной в каждом секторе), чтобы при всяком повороте диска двузначное число, видимое в про-резь, делилось на 13, или на 17, или на 23 (хотя бы на одно из этих чисел)? Если можно, то сколькими способами?

Решение. Легко составить список всех двузначных чисел, кратных 13, 17 или 23. Он дан на рис. 13 в виде таблицы. Построим ориентированный граф с девятью вершинами, занумерованными цифрами от 1 до 9. Правило построения: проводим стрелку от цифры x к цифре y , если двузначное число xy (x - цифра десятков, y - цифра единиц) входит в эту таблицу.

Полученный граф лучше перерисовать, чтобы "распутать" его. У нас получил-ся граф, изображенный на рис. 14. У Вас может получиться другой рисунок, но граф будет, конечно, изоморфен нашему. Вопрос задачи теперь можно сформулиро-вать так: можно ли совершить кольцевой обход по всем вершинами графа, побывав в каждом по одной разу, проходя только по ребрам в направлении стрелок? Если

можно, то сколькими способами?

Теперь начнем рассуждать. Предположим, мы совершили такой об-ход. Из вершины 7 мы могли пойти только в 8, но каждую вершину нужно посетить только один раз, значит стрелку из 6 в 8 можно за-

черкнуть, что и сделано на рисунке. Из 4 можно пойти только в 6. Поэтому стрелка из 2 в 6 тоже зачеркнута. В 7 можно пойти только из 1. Значит, из 1 нельзя было бы при обходе идти в 3, и стрелка из 1 в 3 тоже зачеркнута. Так как из 8 можно пойти только в 5, зачеркиваем стрелку из 6 в 5. В 4 можно прийти только из 3, значит зачеркиваем стрелку из 3 в 9. Как надо закончить это рас-суждение?

Пусть Вы его закончили. Тогда Вы убедитесь, что существует ровно один такой кольцевой маршрут. Значит, и способ расстановки цифр на диске существует, и притом только один (если, конечно, считать, что расположения, получающиеся друг из друга поворотами диска - например, 178523469 и 234691785 - не разные способы, а раз-ные записи одного способа; ведь иначе придется считать, что есть девять способов). Задача решена.

Задачи для самостоятельного решения

[5] Сколькими способами можно выписать в строчку девять цифр 1, ..., 9 в каком-то порядке так, чтобы число, образованное каж-дой парой последовательных цифр, делилось:

- а) на 7? б) на 7 или на 13?

Указание. Начертить ориентированный граф.

[6] Сколькими способами можно расположить цифры 1, ..., 9 по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних цифр не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7? (Какой граф тут понадобится, ориентирован-ный или нет?).

[7] В строчку пишутся цифры по следующему правилу: каждая циф-ра, кроме первой, является последней цифрой увеличенного на едини-цу квадрата предыдущей цифры. Какая цифра стоит на первом месте, если на 1976-м месте стоит 5?

Указание. Поставьте на бумаге 10 точек с номерами 0, ..., 9 и проведите из каждой цифры - точки стрелку в ту цифру - точку, ко-торая должна стоять за ней. Куда можно попасть, если сделать из точки 5 ровно 1976 ходов против направления стрелок?

В предыдущих задачах помогало построение одного конкретного графа. В следующих задачах речь идет о большом числе случаев, каж-дый из которых изображается своим графом. Начертить все эти графы часто практически невозможно (их слишком много). Проще и к тому же полезнее научиться рассуждать так, чтобы рассуждения относились

сразу ко всем графам, возможным в данной задаче. Приведем пример.

Задача. Собралась компания из семи человек. Каждый из них знаком ровно с тремя другими. Может ли так быть? (Считается, что если A знаком с B , то B знаком с A).

Решение. Попробуем сначала доказать, что так может быть. Для этого достаточно привести хоть один пример. Будем изображать систему в виде графа. Поставим семь точек — вершин, означающих людей, и начнем соединять их ребрами. Если мы соединим две вершины ребром, это будет значить, что эти два человека знакомы. Мы нарисуем несколько таких графов, но пример построить не удастся. Например, в графе на рис. 15 из вершины 7 выходят всего два ребра, а провести третье некуда. Попробуем теперь доказать, что так не

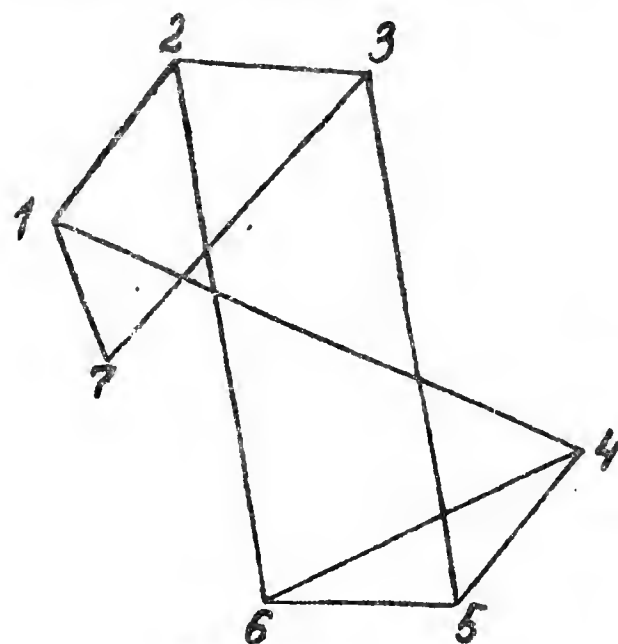


Рис. 15

может быть. Будем рассуждать от противного. Пусть такая система знакомства существует. Рассмотрим граф, изображающий её. Разрежем в этом графе каждое ребро посередине. Подсчитаем число получившихся при этом "половинок" ребер. Из каждой вершины торчат три такие половинки, а вершин семь. Значит, половинок $3 \times 7 = 21$. Но тогда ребер $21 : 2 = 10,5$, что невозможно. Значит, так быть не может. Задача решена. Заметим, что графы помогли решить нам эту задачу, хотя мы не нарисовали ни одного графа.

Задачи для самостоятельного решения

[8] Доказать, что 77 телефонов нельзя соединить между собой так, чтобы каждый был соединен ровно с 15 другими.

[9] Собралась компания из n человек. Каждый из них знаком ровно с тремя другими. При каких n это возможно?

[10] Ученые двух стран, Пингвинии и Дельфинии, переписываются между собой. Каждый пингвинский ученый переписывается с тремя дельфинскими учеными. Каждый дельфинский ученый переписывается с четырьмя пингвинскими. В Пингвинии всего 1972 ученых. Сколько ученых в Дельфинии?

[11] (Продолжение). Число ученых в Пингвинии увеличилось, и теперь не равно 1972. Но как и прежде, каждый пингвинский ученый переписывается с тремя дельфинскими, а каждый дельфинский — с четырьмя пингвинскими. Кроме того, наука развилась в стране Моллюсков. Каждый Пингвинский ученый переписывается с пятью, а каждый дельфинский — с шестью моллюсковскими. Каждый моллюсковский ученый, в свою очередь, переписывается с тремя пингвинскими и двумя дельфинскими. Может ли так быть?

[12] Пятьдесят из 64 полей шахматной доски пронумерованы числами от 1 до 50. Кроме того, имеются 50 фишек, тоже пронумерованных числами от 1 до 50. Каждая фишка лежит на каком-то поле доски. Одним ходом разрешается переложить одну фишку на любое свободное поле. Докажите, что не более, чем за 75 ходов, можно положить все фишки на свои места. Придумайте пример расположения фишек, когда менее, чем за 75 ходов, их нельзя положить на свои места.

Указание. Представьте себе, что из каждого поля, где лежит фишка, проведена стрелка к полю с номером, равным номеру этой фишки. Получился ориентированный граф. Из каких связанных частей он может состоять?

[13] У князя Гвидона было трое сыновей. Среди его потомков 93 имели по 2 сына и ни одной дочери, прочие были бездетны. Сколько всего потомков у князя Гвидона?

[14] Руководитель математического кружка задал участникам на дом 20 задач. На следующем занятии выяснилось, что каждую задачу решили два участника и каждый участник решил две задачи.

а) Сколько участников в кружке?

б) Докажите, что руководитель может так организовать разбор задач, что каждый участник расскажет одну задачу, которую он сам решил, и все задачи будут рассказаны по одному разу.

в) Докажите, что существует не менее двух способов так организовать разбор.

Приведите пример, когда способов ровно два.

г) Каким вообще может быть число этих способов?

Указание. Представьте себе граф с 40 вершинами, обозначающими участников кружка и задачи. Ребро от x к y проводится, если

x - участник, y - задача, и x решил y . Докажите, что граф состоит из одного или нескольких циклов.

I5 (Продолжение). В следующий раз на том же кружке снова было задано 20 задач. Каждый участник решил три задачи, и каждую задачу решили три участника. Требуется доказать, что и на этот раз можно организовать разбор так, что каждый расскажет одну задачу, которую он решил, и все задачи будут рассказаны. Это можно доказать, опираясь на важную "теорему о представителях", которую мы сформулируем в виде следующей задачи.

I6 На кружке, в котором m участников, было задано на дом n задач. На следующем занятии оказалось, что выполняется следующее условие: для любых k участников (для всех k от 1 до m) количество задач, решенных ими в совокупности (т.е. задач, решенных хоть одним из этих k человек), не меньше k . (1)

В частности, из этого условия следует, что $n \geq m$. Пусть кроме того, каждую задачу кто-нибудь решил. Требуется доказать, что можно так организовать разбор задач, что каждый расскажет одну или большее число задач, которые он сам решил, и каждая задача будет рассказана ровно один раз.

Чтобы свести задачу I5 к задаче I6, достаточно доказать, что в ситуации, описанной в условии задачи I5, выполняется условие (I). Докажите это.

Решение задачи I6. Представим себе граф Γ с $m+n$ вершинами: m из них обозначают участников, n остальных - задачи. Проведем ребра так: проводится ребро от участника x к задаче y , если x решил y . План разбора задач, который нам надо получить, тоже можно представить в виде графа Γ' с теми же вершинами, но проводятся иначе: проводится ребро от участника x к задаче y , если x рассказывает y . Очевидно, что Γ' , если он существует (а это мы и должны доказать), получается из Γ стиранием некоторых ребер, но не проведением новых, так как каждый участник рассказывает только ту или те задачи, которые он сам решил. По условию в графе Γ' из каждой вершины - задачи должно выходить ровно одно ребро, а из каждой вершины - участника - не менее одного ребра.

Будем последовательно стирать в графе Γ ребра так, чтобы условие (I) при этом продолжало выполняться. Докажем, что это удается делать до тех пор, пока не получится граф, который можно принять

за Γ' . Рассмотрим три случая.

а) На некотором этапе стирания ребер получился несвязный граф. Тогда надо рассматривать его связные части по отдельности: они относятся к случаям б), в) для меньших значений m .

б) Существуют такие k участников, $k < m$, что число решенных ими задач равно k . Тогда можно стереть все ребра, идущие от этих k задач к прочим участникам, и условие (I) по-прежнему будет выполняться. Действительно, пусть для каких-то ℓ из прочих участников условие перестало выполняться: число соединенных с ними вершин - задач стало меньше ℓ . Тогда и раньше оно не выполнялось для множества, состоящего из этих ℓ и наших k участников: в нем $k+\ell$ элементов, а число задач, ими решенных, есть сумма k и числа, меньшего ℓ , значит оно меньше числа $k+\ell$. Это противоречит предположению. Если мы стерли ребра от этих k задач к прочим участникам, то в результате получили случай (а).

в) Для любых k участников, $k < m$, число решенных ими задач больше k . Пусть из какой-то вершины - задачи выходят хотя бы два ребра (иначе наш граф уже есть граф Γ' , и задача решена). Тогда можно стереть любое из них, и условие (I) по-прежнему будет выполняться. Действительно, раз стерто только одно ребро, то число задач, решенных любыми участниками, может уменьшиться только на 1, и станет не меньше k .

Таким образом, мы можем стирать ребра до тех пор, пока граф не распадается на такие связные компоненты, в которых из каждой вершины-задачи выходит ровно одно ребро. Условие (I) по-прежнему выполняется; оно гарантирует, что каждая вершина - участник соединена хотя бы с одной вершиной-задачей. Полученный граф и есть требуемый граф Γ' . Теорема доказана.

Опираясь на эту теорему, решите задачу I5.

§ 3. Игра

Пусть двое играют в следующую игру. Перед нами на бумаге начерчены несколько кружков, соединенных стрелками - ориентированный граф, например, граф на рис. I6. Возможен и иной граф. Существенно, чтобы это был граф без ориентированных циклов, то есть такой, что двигаясь по нему в направлении стрелок, нельзя дважды попасть в

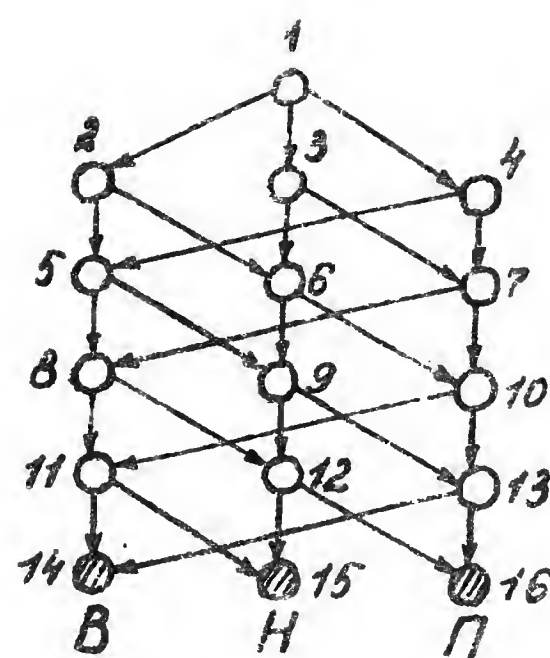


Рис. 16

то игрок может пойти фишкой по любой из них. Те вершины графа, из которых не выходит стрелки, называются финальными. На рис. 16 это вершины 14, 15, 16. Когда фишка попала на финальную вершину, игра заканчивается. У каждой финальной вершины написана одна из букв B, H или Π . Результат партии определяется буквой у той финальной вершины, где оказалась фишка к концу игры:

если B (выигрыш), то выигрывает сделавший последний ход;
если Π (проигрыш), то выигрывает его партнер;
если H , то ничья.

Поиграйте с кем-нибудь в игру на рис. 16. Как лучше играть, и на какой исход можно рассчитывать (при наилучшей игре партнера)? Оказывается, для любой такой игры это в принципе всегда можно точно выяснить. Покажем на примере графа на рис. 16, как это сделать. Нужно рассуждать с конца. На что, например, может рассчитывать игрок, поставивший фишку на вершину 12? На ничью, так как его противник следующим ходом, конечно, пойдет на 15. Игрок, поставивший фишку на 11 или 13, конечно, проигрывает. Поэтому поставим у вершин 11 и 13 буквы Π , а у вершины 12 - букву H .

Далее, игрок, поставивший фишку на 10, выигрывает, так как, куда бы ни пошел после противник - на 11 или 13, он попадет на вершину с буквой Π , то есть впоследствии проигрывает. Вы, должно быть, уже поняли, как расставить буквы. Расставьте буквы у всех вершин на рис. 16. Заметим, что присваивать какой-нибудь вершине A букву можно только тогда, когда уже присвоены буквы всем вершинам, в которые из нее ведут стрелки (за одним исключением:

в одну и ту же вершину. В частности, все ребра должны быть снабжены стрелками: иначе можно будет ходить по ребру без стрелки назад-вперед. Перед началом игры на одну из вершин ставится фишка (например, на вершину 1). Игра состоит в том, что игроки по очереди ходят - передвигают фишку. За один ход фишку нужно передвинуть ровно по одному ребру в направлении стрелки. Если из вершины выходят несколько стрелок,

если у одной из них уже стоит B , то вершине A можно равнодушно присвоить Π). Вершина 1 получила букву Π . Это означает, что начинающий, делаящий из нее ход, может выиграть. Для этого он должен ходить всегда на вершину с буквой B .

Упражнения.

1. Почему этот метод расстановки букв может не привести к успеху, если в графе есть ориентированные циклы? Приведите конкретный пример, демонстрирующий это.

2. Докажите, что если в графе нет ориентированных циклов, то всем вершинам удастся присвоить буквы.

3. Сформулируйте в общем виде правило, какую букву присвоить вершине в зависимости от букв у вершин, в которые из нее ведут стрелки.

3а. Придадим буквам числовые значения: $B=1, H=0, \Pi=-1$. Проверьте, что тогда это правило может быть задано формулой:

$$L(A) = -\max \{L(B_1), \dots, L(B_k)\},$$

где $L(A)$ - значение буквы, присвоенной вершине A ,

$L(B_1), \dots, L(B_k)$ - значения букв, присвоенных тем вершинам B_1, \dots, B_k , куда из A ведут стрелки.

К играм на графах, которые мы описали, по существу сводится целый ряд игр, даже если их правила заданы, на первый взгляд, совсем иначе.

Следующие задачи содержат примеры таких игр.

4. Двое играют в следующую игру. Перед ними на столе лежат четыре коробки, пронумерованные от 1 до 4. Перед началом игры в каждой коробке по одной спичке. Ходят по очереди. Одним ходом можно переложить из одной коробки все лежащие в ней спички (если она не пуста) в коробку с номером на единицу больше: из 1 в 2, из 2 в 3 или из 3 в 4. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход, так как 1, 2 и 3 коробки будут уже пусты. Кто выигрывает: начинающий или его партнер и как ему надо для этого играть?

Указание. Решим аналогичную задачу для трех коробок. Начертим граф этой игры (рис. 17). Кружки означают состояния - позиции игры.

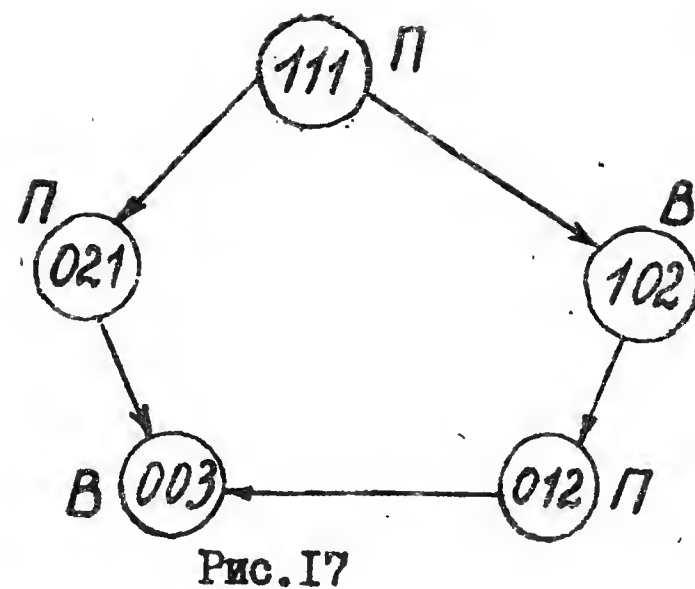


Рис. I7

Тройка цифр в каждом кружке означает количества спичек в коробках: с первой до третьей. Стрелки означают возможные ходы. Позиция (003) — финальная, ей, по условию, присваивается буква В. Остальным позициям присваиваются буквы по правилу, которое вы сформулировали, решая задачу 3. От того, что ничья невозможна, это правило только упрощается. Проверьте, правильно ли поставлены буквы. Составьте те-

перь аналогичный граф для четырех коробок и проставьте буквы. (Для экономии в кружках можно указывать только, есть спички в данной коробке или нет. Тогда придется рисовать меньше кружков).

Теоретически можно составить граф и поставить буквы для этой игры с любым числом коробок. Но практически это при росте числа коробок скоро становится невозможным, так как число позиций быстро растет. Аналогичная трудность имеет место по отношению к таким играм, как шашки и шахматы. Для каждой из них полное исследование с помощью графа возможно теоретически, но не практически.

Приведем несколько примеров игр, где удается угадать общую для всех n закономерность в построении графа и расстановке букв на нем.

5 Двое играют в следующую игру. Перед ними кучка из n спичек. Ходят по очереди. За один ход можно взять из кучки одну или две спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выигрывает, и как ему надо играть, чтобы выиграть?

Указание. Фактически здесь требуется разобрать бесконечное множество различных игр, и каждой соответствует свой граф. К счастью, n -ий граф не надо строить заново: достаточно продолжить до n цепочку, начало которой изображено на рис. I8 (числа в кружках означают оставшееся количество спичек).



Рис. I8

Расставленные буквы позволяют предположить, по какому закону они расположатся дальше.

а) Сформулируйте, какова, по вашему мнению, закономерность расположения букв при неограниченном продолжении цепочки.

б) Докажите, что если эта закономерность соблюдается до некоторого места, то она выполняется и на один кружок дальше.

6 Тот же вопрос, если за один ход можно взять две или три спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Если в кучке останется одна спичка, засчитывается ничья. Каков будет исход игры, если оба играют наилучшим для себя образом и перед началом игры в кучке 1973 спички?

7 Тот же вопрос, что в задаче 5, если за один ход можно взять одну спичку или не брать ни одной, но при этом запрещается не брать ни одной спички, если за два предыдущих хода не было взято ни одной спички.

Указание. Здесь, чтобы задать состояние игры, мало указать число оставшихся спичек. Граф этой игры показан на рис. I9. В ряду I находятся состояния, когда последним ходом была взята спичка,

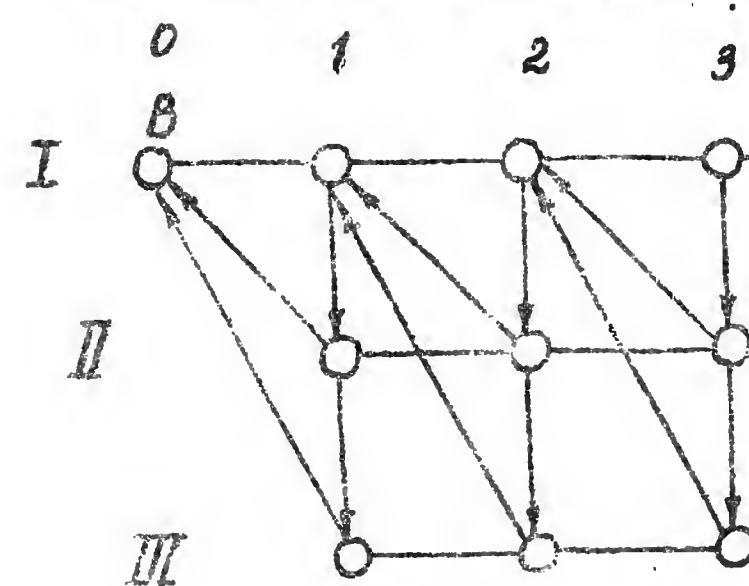


Рис. I9

в ряду II — когда спичка была взята не последним ходом, а предпоследним, в ряду III — когда за оба последних хода не было взято ничего. Проверьте, правильно ли проведены стрелки. Расставьте буквы. В шахматах в задании позиции тоже, кроме расположения фигур и того, чей ход, входит указание, за сколько последних ходов не была взята ни одна фигура и не была передвинута ни одна пешка; если таких ходов слишком много, то игра прекращается, и засчитывается ничья. Только с учетом этого шахматы и изображаются графом (хотя бы в принципе) без ориентированных циклов. То же относится к шашкам.

8 Двое играют в следующую игру. Они называют по очереди числа. В первый раз называется число 1973. Затем каждый называет разность между последним числом, названным его партнером и каким-нибудь его делителем (включая единицу и само это число). Проигрывает

тот, кто назовет ноль. Кто выигрывает: начинающий или его партнер, и как ему надо играть, чтобы выиграть?

[9] Двое играют в такую игру. Перед ними две кучки спичек по 10 штук в каждой. Ходят по очереди. Каждый ходом можно взять одну спичку из любой кучки или по одной из обеих. Проигрывает тот, кто не может сделать ход, так как не осталось спичек. Кто выигрывает и как ему надо для этого играть?

Указание. Пусть в первой кучке x спичек, во второй — y спичек. Сопоставьте этому положению клетку на клетчатой бумаге с номером x по горизонтали и номером y по вертикали. Процесс игры состоит в перемещении фишки по бумаге. Как можно ходить? Начните расставлять в клетках буквы, начиная с клетки (0; 0).

[10] Тот же вопрос, если за один ход можно взять любое число спичек (хоть все, но не менее одной) из одной кучки (но нельзя брать за один ход спички из обеих кучек).

[11] Тот же вопрос, что в задаче 9, если за один ход можно либо взять одну спичку из первой кучки, либо переложить одну спичку из второй кучки в первую.

РОТАПРИНТ НИИ ОП АПН СССР
Нахимовский пр., 4

Заказ 801 Тираж 10000

N 1.7.Y

Задание N 7
1-го года обучения

1974-75 уч.год
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ УЧЕНИКАМ I-го КУРСА ВЗМШ
по заданию № 7

Подписано к печати 20/11-75г.
Формат 60 x 84/16 Объем 2,25 печ.л.
Заказ 30. Тираж 5 000. Бесплатно.

ОНТИ НИВЦ МГУ

Перед Вами седьмое задание, которое Вы должны выполнить по программе ВЗМШ.

Одно общее замечание, относящееся НЕ ТОЛЬКО к этому заданию. Если на уроке математики в школе вы не поняли формулировку задачи, то Вы можете поднять руку и сразу получить ответ учителя – как же точно следует понимать условие задачи, что в ней спрашивается. В заочной школе, к сожалению, это невозможно. Поэтому мы стараемся точно и аккуратно формулировать задачи, стремимся избежать таких случаев, когда может возникнуть двусмысленность. Тем не менее, конечно, такие случаи не исключены. Если Вам кажется, что условие задачи сформулировано не совсем ясно, или допускает различные толкования, то обязательно поделитесь с нами Вашими сомнениями. (Если речь идет о задачах, не входящих в число контрольных, то напишите об этом в конце работы). Это не только облегчит проверку работы, поможет проверяющему быстрее найти с Вами "Общий язык", но будет полезно и при подготовке заданий в будущем.

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Вы, вероятно, знаете, что любое целое положительное число можно разложить в произведение простых множителей: так, например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2, 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, 290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Почему такое разложение единственно? Более простой факт: если произведение mn делится на 7, то хотя бы одно из чисел m и n должно делиться на 7.

Эти факты считаются очевидными. Между тем, доказать их не так просто. Это мы сделаем позже, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел.

Всюду латинскими буквами: a, b, c, d, k, l, m, n и т.д. мы обозначаем целые числа.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
§ 1. Делимость суммы, разности и произведения.	2
§ 2. Деление с остатком.	4
§ 3. Делители. Простые числа	8
§ 4. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. . . II	
§ 5. Прямая на решетке. Важные леммы	12
§ 6. Основная теорема арифметики	19
§ 7. Прямые на решетке. Линейные уравнения	21
§ 8. Алгоритм Евклида.	25
Контрольное задание.	33

Срок присылки задания № 7 - 10 апреля 1975 г.

В тех задачах, где требуется нарисовать чертеж, делайте его побольше (на всю страницу тетради). Постарайтесь решать не только те задачи, которые включены в задание. Особенно это относится к задачам, у номеров которых стоит кружочек * (эти задачи необходимо обдумать для понимания дальнейшего). Звездочкой * отмечены задачи, которые несколько отклоняются от основной темы - их можно пропустить при первом чтении.

§ 1. Делимость суммы, разности и произведения

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b , если существует такое целое число k , что $a = bk$. В таком случае число b называется делителем числа a .

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. Если числа a и b делятся на c , то и их сумма $a + b$ и их разность $a - b$ делятся на c ;

2°. Если a делится на c , а b делится на d , то их произведение ab делится на cd .

Докажем 1°. Поскольку a делится на c , то $a = kc$, где k - некоторое целое число. Точно также $b = mc$, где m - целое число. Поэтому $a + b = (k + m)c$, $a - b = (k - m)c$ откуда следует, что каждое из чисел $a + b$ и $a - b$ делится на c .

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда следует, что ab делится на cd .

Задача 1.1°. Докажите, что если a делится на b , а b делится на c , то a делится на c .

Задача 1.2°. Докажите, что если каждое из чисел a и b делится на c (где $c \neq 0$), то целое число $\frac{ab}{c}$ делится на a , и на b .

Задача 1.3. Докажите, что если a делится на b , то a^n делится на b^n .

Задача 1.4. Докажите, что если ab делится на c и $a + b$ делится на c , то а) $a^2 + b^2$ делится на c ; б) $a^3 + b^3$ делится на c .

Решение 1.4. а) Выразим $a^2 + b^2$ через $(a + b)$ и ab :

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

По условию $(a + b)$ делится на c , следовательно, $(a + b)^2$ делится на c . По условию ab делится на c , поэтому $2ab$ делится на c . Так как число $a^2 + b^2$ равно разности двух чисел, делящихся на c , согласно утверждению 1° оно само делится на c .

Задача 1.5. Докажите, что $a^5 + b^5$ делится на $a + b$.

Решение 1.5. Выражение $a^5 + b^5$ разлагается на множители:

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

Если a и b - целые, то оба множителя будут целыми числами. Отсюда следует, что $a^5 + b^5$ делится на $a + b$.

Задача 1.6. Докажите, что $a^3b + b^3a$ делится на $a^2b + b^2a$.

Задача 1.7.* Докажите, что $a^4 + 4b^4$ делится на $a^2 + 2ab + 2b^2$.

Задача 1.8. Докажите, что если $ab + cd$ делится на $a + c$, то $ad + bc$ делится на $a + c$ (здесь $a + c \neq 0$).

Указание. Разложите сумму $ab + cd + ad + bc$ на множители.

Задача 1.9. Какие из следующих утверждений верны, а какие - нет: а) если одно слагаемое делится на 15, а другое не делится на 15, то их сумма не делится на 15;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 15, то их сумма не делится на 15;

в) если каждый из двух сомножителей не делится на 15, то их произведение не делится на 15;

г) если один из двух сомножителей делится на 15, а другой не делится на 15, то произведение делится на 15;

д) если число делится на 15, и на 21, то оно делится на $15 \cdot 21 = 315$. ?

Решение 1.9. а) Это утверждение верно. Докажем это. Пусть $a + b = c$, причем a делится на 15, а b не делится на 15. Докажем, что c не делится на 15. Предположим противное: пусть c делится на 15. Но тогда по утверждению (1⁰) разность $b = c - a$ делится на 15. Мы получили противоречие с условием задачи.

Решение 1.9. б) Это утверждение неверно. Приведем противоречащий пример: $7 + 8 = 15$. Здесь каждое из двух слагаемых не делится на 15, в то время как их сумма делится на 15.

Важное замечание. Подчеркнем, что когда спрашивается: "верна какая-то теорема (какое-то математическое утверждение) или нет" - то имеется в виду: "верно ли это при всех значениях букв, во всех возможных случаях?" Поэтому, когда мы доказываем теорему, т.е. доказываем, что она верна, мы должны проводить рассуждение так, чтобы оно годилось для всех случаев. Если же мы хотим показать, что теорема неверна, то достаточно привести один опровергающий пример; так мы построили ответ на вопрос 1.9 б).

§ 2. Деление с остатком

Отметим на числовой оси точки, соответствующие целым числам (рис. 1). Пусть b - некоторое натуральное (целое положительное)



Рис. 1

число. Выделим на рисунке все целые числа, ¹⁾ делящиеся на b . Они расположены на оси на равном расстоянии друг от друга. Эти числа называют еще кратными числу b .

Пусть теперь какое-то число a не кратно b . Тогда оно попадает в такой отрезок между двумя числами, кратными b - между qb и $(q+1)b$ (рис. 2).

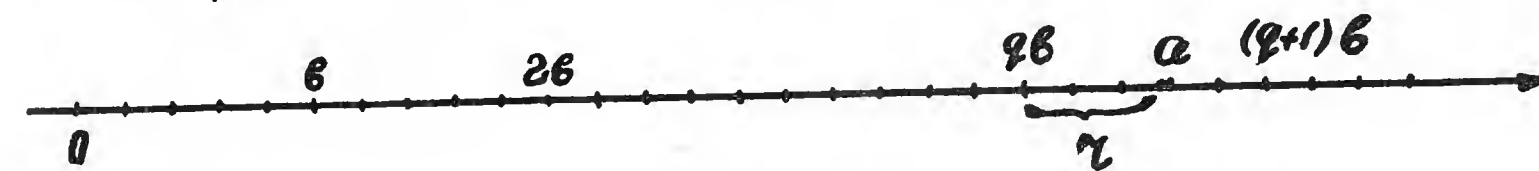


Рис. 2

По этому поводу можно сформулировать такое утверждение.

Если a и b - целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q , что $a = bq + r$, где "остаток" r - целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq r < b$. Эти числа q и r определяются (по данным a и b) единственным образом.

Пусть числа a и b заданы своими записями в десятичной системе. Чтобы найти "частное" q и остаток r , не нужно, конечно, рисовать отрезок длины a на числовой оси и "укладывать" на нем много раз отрезок длины b . Для этого существует более рациональный способ. Это - известное всем правило деления одного числа a на другое число b "столбиком". Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если делитель 1973 на 31, то при делении получится частное 63 и остаток 20:

$$\begin{array}{r} - 1973 \\ \underline{186} \\ - 113 \\ \underline{93} \\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ \hline 63 \end{array}$$

или $1973 = 31 \cdot 63 + 20$

I Вместо "точки, соответствующие числам" будем говорить просто "числа".

Задача 2.1. Какой остаток дает число 1005:

- а) при делении на 4; г) при делении на 9;
б) при делении на 8; д) при делении на 13;
в) при делении на 7; е) при делении на 15 ?

Задача 2.2. а) Нарисуйте числовую ось и отметьте на ней целые числа, которые при делении на 7 дают в остатке 3. (Масштаб и начало отсчета выберите так, чтобы по крайней мере все числа между (-20) и (+20) поместились).

б) Каково наименьшее из чисел, больших 1973, при делении на 7 дает в остатке 3 ?

Задача 2.3. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира № 222 ? (На всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково).

Задача 2.4. а) Найдите какое-нибудь шестизначное число, которое делится на 123.

б) Найдите наименьшее такое число.

Задача 2.5. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1973 куска?

Указание. Прочтите еще раз название параграфа.

Задача 2.6. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число $n^2 + 3n + 5$ при делении на число $n + 1$?

Решение 2.6. Перепишем данное число $n^2 + 3n + 5$ так:

$$n^2 + 3n + 5 = (n+1)(n+2) + 3.$$

Из этой записи видно, что если число $n+1$ больше 3, то остаток всегда равен 3. Если $n+1=2$ (при $n=1$), то, поскольку $3=1 \cdot 2 + 1$, остаток равен 1. Если $n+1=3$ (при $n=2$), то остаток равен 0.

Задача 2.7. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число $2n^2 + 5n + 3$ при делении на число $n + 2$?

Задача 2.8.* а) Двое играют в такую игру. Первый называет любое целое число от 1 до 5. Второй прибавляет к этому числу любое число от 1 до 5. Затем первый к полученной сумме снова прибавляет любое из чисел от 1 до 5, и т.д. Выигрывает тот, кто первым получит число 50.

Попробуйте несколько раз сыграть с товарищем в такую игру. Выясните какой стратегии надо придерживаться, чтобы выиграть. Кто из игроков (первый или второй) наверняка выиграет, если будет следовать этой стратегии?

б) Решите эту задачу в общем случае, считая, что цель игры состоит в том, чтобы первым получить число n .

Задача 2.9.* На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Сколько самое меньшее, может быть книг на столе?

Указание. Чтобы число делилось на 4, на 5 и на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 60. Это один из тех "очевидных" фактов, которые мы научимся строго доказывать ниже.

Задача 2.10.* а) Докажите, что из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

б) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, у которых разность любых двух делится на 7? а 16 таких чисел.

в) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать два таких, у которых сумма делится на 7 ?

г) Докажите, что из 5 чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.

Решение 2.10. а) Пусть даны любые 8 целых чисел. Найдем остаток каждого из них от деления на 7. Всего существует 7 возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. А у нас имеется 8 остатков. Значит, хотя бы два из них совпадают. Следовательно, два из наших чисел давали один и тот же остаток при делении на 7: $a_1 = 7q_1 + r$, $a_2 = 7q_2 + r$. Тогда их разность $a_1 - a_2 = 7(q_1 - q_2)$ должна делиться на 7.

Указание к задаче г). Вместе с каждым остатком r рас-

смотрите "дополнительный" - γ - γ .

Задача 2.II. Какие из следующих утверждений верны, а какие - нет:

- а) если α при делении на 8 дает в остатке 3, то при делении на 4 оно дает в остатке 3;
- б) если α при делении на 4 дает в остатке 3, то и при делении на 8 оно дает в остатке 3;
- в) если α при делении на 15 дает в остатке 7, то при делении на 5 оно не может дать в остатке 3;
- г) если α при делении на 15 дает в остатке 3, то при делении на 9 оно не может дать в остатке 6.

Решение 2.II. а) Утверждение верно. Пусть $\alpha = 8k + 3$, тогда $\alpha = 4(2k) + 3$.

Решение 2.II. б) Утверждение неверно. Например, $\alpha = 7$. Тогда $\gamma = 4 \cdot 1 + 3$, но $7 = 8 \cdot 0 + 7$, то есть остаток при делении 7 на 4 равен 3, а при делении на 8 равен 7.

§ 3. Делители. Простые числа.

В этом параграфе, а также в §§ 4, 5 и 6 мы будем рассматривать только натуральные, то есть целые положительные числа. Возьмем какое-то целое число α и выпишем все его делители. Например, у числа $\alpha = 48$ множество D всех его делителей состоит из 10 чисел:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

Множество D делителей данного числа α всегда обладает некоторой симметрией, которую мы сейчас объясним.

Если b - делитель числа α , то $\alpha = bk$, где k - целое число. Конечно, k при этом тоже будет делителем числа α . Такие два делителя, произведение которых равно α , называются дополнительными. Например, 3 и 16 - дополнительные делители числа 48. Сопоставляя каждому делителю дополнительный, мы получим взаимнооднозначное отображение множества D на себя. На-

пример, для числа $\alpha = 48$ это отображение можно задать так:

Делитель	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
Дополнительный делитель	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1

Задача 3.I. Приведите пример числа, имеющего:

- а) ровно 5 делителей; б) ровно 6 делителей.

Задача 3.2.* Докажите, что если число не является полным квадратом, то у него четное количество делителей, а если является квадратом - то нечетное.

Задача 3.3.* Пусть целое число α четно и не делится на 4. Докажите, что у числа α столько же четных делителей, сколько нечетных.

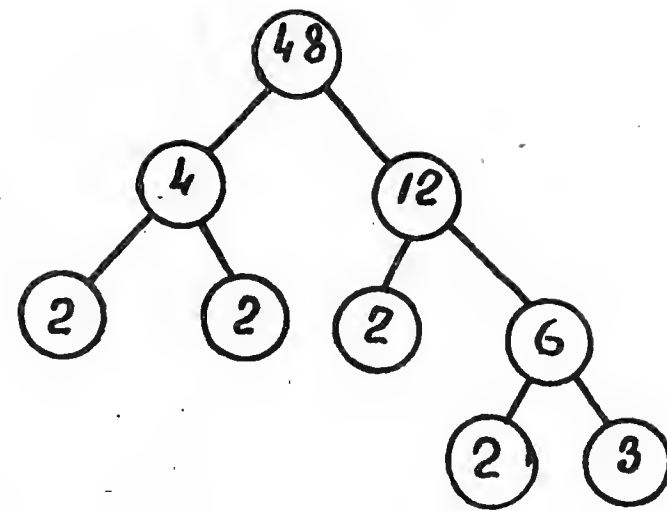
Указание. Постройте взаимнооднозначное отображение множества четных делителей числа α на множество его нечетных делителей.

Каждое натуральное число α большее 1, имеет по крайней мере два делителя: 1 и α . Число α называется простым, если у него нет других делителей, и составным - если они есть. Вот первые десять простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Можно доказать (см. задачи 3.7 или 8.8), что существует бесконечно много простых чисел. Это знал еще Евклид.

Простые числа, по определению, не разлагаются в произведение меньших чисел. Почти очевидно следующее утверждение.

Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых чисел.

Действительно, пусть нам дано составное число α . Мы можем разложить его в произведение двух множителей, меньших α . Если среди них есть хотя бы один не простой, то мы можем и его разложить в произведение двух множителей. Если среди них опять будут составные, они опять разлагаются на множители и т.д.



$$\begin{aligned}
 48 &= \\
 &= 4 \cdot 12 = \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = \\
 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3
 \end{aligned}$$

Этот процесс не может продолжаться бесконечно, поскольку каждый сомножитель меньше самого числа. (В нашей схеме на каждом "этаже" числа меньше, по крайней мере, вдвое, чем на предыдущем "этаже"). В результате мы приходим к разложению на простые множители.

Обычно равные простые множители собирают вместе и записывают разложение так:

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

в общем случае:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$$

где p_1, p_2, \dots, p_m — простые числа. (Конечно, пока не ясно, почему такое разложение единственно. Это мы докажем ниже в §6).

Чтобы начать процесс разложения данного числа a в произведение простых, нужно найти хотя бы один его простой множитель. Никакого простого способа для этого не существует: если про число a заранее ничего неизвестно, приходится перебирать простые числа и по очереди испытывать, делится ли a на 2, 3, 5 и т.д.

Пример. Разложим число 1970 на простые множители. Оно четное — делится на 2

$$1970 = 2 \cdot 985$$

Далее, 985 явно делится на 5:

$$985 = 5 \cdot 197$$

Пробуем делить 197 на 7, 11, 13 — не делится. Дальше можно не пробовать: поскольку $17^2 = 289 > 197$, то 197 не может иметь ни одного делителя, отличного от 1 и 197, то есть 197 — простое. (Если $197 = a \cdot k$, где $197 > a > 17$, то $1 < k < 17$, а таких делителей 197 не имеет). Итак, $1970 = 2 \cdot 5 \cdot 197$.

Задача 3.4. а) Докажите, что если четырехзначное число p не делится ни на одно простое число от 2 до 97, то p простое.

б) Докажите, что каждое составное число имеет простой делитель p такой, что $p^2 \leq a$.

Задача 3.5. Разложите на простые множители числа 1971, 1972, 1973, 1974.

Задача 3.6. Разложите на простые множители число $2^{2^k} - 1$.

Указание. Это число делится на $2^{2^{k-1}} - 1$, $2^{2^{k-2}} + 1$, $2^{2^{k-3}} + 1$, $2^{2^{k-4}} - 1$, $2^{2^{k-5}} + 1$ и т.п.

Задача 3.7.* а) На столе 211 книг. Проверьте, что если их связывать по 2, 3, 5 или 7 книг в пачку, то всегда остается одна лишняя.

б) Сколько должно быть книг на столе, чтобы всегда оставалась лишняя при связывании по 2, 3, 5, 7, 11, 13 штук в пачку?

в) Пусть p_1, p_2, \dots, p_m — любые простые числа. Придумайте число N , которое при делении на каждое из этих чисел p_i дает в остатке 1 ($i = 1, 2, \dots, m$).

г) Докажите, что кроме p_1, \dots, p_m существуют и другие простые числа.

Указание. Любой простой делитель числа N , построенного в задаче в), отличен от p_1, \dots, p_m .

§ 4. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Пусть a и b — два целых числа, неравные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делится и a , и b одновременно. Выберем из них наибольшее число и назовем его

наибольшим общим делителем. Далее будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через $\text{НОД}(a, b)$.

Пример. Выпишем общие делители чисел 48 и 30: 1, 2, 3, 6.

Таким образом, откуда видно, что $\text{НОД}(48, 30) = 6$.

Точно так же легко проверить, что $\text{НОД}(4, 12) = 4$, $\text{НОД}(21, 91) = 7$, $\text{НОД}(15, 28) = 1$.

Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Задача 4.1. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = d$ и $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, то числа a_1 , b_1 взаимно просты.

Задача 4.2. Пусть p — простое. Докажите, что либо a делится на p , либо $\text{НОД}(a, p) = 1$.

Задача 4.3. Верно ли, что если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = d$, то и $\text{НОД}(a, c) = d$?

Задача 4.4. Выпишите делители каждого из чисел 441 и 686, их общие делители и найдите $\text{НОД}(441, 686)$.

Задача 4.5. Сократите дробь $\frac{78}{195}$.
(Разделите числитель и знаменатель на наибольшее возможное целое число).

Задача 4.6. а) Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 192 белых и 264 красных георгинов?

б) Каков будет ответ в общем случае, если белых георгинов a штук, а красных — b штук?

§ 5. Прямая на решетке. Важные леммы.

Пусть у нас имеется лист клетчатой бумаги. Представим себе, что на нем нарисован прямоугольник, стороны которого идут по линиям сетки. Будем считать, что длина стороны одной клетки равна 1 и что прямоугольник имеет размеры $a \times b$.

Поставим перед собой следующую довольно трудную задачу.

Задача 5.1. Проведем диагональ прямоугольника $a \times b$ и отметим все узлы, сетки, которые на ней лежат. На сколько частей делят эти узлы диагональ?

Узлами мы называем точки, где пересекаются линии сетки.

Прежде чем решать задачу в общем виде, рассмотрим несколько примеров.

На рис. 3 на клетчатой бумаге взят прямоугольник 10×15 . Мы видим, что узлы делят диагональ на равные части и число частей равно 5.

Диагональ прямоугольника 5×7 (рис. 4) вообще не проходит через узел, лежащий внутри прямоугольника: число частей — 1.

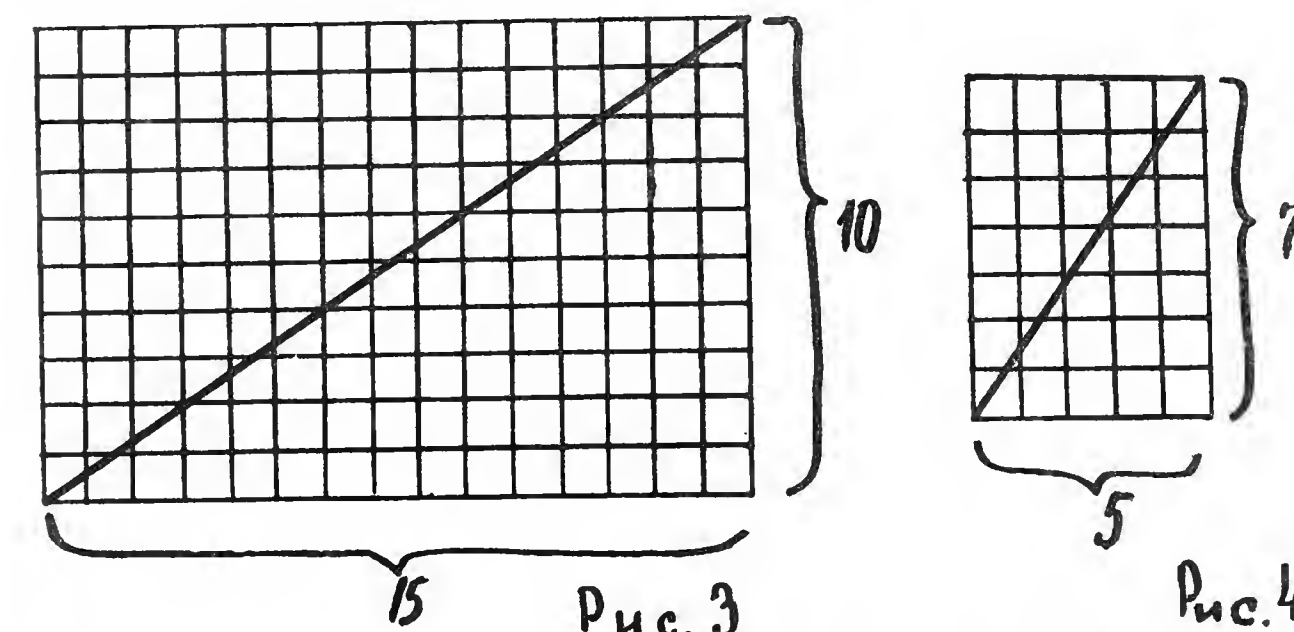


Рис. 3

Рис. 4

Для прямоугольника 12×20 (рис. 5) диагональ разбивается узлами решетки на 4 одинаковых отрезка (каждый из них служит диагональю прямоугольника 3×5 клеток).

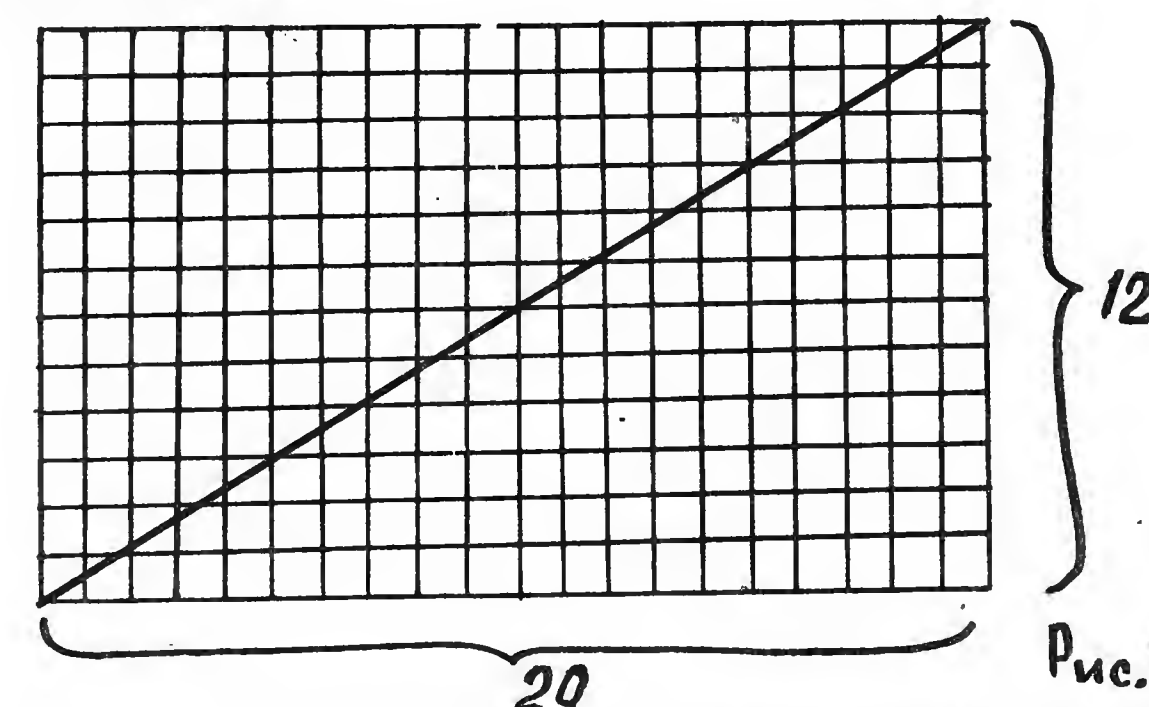


Рис. 5

Нарисуйте еще несколько прямоугольников на клетчатой бумаге. Проверьте, скажем, что диагональ прямоугольника 4×10 делится диагональю на 2 равных части, прямоугольника 9×15 — на 3, 14×35 — на 7, 20×36 — на 4.

Теперь вы сможете догадаться, что ответ в задаче 5.1 та-

кой.

(1) Количество частей, на которые узлы делят диагональ прямоугольника $a \times b$, равно $\text{НОД}(a, b)$ - наибольшему общему делителю чисел a и b .

Кроме того, вы можете заметить следующее.

(2) Узлы всегда делят диагональ прямоугольника на равные части.

(В частности, когда числа a и b взаимно просты, то есть $\text{НОД}(a, b) = 1$, диагональ вообще не проходит через узлы и количество частей равно 1.)

Пока что мы только догадались, какой будет ответ. Нужно теперь его показать. Мы не случайно отметили еще одно обстоятельство (2). Оно дает нам ключ к доказательству (1), - а начнем мы с доказательства (2).

Доказательство утверждения (2). Пусть $OADB$ - прямоугольник на клетчатой бумаге, стороны у которого идут по линиям сетки. Обозначим все узлы, расположенные на диагонали OD , по порядку (от O до D) через C_1, C_2, \dots, C_m , так что узел C_1 - самый близкий к O (рис. 6). Пусть C_k - какой-нибудь узел на диагонали OD . Покажем, что длина отрезка $C_k C_{k+1}$ равна длине отрезка OC_1 (если $k=m$, то есть C_k - последний узел, то роль C_{k+1} играет D).

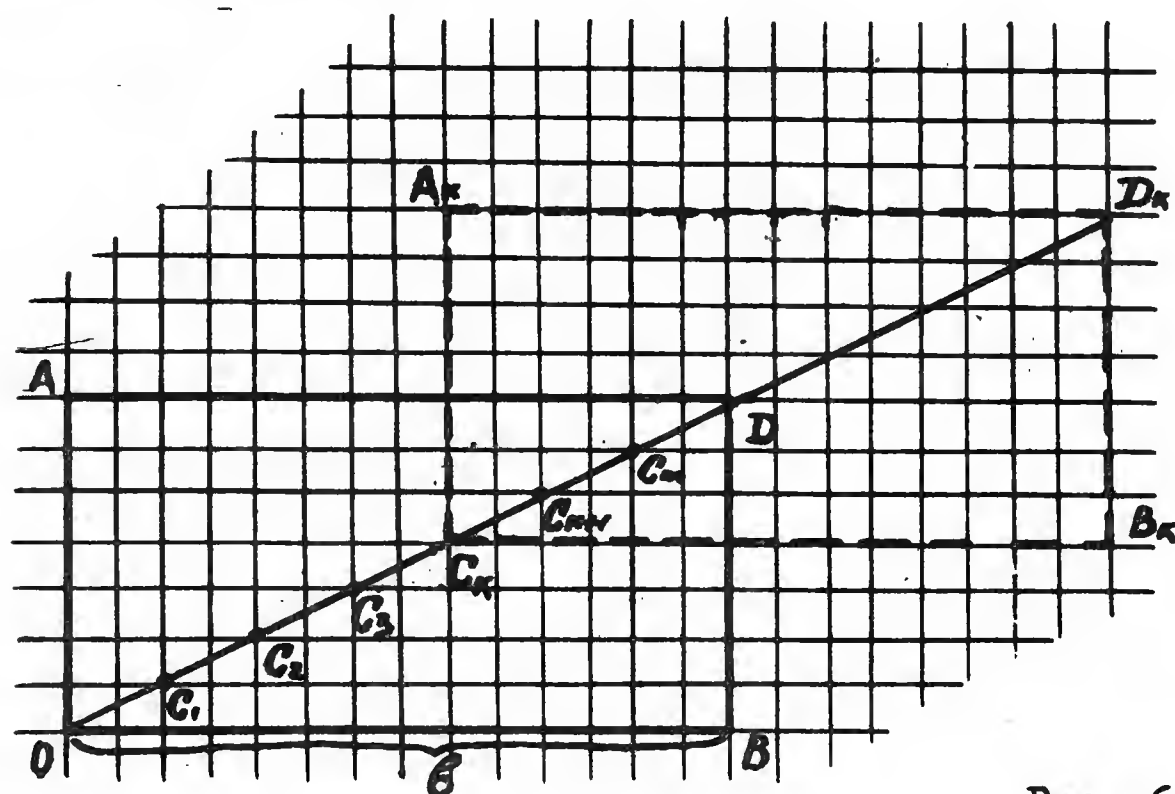


Рис. 6.

Перенесем параллельно весь прямоугольник $OADB$ в направлении диагонали OD так, чтобы его вершина O перешла в узел C_k (как показано на рис. 6 пунктиром). Обозначим через A_k, D_k, B_k новые положения вершин A, D, B . Ясно, что при переносе все узлы сетки, лежавшие внутри прямоугольника $OADB$, перейдут соответственно в узлы, лежащие внутри прямоугольника $C_k A_k D_k B_k$. Но в прямоугольнике $C_k A_k D_k B_k$ ближайшим к C_k узлом будет C_{k+1} - ведь мы отметили все без исключения узлы на диагонали OD . При переносе расстояния не меняются, O переходит в C_k , а C_1 - как мы показали - в C_{k+1} , поэтому длины отрезков OC_1 и $C_k C_{k+1}$ равны.

Заметим, что в этом рассуждении прямоугольник особенно не нужен - нужна только диагональ. По существу мы доказали, что если через любые два узла клетчатой бумаги провести прямую и затем отметить все без исключения узлы, лежащие на этой прямой, то эти узлы делят прямую на равные отрезки.

Доказательство утверждения (1). Здесь мы не будем сопровождать доказательство рисунками. Обязательно сделайте это сами.

Пусть сторона OA прямоугольника $OADB$ состоит из a клеток, сторона OB - из b клеток. Мы уже знаем из (2), что диагональ разбита узлами на равные части, а сейчас должны доказать, что количество этих частей равно $d = \text{НОД}(a, b)$.

Сначала докажем, что если узлы разбивают диагональ на k равных частей, то k - общий делитель чисел a и b . Проведем через все эти узлы (лежащие на диагонали) прямые, параллельные стороне OA . Ясно, что они делят сторону OB на равные части и пересекают ее в узлах сетки. Поэтому b делится на k . Точно так же, проведя прямые, параллельные OB , докажем, что a делится на k .

Теперь докажем, что если k - общий делитель a и b , то на диагонали можно указать такие узлы, которые делят ее на k равных частей. Разделим сторону OA на k частей и через точки деления проведем прямые, параллельные стороне OB (поскольку a делится на k , мы можем разбить сторону OA на k равных частей линиями сетки). Эти прямые - линии сетки - очевидно, делят диагональ OD на k равных частей. Точно так же, разде-

лив сторону OB узлами на k равных частей и проведя линии сетки, параллельные OA , мы разобьем диагональ на k равных частей. Таким образом, те и другие прямые пересекают диагональ в одних и тех же точках. Эти точки, следовательно, — узлы сетки.

Итак, мы доказали, что каждому общему делителю чисел a и b соответствует набор узлов, разбивающих диагональ на равные части, причем это соответствие взаимно однозначно: каждому разбиению на равные части соответствует общий делитель k .

Ясно, что если мы отметим все узлы на диагонали — возьмем самое мелкое разбиение, — то ему соответствует наибольший общий делитель.

Решение задачи 5.1 закончено. Оно поможет нам доказать одну важную лемму, которая используется в доказательстве основной теоремы арифметики.

Лемма I. Если произведение $b \cdot c$ делится на a , причем числа a и b взаимно просты, то c делится на a .

Доказательство. Пусть $b \cdot c$ делится на a . Это означает, что найдется k такое, что

$$b \cdot c = k \cdot a$$

Нарисуем прямоугольник $c \times k$ на клетчатой бумаге, а в его углу расположим прямоугольник $a \times b$ (рис. 7). Поскольку

$$\frac{b}{a} = \frac{k}{c},$$

то (из подобия прямоугольных треугольников OAE и $OC'D$) $\angle EOA = \angle D'OC'$, то есть узел E лежит на диагонали OD .

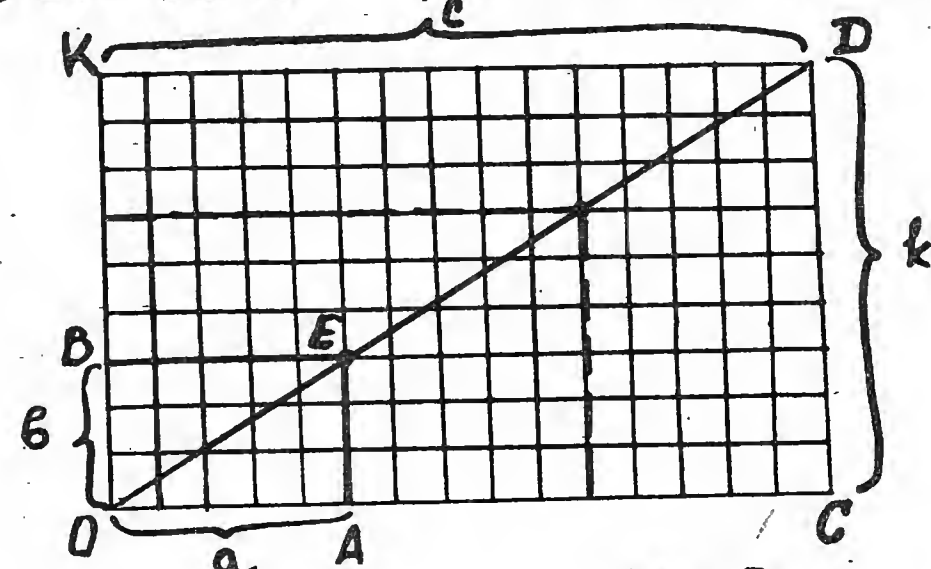


Рис. 7.

А поскольку числа a и b взаимно просты, то E — ближайший к O узел, лежащий на диагонали OD . Согласно утверждению (2) на стр. 14, отрезок OE должен целое число раз укладываться на диагонали OD . Тем самым, отрезок OA должен целое число раз укладываться на стороне OC , а OB — на стороне OK : $c = t \cdot a$, $k = t \cdot b$, где t — некоторое целое число, то есть c делится на a (а k — на b).

Связь между узлами клетчатой бумаги и целыми числами, которая использовалась в этом параграфе, легко объясняется с помощью метода координат.

Выберем на клетчатой бумаге за оси координат две линии сетки, за единицу масштаба — сторону клетки. Тогда узлы сетки можно охарактеризовать так: это — такие точки (x, y) , обе координаты которых — целые числа. Будем их называть целыми точками, а все множество этих точек (узлов) — решеткой.

(Таким образом, задачу 5.1 можно было бы сформулировать так: "на сколько частей целые точки делят отрезок с концами в точках $(0,0)$ и (a,b) ?")

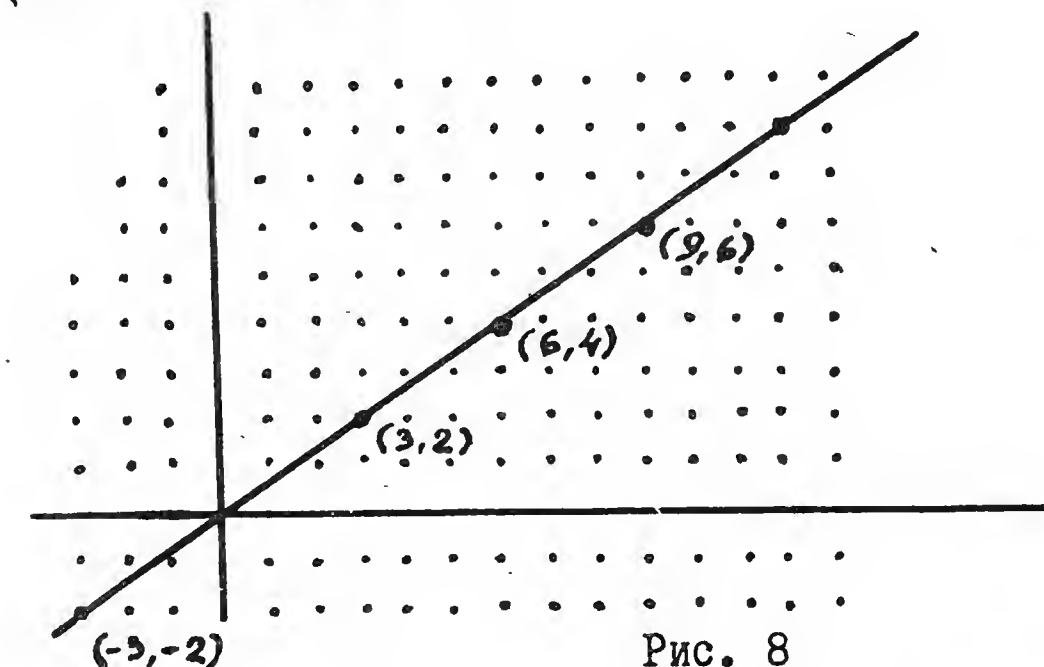


Рис. 8

На рисунке 8 по решетке проведена прямая, задаваемая уравнением

$$y = \frac{2}{3}x$$

или, что то же самое, $2x = 3y$.

Легко видеть, что все возможные точки решетки, лежащие на этой прямой — это

$$(3, 2), (6, 4), (9, 6), (12, 8), \dots$$

по одну сторону от начала координат (0,0) и (-3,-2), (-6,-4), ... по другую сторону. Короче, все эти точки можно записать общей формулой: их координаты

$$x = 3t, y = 2t,$$

где t - любое целое число.

В общем виде сформулируем наше наблюдение так.

Теорема 1. Если целые числа a и b взаимно просты, то все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению

$$ay = bx$$

находятся по формуле

$$x = at, y = bt,$$

где t - произвольное целое число.

Доказательство этой теоремы, разумеется, полностью повторяет доказательство леммы 1. Нужно только поменять обозначения:

x - на c

y - на b

и перевести теорему на геометрический язык:

"уравнение" = "прямая"

"пара целых чисел" = "целая точка".

Задача 5.2. а) Сколько целых точек лежит на отрезке, соединяющем точки (0,0) и (20,28) (включая его концы)?

Тот же вопрос про отрезок, соединяющий точки

б) (20, 0) и (0, 28);

в) (0, 0) и (-50, 70)?

г) (20, 20) и (-30, 90)?

д) (1, 7) и (25, 43)?

Задача 5.3. а) Нарисуйте прямую, задаваемую уравнением

$$20x = 28y$$

и напишите общую формулу, задающую все целые точки этой прямой. (Масштаб и размеры рисунка выбирайте так, чтобы несколько - хотя бы две-три точки решетки, лежащие на прямой, уместились на

рисунке. Напишите координаты этих точек).

То же задание для прямых

б) $20x + 28y = 0;$

в) $30y - 48x = 0;$

г) $5y + 8x = 40;$

д) $3x - 2y + 11 = 0$

Эту тему мы продолжим в § 7..

§ 6. Основная теорема арифметики

В § 4 мы показали, что всякое число можно разложить на простые множители. Теперь, пользуясь леммой 1, мы можем доказать больше.

Теорема 2. ("Основная теорема арифметики").

Каждое натуральное число разлагается на простые множители единственным образом.

Доказательство. Сначала докажем такую лемму.

Лемма 2. Если числа q, p_1, p_2, \dots, p_n - простые и произведение $p_1 p_2 p_3 \dots p_n$ делится на q , то одно из чисел p_i равно q .

Прежде всего заметим, что если простое число делится на простое число q , то $p = q$; в противном случае, если $p \neq q$, то p и q взаимно просты. (Это потому, что простое число, по определению, не имеет делителей, кроме самого себя и единицы).

Отсюда сразу следует утверждение леммы для $n=1$. Для $n=2$ оно вытекает прямо из леммы 1: если $p_1 p_2$ делится на q и $p_2 \neq q$, то p_1 делится на q (то есть $p_1 = q$).

Доказательство леммы для $n=3$ проведем так. Пусть $p_1 p_2 p_3$ делится на q . Если $p_3 = q$, то все доказано. Если $p_3 \neq q$, то согласно лемме 1 $p_1 p_2$ делится на q . Таким образом, случай $n=3$ мы свели к уже рассмотренному случаю $n=2$.

Точно так же по $n=3$ мы можем перейти к случаю $n=4$, затем - к $n=5$, и вообще, предполагая, что для $n=k$ утверждение леммы доказано, мы можем легко доказать его для $n=k+1$. Это убеждает нас, что лемма верна для всех n .

(Такой способ рассуждений называется доказательством по индукции).

Теперь докажем, наконец, теорему 2.

Предположим, что имеется два разложения числа a на простые множители:

$$a = p_1 p_2 p_3 \dots p_n = q_1 q_2 q_3 \dots q_k$$

Так как правая часть делится на q_1 , то и левая часть равенства должна делиться на q_1 . Согласно лемме 2, одно из чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ равно q_1 . Сократим обе части равенства на q_1 .

Проведем такое же рассуждение для q_2 , затем для q_3, \dots , для q_k . В конце концов справа сократятся все множители и останется 1. Естественно, и слева не останется ничего, кроме 1.

Отсюда мы заключаем, что два разложения $p_1 p_2 \dots p_n$ и $q_1 q_2 \dots q_k$ могут отличаться только порядком сомножителей.

Используя основную теорему арифметики, можно доказать такие предложения.

1°. Для того, чтобы число a делилось на число b , необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b , входил и в разложение числа a ; причем, если простой множитель входит в разложение b k раз, то в разложение числа a он должен входить не менее k раз.

2°. Пусть a и b разложены на простые множители. Тогда чтобы найти НОД(a, b) нужно перемножить все общие простые множители чисел a и b ; причем, если p входит в разложение b k раз, а в разложение a l раз и $k \leq l$, то в разложение НОД(a, b) множитель p должен входить k раз.

3°. Пусть c - какой-нибудь общий делитель чисел a и b , а $d = \text{НОД}(a, b)$, - наибольший общий делитель этих чисел. Тогда d обязательно делится на c .

4°. Пусть число a делится на b и c , причем b и c взаимно просты. Тогда a делится на произведение bc .

5°. Пусть число a делится на b и на c , и пусть $\text{НОД}(b, c) = d$. Тогда a делится на целое число $\frac{bc}{d}$.

§ 7. Прямые на решетке. Линейные уравнения.

В § 5 мы сформулируем теорему I про целые решения уравнения

$$ay - bx = 0 \quad (1)$$

В этом параграфе мы коснемся решения в целых числах уравнений

$$ay - bx = 1 \quad (2)$$

и вообще

$$ay - bx = c \quad (3)$$

где a , b и c - заданные целые числа. Начнем с примеров.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $28x + 20y = 22$. Левая часть при всех x и y делится на 4, а правая - нет. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $28y - 20x = 12$. Разделим обе части на 4. Получим: $7y - 5x = 3$. Теперь начертим несколько прямых, уравнения которых $7y - 5x = 0$, $7y - 5x = 1$, $7y - 5x = 2$, $7y - 5x = 3$, ..., $7y - 5x = 7$. Все эти прямые параллельны (рис. 9), нужная нам прямая - четвертая снизу. Заметим, что она проходит через целую точку (5, 4). А остальные целые точки на этой прямой расположены на равных расстояниях (точно так же, как на прямой $7y - 5x = 0$).

Отсюда ясно, что все решения нашего уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 4 + 5t \end{cases}, \text{ где } t - \text{любое целое число.}$$

Теперь сформулируем общую теорему.

Теорема 3. Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, c - произвольное целое число, то уравнение $ay - bx = c$ имеет бесконечное число решений (x, y) в целых числах. Если известно одно решение (x_0, y_0) , то все решения имеют вид

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad \text{где } t - \text{любое целое число.}$$

Доказательство. Начнем со второго утверждения. Пусть $ax - by = c$. Тогда уравнение $ax - by = c$ сводится к такому: $a(y - y_0) - b(x - x_0) = 0$, а по теореме I из § 5 получаем $x - x_0 = at$, $y - y_0 = bt$ (t - целое число).

Осталось доказать, что уравнение (3) имеет хотя бы одно решение в целых числах, если $\text{НОД}(a, b) = 1$. Достаточно доказать это для $c = 1$, то есть для уравнения (2). Действительно, если (x_0, y_0) - какое-нибудь решение уравнения (2), то (cx_0, cy_0) - решение уравнения (3).

Мы рассмотрим сразу целое семейство параллельных прямых (3) с разными значениями c . Большому c соответствует прямая, расположенная выше (подставьте в (3) $x = 0$, тогда получится $y = \frac{c}{b}$ - чем больше c , тем выше точка пересечения прямой с осью Oy).

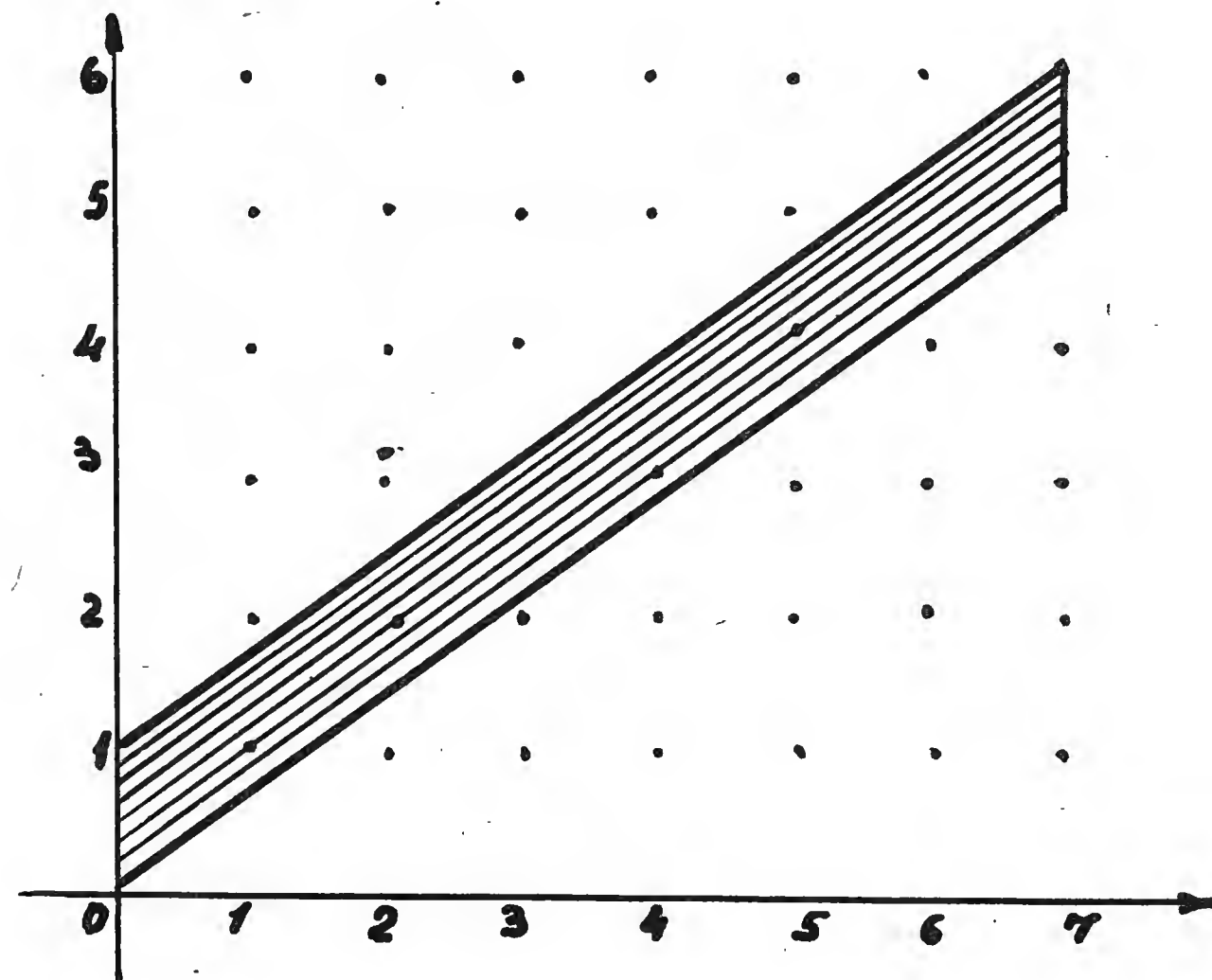


Рис. 9

Рассмотрим теперь все целые точки, лежащие внутри параллелограмма, изображенного на рис. 9 - с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(a, b+1)$, (a, b) . Внутри его, очевидно, лежат $(a-1)$ целых точек: на каждой вертикальной прямой $x = 1, x = 2, \dots, x = a-1$ по одной. Через каждую из этих целых точек проходит прямая, параллельная (1) с уравнением (3). Ни одна прямая не проходит через две из этих точек: ведь целые точки лежат на каждой прямой так, что от одной точки до следующей нужно пройти отрезок, равный стороне OM (так же, как на прямой (1)). Следовательно, все эти прямые соответствуют разным значениям " c ", и всего их $(a-1)$.

Но заметим, что верхняя сторона параллелограмма идет по прямой, для которой $c = a$; достаточно подставить в уравнение (3) $x = 0, y = 1$, чтобы убедиться в этом. Следовательно, каждому целому числу $c = 1, c = 2, \dots, c = a-1$ должна обязательно отвечать прямая, проходящая через целую точку (сравните с рассуждением при решении задачи 2.10). В частности, и на прямой $ay - bx = 1$ должна лежать целая точка.

Задача 7.1. а) Начертите прямую $3y - 5x = 1$, через какую целую точку она проходит? Как записать все множество решений этого уравнения в целых числах?

Тот же вопрос для прямых:

б) $3y + 8x = 2$;

в) $-42y + 54x = -18$.

Задача 7.2.* Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1, a > 0$. Рассмотрим семейство всевозможных прямых $ay - bx = c$, где c - целое число.

а) На каком расстоянии лежат друг от друга "целые точки" на каждой прямой?

б) Сколько прямых пересекает отрезок оси Oy от точки $(0, 0)$ до точки $(0, 1)$ (не считая его концов)?

в) Докажите, что соседние прямые расположены на одном и том же расстоянии друг от друга;

г) Найдите расстояние между соседними прямыми ("ширину просеки" между рядами деревьев в направлении $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$).

Указание к задаче в). На каждой прямой $ay - bx = c$ есть целая точка (x, y) . Перенесем плоскость параллельно так, чтобы O перешла в (x, y) . Докажите, что тогда прямая $ay - bx = 1$

перейдет в $ay - bx = c + 1$ (а $ay - bx = 0$ в $ay - bx = c$).

Задача 7.3. а) Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

б) Нарисуйте на числовой оси красным карандашом целые числа, которые при делении на 4 дают в остатке 1, синим — числа, которые при делении на 6 дают в остатке 3. Как записать множество чисел, удовлетворяющих обоим этим условиям?

в) Найдите общую формулу для чисел, которые при делении на 15 дают остаток 7, а при делении на 25 — остаток 11.

Указание к задаче в). Напишите общую формулу для решений уравнения $15x + 7 = 25y + 11$ в целых числах.

Задача 7.4. Двум мастерам приказали просверлить в рейке длиной 3 метра отверстия на равных расстояниях друг от друга и от концов рейки: одному мастеру — на расстоянии 20 см, другому — 12 см.

а) Сколько всего отверстий будет сделано в рейке?

б) Каково будет наименьшее расстояние между отверстиями?

Задача 7.5. а) Отметим на числовой оси точки, дающие при делении на 12 остаток 5, красным карандашом, а точки, дающие при делении на 18 остаток 13 — синим. Каково будет наименьшее расстояние между красной и синей точкой?

б) Тот же вопрос для двух множеств: чисел, дающих при делении на a_1 остаток r_1 , и чисел, дающих при делении на a_2 остаток r_2 .

Задача 7.6. Имеет ли следующее уравнение решение в целых числах:

а) $6x - 16y = 220$;

б) $105x + 42y = 56$;

в) $-104x + 65y = 243$;

г) $-35x + 204y = 17$?

Если имеют, то укажите хотя бы одно такое решение. Если нет — докажите, что их не существует.

Задача 7.7. Имеются контейнеры весом 130 кг и 160 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Как это можно сделать (укажите все решения)?

Если Вам трудно отыскать решение уравнения в целых числах, хотя Вы уверены, что они существуют (это следует из теоремы 3) — то не обязательно "подбирать" решение или чертить на очень большом листе клетчатой бумаги прямую. Для этого есть более удобные способы, например, алгоритм Евклида. Его мы и изучим в следующем параграфе.

§ 8. Алгоритм Евклида

Слово "алгоритм" (иногда пишут "алгоритм" — это то же самое) означает "общий метод, применимый к целому классу задач". Обычно в математике подразумевается, что этот метод можно сформулировать в виде совершенно точного описания — настолько точно и определенно, что любой человек, умеющий только читать и считать, может его выполнить (для любой конкретной задачи, то есть для любых заданных ему значений параметров).¹⁾ Например, вы умеете с помощью циркуля и линейки делить угол на две равные части — то есть, знаете алгоритм, позволяющий любой угол разделить пополам. Вы знаете алгоритм, позволяющий любое натуральное число a , записанное в десятичной системе, разделить на другое натуральное число b с остатком — правило "деления столбиком".

Алгоритм Евклида — это правило, которое позволяет по двум натуральным числам: a и b найти НОД (a, b). В принципе, для этого можно предложить такой алгоритм

1) Найти все делители числа a (перепробовав все числа: 1, 2, ..., не превосходящие a);

2) Найти все общие делители чисел a и b (проверив, на какие из делителей a делится b);

3) Выбрать из общих делителей наибольший.

Или другой алгоритм: разложить оба числа на простые множители и воспользоваться следствием из теоремы 2, § 5. Однако, если разложения на простые множители ни одного из данных чисел

1) Понятие алгоритма тесно связано с понятием программы для вычислительной машины. Чтобы точно определить понятие "алгоритма", нередко описывают воображаемую "машину" и класс допустимых "программ" для этой машины.

не известны, а числа большие, требуется много вычислений.

Алгоритм Евклида позволяет найти НОД (a, b) в этих случаях значительно быстрее, не отыскивая всех делителей ни у одного из чисел a и b .

Что еще важнее - алгоритм Евклида дает нам путь к отысканию решений уравнения $ax + by = c$ в целых числах. Заодно, мы еще раз докажем теорему 3.

Лемма 3. Пусть $a = bq + r$, тогда $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

Покажем, что у пары чисел (a, b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b, r) . Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r , и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a .

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на m . Тогда bq делится на m и $a = bq + r$ делится на m .

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на k , то bq делится на k и $a = bq + r$ делится на k .

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. Найти НОД (6069, 663).

Решение. Разделим 6069 на 663 с остатком

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102.$$

Из леммы следует, что $\text{НОД}(6069, 663) = \text{НОД}(663, 102)$.

Ищем НОД (663, 102). Для этого делим 663 на 102:

$$663 = 102 \cdot 6 + 51.$$

Снова, применив лемму, получаем $\text{НОД}(663, 102) = \text{НОД}(102, 51)$.

Но 102 делится на 51 без остатка:

$$102 = 51 \cdot 2,$$

поэтому $\text{НОД}(102, 51) = 51$, следовательно,

$$51 = \text{НОД}(102, 51) = \text{НОД}(663, 102) = \text{НОД}(6069, 663).$$

Ответ: $\text{НОД}(6069, 663) = 51$.

Метод отыскания наибольшего общего делителя, основанный

на последовательном применении леммы 3, носит специальное название - алгоритм Евклида.

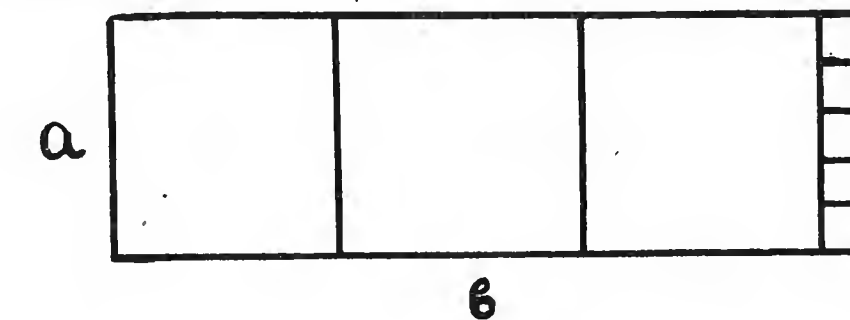
Задача 8.1. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 987654321 и 123456789;

б) 16484 и 42282;

в) 7 777 777 777 и 777 777.

Задача 8.2. а) От прямоугольника 324 см х 141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого одна сторона меньше 141 см. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис. 8). На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите их размеры и количество).



б) Каковы будут размеры самого последнего, наименьшего квадрата, если такие операции проделать с прямоугольником $a \times b$ (a и b - натуральные числа)?

Алгоритм Евклида в общем случае можно описать так. Если у вас имеется два числа a и b , причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b , и получаем остаток r_1 , который меньше, чем b . Затем делим число b на r_1 , и находим остаток r_2 , который меньше, чем r_1 . Далее, мы делим число r_1 на число r_2 , при этом получаем остаток r_3 , меньший, чем r_2 , и так далее, пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, без остатка (т.е. $r_{n+1} = 0$).

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а все остатки - неотрицательные числа. Последний остаток и есть НОД (a, b) . Действительно,

$$\begin{aligned} r_n &= \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \\ &= \text{НОД}(r_2, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(a, b). \end{aligned}$$

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 8.2. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида – алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис. 9).

На отрезке a откладываем столько раз, сколько это возможно, отрезок b , получаем остаток r_1 ; на отрезке b откладываем, пока это возможно, r_1 , получаем остаток r_2 ; на r_1 откладываем, пока возможно, r_2 , получаем r_3 , и т.д.

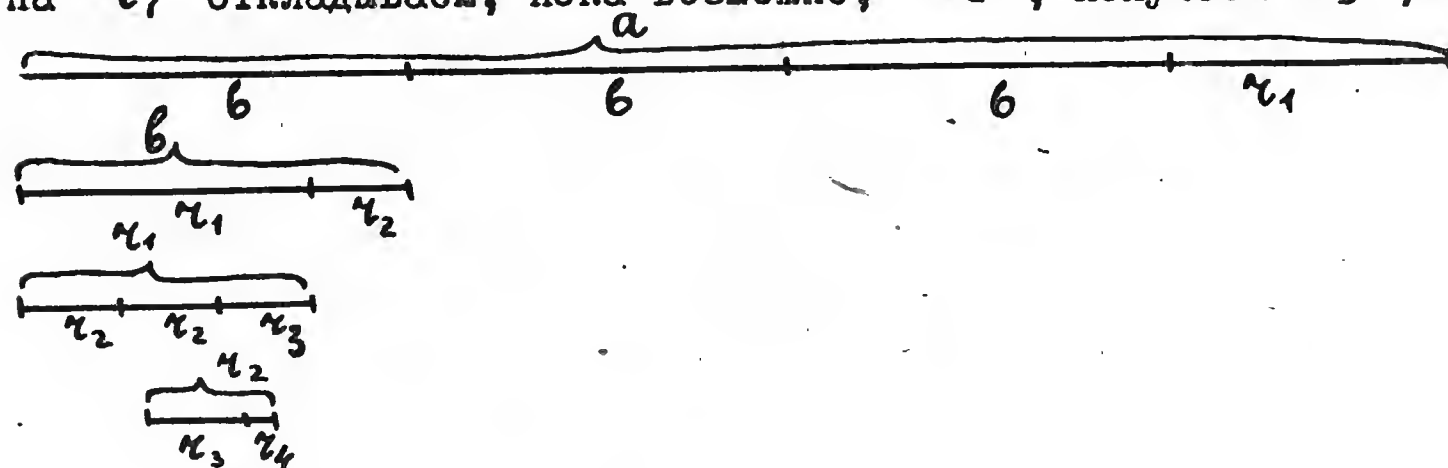


Рис. 9.

Правда, для отрезков (длины которых не целые числа) может случиться, что этот процесс никогда не кончится, а будет продолжаться бесконечно (никогда не получится остаток, равный нулю) – это произойдет в том случае, когда отрезки a и b несоизмеримы (вы вероятно знаете, например, что диагональ квадрата и его сторона несоизмеримы). Но если этот процесс кончится, то последний не равный нулю остаток даст наибольшую общую меру отрезков a и b – то есть наибольший отрезок d такой, что $a = kd$, $b = ld$, где k и l – целые числа. Это доказывается точно так же, как мы выше с помощью леммы I доказали, что алгоритм Евклида, примененный к целым числам, дает НОД(a, b): а именно, у каждой пары отрезков (a, b) , (b, r_1) , (r_1, r_2) , (r_2, r_3) , ... , наибольшая общая мера будет одна и та же, а если r_n целое число раз укладывается в r_{n-1} , то ясно, что их наибольшая общая мера – как раз r_n .

Задача 8.3.⁰ Докажите, что для любых двух целых чисел a и b

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a - b)$$

Указание. Проведите такое же рассуждение, как и в доказательстве леммы 3.

Покажем теперь, как алгоритм Евклида позволяет найти решение уравнения в целых числах. Пусть, например, нужно решить уравнение

$$6069x + 663y = 306 \quad (1)$$

Выше мы нашли НОД $(6069, 663) = 51$ из цепочки равенств:

$$6069 = 663 \cdot 9 + 102,$$

$$663 = 102 \cdot 6 + 51,$$

$$102 = 51 \cdot 2.$$

Заметим, что 306 делится на 51: $306 = 51 \cdot 6$, поэтому целые решения уравнения существуют.

Теперь будем последовательно представлять остатки в виде $6069x_n + 663y_n$, где x_n и y_n – какие-то целые числа.

$$102 = 6069 - 663 \cdot 9$$

$$51 = 663 - 102 \cdot 6 = 663 - (6069 - 663 \cdot 9) \cdot 6 = 6069 \cdot (-6) + 663 \cdot 55.$$

Вспомним, что $306 = 51 \cdot 6$, умножим обе части на 6.

$$306 = 6069 \cdot (-36) + 663 \cdot 330.$$

Итак, $x_0 = -36$, $y_0 = 330$ – решение нашего уравнения (1).

Найдя НОД $(6069, 663) = 51$, мы могли все члены (1) разделить на 51 и сразу перейти к уравнению

$$119x + 13y = 6 \quad (2)$$

Решение $x_0 = -36$, $y_0 = 330$ годится и для него. А остальные целые точки (x, y) на прямой (2) сдвинуты относительно (x_0, y_0) так же, как прямой $119x + 13y = 0$ сдвинуты относительно 0. И общее решение будет: $x = -36 + 13t$, $y = 330 - 119t$, где t – любое целое число. Например, при $t = 3$ получаем решение: $x = 9$, $y = 8$.

Тот же способ применим и в общем случае.

Если нужно решить уравнение

$$ay - bx = c$$

(можно считать, что $b > 0$). Отыскиваем с помощью алгоритма Евклида НОД(a, b):

$$\begin{aligned} a &= b q_1 + r_1 \\ b &= r_1 q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 \\ &\dots \\ r_{n-1} &= r_{n-2} q_n + r_n \\ r_n &= r_{n-1} q_{n+1} = d \end{aligned}$$

и пишем цепочку равенств, из которой находим представление d в виде $ay_0 - bx_0$, где y_0 и x_0 - целые числа.

Если c делится на $d = \text{НОД}(a, b)$ и $c = cd$, то числа $(c, x_0; c, y_0)$ будут давать решение уравнения

$$ay - bx = c$$

А общее решение, как следует из теоремы 3 § 7 -

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt,$$

где a и b находятся из равенств $a = a_1 d$, $b = b_1 d$.

Задача 8.4. Найдите решение в целых числах уравнений:

а) $75y - 39x = 1$;

б) $43x + 250y = 77$;

в) $11715y - 4473x = 6390$.

Начертите (примерно) прямые, с такими уравнениями на плоскости Oxy и укажите на них несколько целых точек. Выберите подходящий масштаб. (Всю "сетку" целых точек рисовать не нужно).

В последнем примере в) нужно сделать довольно много "шагов" алгоритма Евклида - делений с остатком - прежде чем найдешь НОД (117, 4473) и решение уравнения.* Интересно выяснить: какое наибольшее число шагов нужно, чтобы наверняка найти НОД, если числа a и b , скажем, не превосходят 50, или 100, или 1000?

ж) После деления на НОД числа становятся не такими уж большими - в пределах сотни.

Сначала поставим вопрос по-другому. Пусть задано n - число шагов в алгоритме Евклида. Каковы наименьшие a и b , такие, что пара (a, b) требует n шагов?

Задача 8.5. а) Пусть $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > 0$.

$$a = q_1 b + r_1 \quad (1)$$

$$b = q_2 r_1 + r_2 \quad (2)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \quad (3)$$

$$r_2 = q_4 r_3 + r_4 \quad (4)$$

$$r_3 = q_5 r_4 \quad (5)$$

Докажите, что $a \geq 13$.

б) Пусть "алгоритм Евклида" продолжается не 5 шагов, а n ; докажите, что тогда a не меньше n -го члена последовательности

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, \quad (\Phi)$$

в которой каждый член равен сумме двух предыдущих. (Эта последовательность довольно часто встречается в разных задачах и носит специальное название "последовательность Фибоначчи").

Указание к задаче 8.5. а) Докажите последовательность неравенств: $r_4 \geq 1; r_3 \geq 2; r_2 \geq 3; r_1 \geq 5; b \geq 8; a \geq 13$.

Решив задачу 8.5 а) легко ответить на вопрос: за сколько шагов алгоритм Евклида справится с любыми числами, меньшими 100? Поскольку десятый член последовательности Фибоначчи больше 100;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

то, значит, десять шагов алгоритм Евклида для чисел $b < a \leq 100$ продолжаться не может. А числа 89 и 55 - пример такой пары, для которой он продолжается наибольшее возможное число - девять шагов.

Задача 8.6. а) Докажите, что

$$\text{НОД}(2^6 - 1, 2^{15} - 1) = 7.$$

б) Докажите, что

$$\text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\text{НОД}(m, n)} - 1$$

для любых натуральных m и n .

Указание. Не забудьте правила действий со степенями: если $m > n$, то $2^m = 2^{m-n} \cdot 2^n$. Воспользуйтесь тем, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b-a)$ (задача 4.3).

Задача 8.7.* а) Докажите, что число $2^{16} + 1$ взаимно просто с каждым из чисел

$$3 = 2 + 1; 5 = 2^2 + 1; 17 = 2^4 + 1; 129 = 2^8 + 1.$$

б) Докажите, что в последовательности

$$2 + 1; 2^2 + 1; 2^4 + 1; 2^8 + 1; \dots; 2^{2^n} + 1$$

любые два числа взаимно просты.

Указание. Проверьте равенство

$$2^{16} - 1 = (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1).$$

Задача 8.8.* Докажите, что множество простых чисел бесконечно, воспользовавшись предыдущей задачей.

Указание. Рассмотрите простые числа, входящие в разложение на множители чисел последовательности

$$2 + 1; 2^2 + 1; 2^4 + 1; 2^8 + 1; \dots; 2^{2^n} + 1$$

Контрольное задание

Обязательные задачи

- | | |
|-------------------------------|------------|
| I) 1.4б | II) 5.2а,б |
| 2) 1.6 | 12) 5.2в,г |
| 3) 1.8 | 13) 5.3б,в |
| 4) 1.9д | 14) 7.1а |
| 5) 2.2а,б | 15) 7.3а |
| 6) 2.4б | 16) 7.3б |
| 7) 2.7 | 17) 7.4а |
| 8) 2.11в | 18) 8.1б |
| 9) 3.1а,б (Указание: см. 3.2) | 19) 8.2а |
| 10) 4.6а | 20) 8.3 |

21) 8.4а

Дополнительные задачи

1.7, 2.5, 2.8, 2.10б, 3.2, 4.3, 7.2а, 7.2г, 7.7, 8.4б, 8.6б, 8.7б.

Критерии оценок

За обязательные задачи: "5" - решено не менее 18 задач;
"4" - решено не менее 14 задач;
"3" - решено не менее 10 задач.

За дополнительные задачи:

"5" - решено не менее 8 задач;
"4" - решено не менее 5 задач.

Задание подготовили: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер.

Методическая комиссия ВЗМШ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ: "ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА".

1.46. Докажите, что если ab делится на c и $a+b$ делится на c , то a^3+b^3 делится на c^2 .

Решение: $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$. Так как по условию $a+b$ делится на c и ab делится на c , то $ab(a+b)$ делится на c^2 (по теореме 2°); аналогично $(a+b)^3$ делится на c^2 . Тогда (по теореме 1°) $(a+b)^3 - 3ab(a+b)$ делится на c^2 .

1.6. Докажите, что a^2b+b^2a делится на a^2b+b^2a .

Решение: Воспользуемся тождествами

$$a^2b+b^2a = ab(a^2+b^2)$$

$$a^2+b^2 = (a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$$

и утверждением 2°. Таким образом $a^2b+b^2a = ab(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$ делится на $ab(a+b) = a^2b+b^2a$.

Мы использовали тождество $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1})$

(n — нечетное) для 3, 5, 7, ... Приведем доказательство этого тождества.

Рассмотрим последовательность

$$a^{n-1}, -a^{n-2}b, a^{n-3}b^2, -a^{n-4}b^3, \dots, b^{n-1}$$

Заметим, что это геометрическая прогрессия с первым членом a^{n-1} и знаменателем $(-\frac{b}{a})$. Найдем сумму n членов этой прогрессии

$$a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1} = \frac{a^{n-1} + \frac{b^n}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a^n + b^n}{a+b}$$

1.7. Докажите, что a^4+4b^4 делится на $a^2+2ab+2b^2$.

Решение: $a^4+4b^4 = a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$;

следовательно, a^4+4b^4 делится на $a^2+2ab+2b^2$.

1.8. Докажите, что если $ab+cd$ делится на $a+c$, то $ad+bc$ делится на $a+c$ (здесь $a+c \neq 0$).

Указание. Разложите сумму $ab+cd+ad+bc$ на множители.

Решение: В соответствии с указанием разложим на множители

$$(ab+cd) + (ad+bc) - (b+d)(a+c).$$

Так как $ad+bc$ равно разности 2-х чисел, делящихся на $a+c$, то, согласно утверждению I^0 , оно само делится на $a+c$.

1.9д. Верно ли утверждение: если число делится на 15 или 21, то оно делится на $15 \cdot 21 = 315$?

Ответ: Это утверждение неверно. Приведем противоречащий пример: 105 делится на 15 и на 21, но не делится на 315.

Обратите внимание, числа 15 и 21 не взаимно-простые, они делятся на 3.

2.3а,б. а) Нарисуйте числовую ось и отметьте на ней целые числа, которые при делении на 7 дают в остатке 3.

Решение:



Получаем множество точек, отстоящих друг от друга на 7 единиц.

б) Каково наибольшее из чисел, меньших 2001, которое при делении на 11 дает остаток 8?

Ответ: 1999.

Решение: Разделим 2001 на 11 с остатком: $2001 = 11 \cdot 181 + 10$. Остаток равен 10, что на 2 больше заданного остатка. Следовательно, искомое число $2001 - 2 \cdot 11 \cdot 181 + 8$.

2.5б. Найдите наименьшее нестигмачное число, которое делится на 321.

Ответ: 100152.

Решение: Наименьшее нестигмачное число 100000. Разделим это число на 321. $100000 = 321 \cdot 311 + 169$. Остаток равен 169. Значит, чтобы получить искомое число, надо к 100000 прибавить $321 - 169 = 152$; искомое число 100152.

2.6. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков

и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1973 куска?

Указание. Как возрастает число кусков, когда один разрезают на 7?

Ответ: Нет, не могли.

Решение: При каждом разрезе число кусков увеличивается на 6. После K разрезов число кусков равно $6K + 7 = 6(K+1) + 1$, т.е. окончательное число кусков при делении на 6 должно дать остаток 1. Но 1973 при делении на 6 дает остаток 5. Значит, нельзя получить 1973 куска.

2.8а,г. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число

а) $2n^2 + 5n - 3$ при делении на $n+4$?

Ответ: при $n > 5$ остаток равен 9

при $n = 5$ - " - 0

при $n = 4$ - " - 1

при $n = 3$ - " - 2

при $n = 2$ - " - 3

при $n = 1$ - " - 4

Решение: Разделим многочлен $2n^2 + 5n - 3$ на $n+4$ с остатком. Получим: $2n^2 + 5n - 3 = (n+4)(2n-3) + 9$.

Отсюда видно, что если $n+4 > 9$ ($n > 5$), то остаток равен 9.

Если $n+4 = 9$ ($n = 5$), то остаток равен 0. Если $n+4 = 8$ ($n = 4$),

то, т.к. $9 = 8 \cdot 1 + 1$, остаток равен 1; если $n+4 = 7$ ($n = 3$),

то $9 = 7 \cdot 1 + 2$ и остаток - 2; если $n+4 = 6$ ($n = 2$), то $9 = 6 \cdot 1 + 3$

и остаток - 3; если $n+4 = 5$, ($n = 1$) то, $9 = 5 \cdot 1 + 4$ и остаток

- 4.

Замечание. Рекомендуем показать учащимся на примерах, как делить многочлен на многочлен столбиком. Например:

$$\begin{array}{r} 2n^2 + 5n - 3 \quad | \quad n+4 \\ - 2n^2 + 8n \quad | \quad 2n-3 \\ \hline -3n - 3 \\ - 3n - 12 \\ \hline +9 \end{array}$$

г). $n^2 + 1$ при делении на 4

Ответ: при $n = 2k$ остаток равен 1;

при $n = 2k+1$ - " - 2.

Решение: Рассмотрим 2 случая.

1) $n = 2k$, тогда $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$. Отсюда видно, что при четном n остаток равен 1.

2) $n = 2k+1$, тогда $n^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2$. При нечетном n остаток равен 2.

2.9. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связать по 4, по 5 или по 6 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Какое самое меньшее число книг может быть на столе?

Указание. Чтобы число делилось на 4, на 5 и на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 60. Это один из тех "очевидных" фактов, которые мы научимся строго доказывать ниже.

Ответ: 301 книга.

Решение: Пусть n - число книг. Тогда $n-1$ должно делиться на 4, 5, 6, следовательно $n-1 = 60k$ (см. указание) $n = 60k + 1 = 56k + 4k + 1$. Первое слагаемое делится на 7 при любом k , а наименьшее значение k , при котором $4k+1$ делится на 7 - 5. Следовательно, искомое число $60 \cdot 5 + 1 = 301$.

2.106. Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, у которых разность любых 2-х делится на 7? А 16 таких чисел?

Ответ: для 15 чисел утверждение верно, а для 16 - неверно.

Решение: При делении чисел на 7 существует 7 возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Чтобы разность 2-х чисел делилась на 7, необходимо и достаточно, чтобы остатки от деления этих чисел на 7 были равны.

Все числа, дающие один и тот же остаток при делении на 7, отнесем к одному классу. Получим 7 классов. Допустим, что нельзя выбрать 15 нужных чисел из 100. Это значит, что если 100 целых чисел разбить на указанные классы, то в каждый попадает не более 14 чисел, что

во всех классах будет не более $14 \cdot 7 = 98$ чисел, что противоречит условию задачи. Следовательно, для 15 утверждение задачи верно.

Для 16 чисел утверждение задачи неверно. Возьмем все целые числа от 1 до 100 и покажем, что среди них нет 16 чисел, дающих один и тот же остаток при делении на 7. В самом деле, среди них 14 чисел: 7, 14, ..., 98, дающих в остатке 1; 15 чисел: 2, 9, 16, ..., 100, дающих в остатке 2; по 14 чисел, дающих остаток 3, 4, 5, 6.

3.1a, б. Приведите пример числа, имеющего: а) ровно 5 делителей б) ровно 6 делителей.

Ответ: а) число 16. $\Delta = 1, 2, 4, 8, 16$

б) число 32. $\Delta = 1, 2, 4, 8, 16, 32$

Замечание: Рекомендуем разобрать решение задачи 5.1 (стр. 15).

[Ответы: б) $(m+1)$ в) $(m+1)(n+1)$ г) $(1+e)(1+m)(1+n)$]

и указать учащимся, что есть общая формула числа делителей числа a . Пусть число разложено на простые множители: $a = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_r^{q_r}$.

Тогда число делителей равно $(q_1+1)(q_2+1) \dots (q_r+1)$.

Поэтому а) $5 = 1 \cdot 5$ и искомое число будет иметь вид p^4 .

б) Разложим 6 на множители: $6 = 2 \cdot 3$ или $6 = 1 \cdot 6$. Следовательно, искомое число будет иметь вид $p_1 \cdot p_2^2$ либо p^5 .

3.2. Докажите, что если число не является полным квадратом, то у него четное количество делителей, а если является квадратом - то нечетное.

Решение: Рассмотрим множество делителей числа a , меньших \sqrt{a} , и множество его делителей, больших \sqrt{a} . Между этими множествами можно установить взаимно-однозначное соответствие, поставив каждому делителю в соответствие его дополнительный делитель (если $b < \sqrt{a}$, то $\frac{a}{b} > \sqrt{a}$). Следовательно, если \sqrt{a} - не целое число, то число делителей четно.

Если \sqrt{a} - целое число (a - полный квадрат), то число делителей нечетно.

Второе решение. Пусть $a = p_1^{z_1} p_2^{z_2} \dots p_k^{z_k}$ - разложение числа a на

простые множители. Тогда, как показано при решении задачи № 8, число N множителей числа a равно: $N = (z_1 + 1) \dots (z_k + 1)$. Число a является полным квадратом тогда и только тогда, когда каждый из показателей z_1, \dots, z_k является четным числом. Но тогда все числа $(z_1 + 1), \dots, (z_k + 1)$ и их произведение N являются нечетными числами. Если же по крайней мере одно из чисел z_1, \dots, z_k , например, z_i нечетно, то число $(z_i + 1)$, а вместе с ним и число N являются четными числами.

4.1а. Докажите, что если четырехзначное число p не делится ни на одно простое число от 2 до 97, то p простое.

Решение. Допустим, что число p непростое. Тогда оно разлагается в произведение $p = q^2$ двух множителей, q и z , каждый из которых не меньше числа 101 — первого простого числа, большего 97. Следовательно $p \geq 101^2$. Но число 101^2 пятизначное. Пришли к противоречию. Значит, число p простое.

4.1б. Докажите, что каждое составное число a имеет такой простой делитель, что $p^2 \leq a$.

Решение: $a = p_1 p_2 \dots p_n$, где p_i — простое число, причем $n \geq 2$ (т.к. a — число составное), тогда $1 < p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ и $a = p_1 p_2 \dots p_n \geq p_1^n \geq p_1^2$, что и требовалось доказать.

4.4. Докажите, что кроме p_1, \dots, p_m существует и другие простые числа.

Решение: Рассмотрим $N = p_1 p_2 \dots p_m + 1$; N не делится ни на одно из p_i , где $1 \leq i \leq m$ значит либо N — простое, либо N делится на простое число $q + p_i$.

5.3. Верно ли, что если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = d$, то и $\text{НОД}(a, c) = d$.

Ответ: Нет, например, $\text{НОД}(40, 12) = \text{НОД}(12, 20) = 4$, но $\text{НОД}(40, 20) = 20$.

Замечание. Из условия задачи следует, что и a , и c делится на d , т.е. $a = dk, c = dm$. В случае, когда k и m взаимно-просты, утверждение верно.

6.4а, б. а) Найдите наименьшее число, которое делится на 36, 57, 95.

Ответ: 3420.

Решение: Нам нужно найти НОК (36, 57, 95). Разложим данные числа на простые множители: $36 = 2^2 \cdot 3^2$, $57 = 3 \cdot 19$, $95 = 5 \cdot 19$.

Каждый простой множитель p^2 , входящий в разложение какого-нибудь из чисел a , b и c , должен входить в разложение НОК (a, b, c). Следовательно, $\text{НОК}(36, 57, 95) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot 5 = 3420$.

б) Найдите наибольшее число, на которое делятся числа 576, 180, 9060.

Ответ: 12.

Решение: Разложим данные числа на простые множители: $576 = 2^6 \cdot 3^2$; $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $9060 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 151$. По утверждению 2.0 НОД (576, 180, 9060) равен $2^2 \cdot 3 = 12$.

6.7б. Сколько существует чисел, меньших числа a и взаимно простых с ним, если $a = 2^6 \cdot 3^5$.

Ответ: $2^6 \cdot 3^4$.

Решение: Обозначим через N данное число, N_2 — число чисел, меньших N и делящихся на 2; N_3 — число чисел, меньших N и делящихся на 3; N_6 — число чисел, меньших N и делящихся на 6.

$$N_2 = \frac{N}{2}; N_3 = \frac{N}{3}; N_6 = \frac{N}{6}.$$

Числа, взаимно простые с $2^6 \cdot 3^5$, не должны делиться ни на 2, ни на 3. Число таких чисел $N = N - N_2 - N_3 + N_6 = N - \frac{N}{2} - \frac{N}{3} + \frac{N}{6} = N(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}) = N(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 2^6 \cdot 3^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2^6 \cdot 3^4$.

Каждому натуральному числу n можно сопоставить число чисел, не

превосходящих n и взаимно-простых с ним. Количество этих чисел обозначим через $f(n)$. Это соответствие f называется функцией Эйлера.

Перечислим некоторые свойства функции Эйлера:

- 1) $f(n) < n$.
- 2) Если $n = p$ — простое число, то $f(p) = p - 1$.
- 3) Для $n > 2$ число $f(n)$ четно.
- 4) Если $n = p^a$ — степень простого числа p , то $f(p^a) = p^a - p^{a-1} = p^a(1 - 1/p)$.
- 5) Если числа m и n взаимно-просты, то $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$.
- 6) Общая формула для $f(n)$ такова:

$$f(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_r})$$

Здесь p_1, p_2, \dots, p_r — все простые числа, на которые делится n . Эта формула доказана в статье "Малая теорема Ферма", "Квант" 1972, № 10).

7.26. Сколько целых точек лежит на отрезке, соединяющем точки $(20; 0)$ и $(0; 28)$?

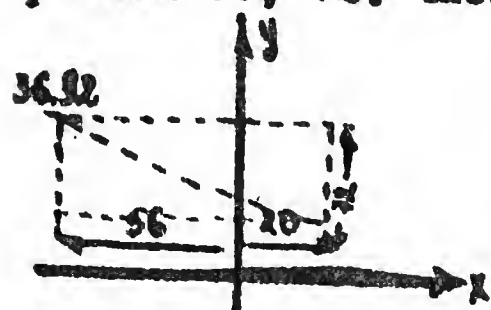
Ответ: 5 целых точек.

Решение: Отрезок, соединяющий точки $(20; 0)$ и $(0; 28)$ — диагональ прямоугольника со сторонами 20 и 28. Как было показано в задаче 7.1, число целых точек равно $\text{НОД}(20; 28) + 1 = 5$.

7.2.в.г. в) тот же вопрос про отрезок, соединяющий точки $(0, 0)$ и $(-56, 72)$.

Ответ: 9 целых точек.

Решение: Рассматриваемый отрезок — диагональ прямоугольника со сторонами 56, 72. Число целых точек равно $\text{НОД}(56, 72) + 1 = 8 + 1 = 9$.



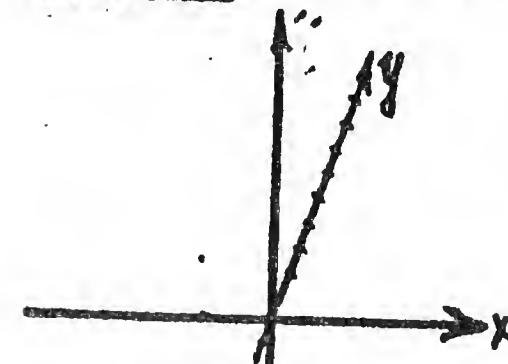
г) тот же вопрос про отрезок, соединяющий $(20, 20)$ и $(-36, 92)$.

Ответ: 9 целых точек.

7.36.в. б) Нарисуйте прямую, задаваемую уравнением $20x + 28y = 0$ и запишите общую формулу, задающую все целые точки этой прямой.

Ответ: $\begin{cases} x = -7t \\ y = 5t \end{cases}$, где t — любое целое число.

Решение: уравнение данной прямой можно представить в виде

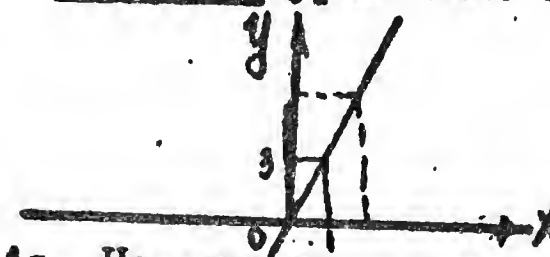


$5x = -7y$. Так как $\text{НОД}(5; -7) = 1$, то по теореме 1, все целочисленные точки задаются уравнениями $x = -7t$, $y = 5t$, где t — любое целое число.

в) То же задание для прямой $252x = 84y$.

Ответ: $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \end{cases}$, где t — любое целое число

Решение: уравнение прямой $252x = 84y$ можно представить в виде

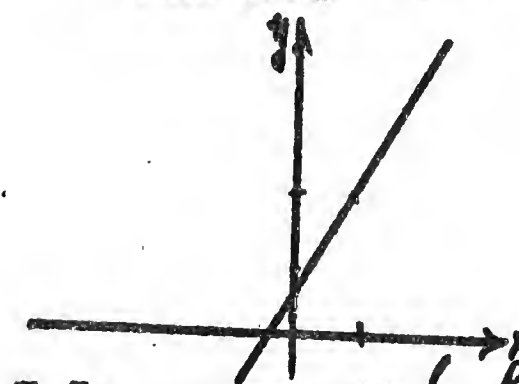


$3x - y = 0$. Так как $\text{НОД}(3, 1) = 1$, то $x = t, y = 3t$ где t — любое целое число.

7.4а. Начертите прямую $3y - 5x = 1$. Через какую целую точку она проходит? Как записать все множество решений этого уравнения в целых числах?

Ответ: $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$, где t — любое целое число.

Решение: Прямая $3y - 5x = 1$ проходит через точку



$x_0 = 1, y_0 = 2$. По теореме 3, все целочисленные точки найдутся по формуле $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$,

где t — любое целое число.

7.5а. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1, a > 1$. Рассмотрим семейство всевозможных прямых $ay - bx = c$, где c — целое число.

а) На каком расстоянии лежат друг от друга "целые точки" на какой прямой?

Ответ: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Решение: Пусть $A(x_0, y_0)$ — какая-то целая точка на прямой $ay - bx = c$. Тогда, по теореме 3, все целые точки имеют координаты

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt \end{cases}$$

где t - любое целое.

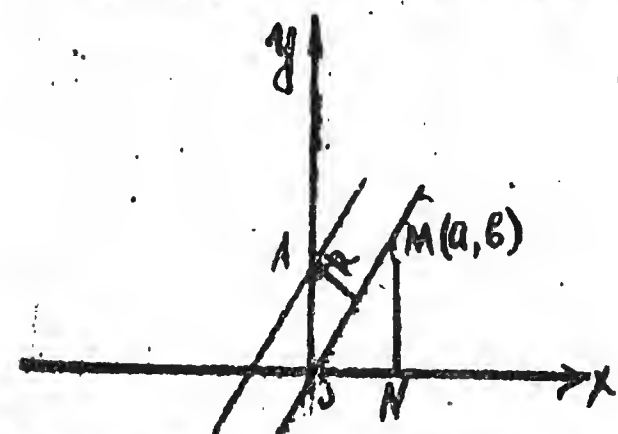
Ближайшая к A целая точка $B(x_0 + a; y_0 + b)$. Расстояние между этими точками

$$|AB| = \sqrt{(x_0 + a - x_0)^2 + (y_0 + b - y_0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

7.5г. Найдите расстояние между соседними прямыми ("ширину просеки" между рядами деревьев в направлении $y = \frac{b}{a}x$).

Ответ: $\rho = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Решение: Рассмотрим соседние прямые l_0 и l_1 , задаваемые уравнениями $ay - bx = 0$ и $ay - bx = 1$.



Точка пересечения прямой l_1 с осью ординат $A(0; \frac{1}{b})$. Пусть $M(a, b)$ - первая целая точка, N - ее проекция на ось абсцисс. $\triangle AKO \sim \triangle OMN$.

Следовательно, нужно расстояние $|AK| = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Расстояние между соседними прямыми $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

7.6а. Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

Ответ: нет, не может.

Решение: Если a делится на 8, то $a = 8x$. Если при делении на 12 дает остаток 10, то $a = 12y + 10$. Задача сводится к решению в целых числах уравнения $8x = 12y + 10$ или $8x - 12y = 10$.

Так как 10 не делится на НОД $(8, 12) = 4$, то уравнение решений в целых числах не имеет, т.е. нет числа, удовлетворяющего условию задачи.

7.6б. Нарисуйте на числовой оси красным карандашом целые числа, которые при делении на 6 дают в остатке 3. Записать множество чисел, удовлетворяющих обоим этим уравнениям.

Ответ: $12t + 3$ где t - любое целое число.

Решение: Число, отвечающее первому условию, $4x + 1$.

второму $-6y + 3$. Число, отвечающее обоим условиям, определяется уравнением



$4x + 1 = 6y + 3$, где x и y - целые.

Уравнение приводится к виду $2x - 3y = 1$.

Решения этого уравнения: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$.

Тогда искомое число определяется по формуле $a = 12t - 3$, где t - любое целое число.

7.7а. Двум мастерам приказали просверлить в рейке длиной 3 метра отверстия на равных расстояниях друг от друга и от концов рейки: одному мастеру - на расстоянии 20 см, а другому - 12 см.

а) сколько всего отверстий будет сделано в рейке?

Ответ: 34 отверстия.

Решение: Число отверстий, которые должен сделать первый мастер - $300:20 - 1 = 14$; число отверстий, которое должен сделать 2-ой мастер - $300:12 - 1 = 24$.

Некоторые из отверстий должны сверлить оба мастера. Эти отверстия будут на расстоянии, кратном 20 см и 12 см, т.е. это расстояние имеет вид $20x = 12y$; целые решения этого уравнения определяются по формулам $x = 3t$, $y = 5t$, тогда расстояние равно $60t$.

Число общих отверстий равно $\frac{300}{60} - 1 = 4$, а всего отверстий $14 + 24 - 4 = 34$.

7.10. Имеются контейнеры весом 130 кг и 160 кг. Нужно загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Как это можно сделать (укажите все решения)?

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 контейнеров по 160 кг.

Решение: Найти решения уравнения $130x + 160y = 3000$, или, что то же самое, $13x + 16y = 300$ в натуральных числах x и y . $13x = 300 - 16y = 4(75 - 4y)$. Следовательно, x кратно 4 и $x < \frac{300}{13}$ (т.е. $x < 23$). Проверим натуральные числа, кратные 4 и меньшие 23 (4, 8,

12, 16, 20). Простой проверкой убедимся, что только при $x=12$ получим натуральное значение $y=9$, то есть надо взять 12 контейнеров по 130 кг и 9 контейнеров по 160 кг.

8.16. Найти наибольший общий делитель чисел: 16484 и 42282.

Ответ: 2.

Решение: Выполняем деление с остатком:

По лемме 2,

$$\begin{aligned} 42282 &= 16484 \cdot 2 + 9314 & \text{НОД}(42282, 16484) &= \text{НОД}(16484, 9314) \\ 16484 &= 9314 \cdot 1 + 7170 & &= \text{НОД}(9314, 7170) = \\ 9314 &= 7170 \cdot 1 + 2144 & &= \text{НОД}(7170, 2144) = \\ 7170 &= 2144 \cdot 3 + 738 & &= \text{НОД}(2144, 738) = \\ 2144 &= 738 \cdot 2 + 668 & &= \text{НОД}(738, 668) = \\ 738 &= 668 \cdot 1 + 70 & &= \text{НОД}(668, 70) = \\ 668 &= 70 \cdot 9 + 38 & &= \text{НОД}(70, 38) = 2 \end{aligned}$$

8.2а. От прямоугольника 324 см. \times 141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого одна сторона меньше 141 см. От полученного прямоугольника отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне до тех пор, пока это возможно, и так далее.

На какие квадраты будет разрезан прямоугольник?

Решение: Произведем деление с остатком:

$$\begin{aligned} 324 &= 2 \cdot 141 + 42 & - 2 \text{ квадрата со стороной } 141 \text{ см,} \\ 141 &= 3 \cdot 42 + 15 & - 2 \cdot 3 \text{ квадрата со стороной } 42 \text{ см,} \\ 42 &= 15 \cdot 2 + 12 & - 2 \text{ квадрата со стороной } 15 \text{ см,} \\ 15 &= 12 \cdot 1 + 3 & - 1 \text{ квадрат со стороной } 12 \text{ см,} \\ 12 &= 3 \cdot 4 & - 4 \text{ квадрата со стороной } 3 \text{ см.} \end{aligned}$$

8.3. Докажите, что для любых 2-х чисел a и b $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a-b)$

Решение: Докажем, что если d - общий делитель чисел a и b , то он является общим делителем чисел a и $a-b$. Действительно, т.к.

d - делитель a и b , то $a = dn$, $b = dm$, а тогда

$a-b = d(n-m)$, т.е. d - делитель числа $a-b$, т.е. общий делитель чисел a и $a-b$.

Теперь докажем, что каждый общий делитель чисел a и $a-b$ является одновременно и общим делителем чисел a и b . Действительно, пусть c - делитель a и $a-b$. Тогда $a = cx$ и $a-b = cy$ и $b = a - (a-b) = cx - cy = c(x-y)$, т.е. c - делитель b .

Мы доказали, что множество общих делителей чисел a и b и чисел a и $a-b$ совпадают, а значит, и совпадают их наибольшие элементы, т.е. $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a-b)$.

Замечание к задаче 8.3. Применяя доказанное равенство и вычитая каждый раз из большего числа меньшее, мы на последнем шаге получаем $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(c, c) = c$. Это тоже алгоритм нахождения наибольшего общего делителя, но более медленный, чем алгоритм Евклида. Каждый шаг алгоритма Евклида $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, aq+r) = \text{НОД}(a, r)$ - это q раз повторенный шаг приведенного алгоритма.

8.4а. Найдите решение в целых числах уравнения $75y - 39x = 1$.

Ответ: \emptyset

Решение: Так как $\text{НОД}(39, 75) = 3$, а 1 не делится на 3, то по теореме 3, уравнение решений в целых числах не имеет.

8.4б. Найдите решение в целых числах уравнения $43x + 250y = 77$.

Ответ: $x = -761 - 250t$
 $y = 1232 + 43t$, где t любое целое число.

Решение: Так как $\text{НОД}(43, 250) = 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений в целых числах.

Сначала найдем целочисленное решение уравнения $43x + 250y = 1$.

Для этого выразим $\text{НОД}(43, 250) = 1$ через частные и остатки из цепочки равенств, которые получаем при применении алгоритма Евклида.

$$250 = 43 \cdot 5 + 35$$

$$43 = 35 \cdot 1 + 8$$

$$35 = 8 \cdot 4 + 3;$$

$$8 - 3 \cdot 2 = 2;$$

$$3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

$$1 = 3 - 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = 35 \cdot 3 - 8 \cdot 13 = 35 \cdot 16 - 43 \cdot 13 = 250 \cdot 16 - 43 \cdot 93$$

$$43 \cdot (-93) + 250 \cdot 16 = 1;$$

$$x_0 = -93, y_0 = 16 \text{ — решение уравнения } 43x + 250y = 1$$

$$\text{Тогда } \begin{cases} x_1 = -93 \cdot 77 = -7161 \\ y_1 = 16 \cdot 77 = 1232 \end{cases}$$

$$\text{— решение уравнения } 43x + 250y = 77$$

Все целочисленные решения этого уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} x = -7161 - 250t \\ y = 1232 + 43t \end{cases}$$

где t — любое целое число.

16. 8.66 Докажите, что $\text{НОД}(2^m - 1; 2^n - 1) = 2^{\text{НОД}(m, n)} - 1$

для любых натуральных m и n .

Решение: Воспользуемся тем, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b-a)$.

Пусть $m > n$.

$$\text{НОД}(2^m - 1; 2^n - 1) = \text{НОД}(2^m - 1; 2^m - 2^n) =$$

$$= \text{НОД}(2^n - 1; 2^n(2^{m-n} - 1));$$

т.к. $\text{НОД}(2^n - 1, 2^n) = 1^{(*)}$, то

$$\text{НОД}(2^n - 1; 2^n(2^{m-n} - 1)) = \text{НОД}(2^n - 1; 2^{m-n} - 1).$$

Продолжая эту процедуру, вычитая каждый раз из большего числа

меньшее и применяя равенство $(*)$ на последнем шаге, мы получим

$$\text{НОД}(2^c - 1, 2^c - 1) \text{ . Показатель } c \text{ равен } \text{НОД}(m, n)$$

(см. замечание к задаче 8.3).

Методические указания по проверке задания № 8
(Делимость целых чисел)

Задачи, которые считаются решенными, только если приведен правильный ответ.

Ответы		Ответы	
I) 2.26	I977	I3) 5.36, в.	6) $x=7t, y=-5t$;
6) 2.46	I00I22		в) $x=5t, y=8t$;
7) 2.7 (полный ответ) I		I4) 7.1a	(4,2) $x=1+5t, y=1+5t$
9) 3.1a, 6	а) I6, 6) 32.	I6) 7.36	12t+9
I0) 4.6a	24	I7) 7.4a	34
II) 5.2a, 6	а) 5, 6) 5	I8) 8.16	2
I2) 5.2в, г	в) II, г) II	I9) 8.2 а	2 кв. 14х14, 3 кв. 42х42 2 кв. 15х15; 1 кв. 12х12; 4 кв. 9х9

В задачах I3, I4, I6 t - любое целое число.

Если приведено решение, то оценка может быть только "+" или "-". Если ответ неверный, найти и указать на полях ошибку. Верного ответа не приводить.

I.46

- I) I.6. Ставить положительную оценку ("+" ,) только если верно написано разложение I) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
2) $a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$

Если разложения неверно написаны, то поправить и указать общую формулу для нечетного n

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1}).$$

3) I.8. К этой задаче есть указание в тексте и она должна быть чисто решена.

4) I.9д. Должен быть приведен противоречащий пример

8) 2.IIв. Решение должно быть записано по образцу решения 2.IIa, данного в тексте.

I5) 7.3a. Нужно точное доказательство.

20) 8.3. Требовать полного решения (указание есть в тексте).

1977/78 учебный год

методические разработки для преподавателей
по проверке заданий №5 и №6 по теме "ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА".

Приведем перечень задач, которые считаются решенными, если дан
правильный ответ.

Задание №5					
№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
5) 2.3в	1999	9) 3.1а	16	15) 2.9	301
6) 2.5б	100152	3.1б	32	20) 6.7б	$2 \cdot 3^4$
7) 2.8а	9 1 2 3 4	12) 6.4а	3420		
		6.4б	12		

1) 1.4б 2) 1.6 Ставить положительную оценку (+, ±), только если
верно написано разложение: 1) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

2) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a^2b + a^2b^2 - a^2b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

Если разложения неверно написаны, то поправить и указать на
общую формулу для нечетного n

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

3) 1.8 К этой задаче есть указание в тексте.

4) 1.9д Должен быть приведен противоречащий пример.

Критерий оценок.

За обязательные задачи: "5"-решено 12 задач

"4"-решено не менее 9 задач

"3"-решено не менее 6 задач.

За дополнительные задачи: "5"-решено не менее 7 задач

"4"-решено не менее 5 задач.

Задание №6.

№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
1) 7.2а, б	5	7) 7.7а	34	12) 7.5а	$\sqrt{a^2 + b^2}$
2) 7.2в, г	9	8) 8.1б	2	13) 7.5г	ширина $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

№	Ответы	№	Ответы	№	Ответы
3) 7.36	$x = -7t, y = 5t$	9) 8.2a	2(I4Icm), 3(42)I4) 7.10	I2 и 9	
7.3b	$x = t, y = 3t$		2(I5cm)		
4) 7.4a	$x = 1+8t, y = 2+5t$		I(I2cm), 4(3cm)		
6) 7.66	$x = -1+3t$ $y = -1+2t$	II) 8.4a	нет решений		

Критерий оценок

За обязательные задачи: "5"-решено II задач

"4"-решено не менее 8 задач

"3"-решено не менее 6 задач.

За дополнительные задачи: "5"-решено не менее 4 задач

"4"-решено не менее 2 задач.

Разработки составили В.Л.Гутенмахер, Г.Б.Юсина.

Методическая комиссия ВЗМШ.

Зак. 6500

1976-77 учебный год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

ученикам 1-го курса ВЗМШ по заданиям № 7 и № 8

Эти задания Вы будете выполнять по брошюре Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера "Челные числа"

Задание № 7

Обязательные задачи

- | | | |
|----------|-------------|--------------|
| 1) 1.4 б | 5) 2.3 а, в | 9) 4.1 а |
| 2) 1.6 | 6) 2.5 б | 10) 5.6 а |
| 3) 1.8 | 7) 2.8 а, г | 11) 6.4 а, б |
| 4) 1.9 д | 8) 3.1 а, б | 12) 6.3 |

Дополнительные задачи

- | | | | |
|---------|------------|----------|--------------|
| 13) 1.7 | 15) 2.9 | 17) 3.2 | 19) 4.4 а, г |
| 14) 2.6 | 16) 2.10 б | 18) 4.1б | 20) 5.3 |
| | | | 21) 6.7б |

Критерии оценок

За обязательные задачи: "5" - решены 12 задач;

"4" - решено не менее 9 задач;

"3" - решено не менее 6 задач.

За дополнительные задачи: "5" - решено не менее 7 задач;

"4" - решено не менее 5 задач.

Срок присылки задания №7 - 20 декабря 1976г.

Задание № 8

Обязательные задачи:

- | | | |
|--------------|----------|-----------|
| 1) 7.2 б | 5) 7.6 а | 9) 8.2 а |
| 2) 7.2 в, г. | 6) 7.6 б | 10) 8.3 |
| 3) 7.3 б, в. | 7) 7.7 а | 11) 8.4 а |
| 4) 7.4 а | 8) 8.1 б | 12) 9.7 а |

Дополнительные задачи

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 13) 7.5 а | 17) 8.5 б | 21) 9.7 б |
| 14) 7.5 г | 18) 8.6 б | 22) 9.7 в |
| 15) 7.10 | 19) 9.2 | 23) 9.7 г |
| 16) 8.4 б | 20) 9.5 | |

Критерии оценок

За обязательные задачи: "5" - решено 12 задач;

"4" - решено не менее 9 задач;

"3" - решено не менее 6 задач.

За дополнительные задачи: "5" - решено не менее 8 задач;

"4" - решено не менее 5 задач.

Срок присылки задания № 8 20 января 1977г.

Методическая комиссия ВЗМШ

Разработки составили: Г.Б.Юсина, В.Л.Гутенмахер.

d делится на m . Поэтому $d \geq m$ (ясно, что $d \neq 0$).
Таким образом, d - наибольший общий делитель a и b .

Решив задачу 9.3, мы попутно доказали два важных факта:

Уравнение $c = ax + by$ разрешимо в целых числах
в том и только в том случае, если c делится на НОД (a, b)
(теорема 3 а);

НОД (a, b) делится на любой общий делитель a и b
(следствие 3^о теоремы 2.)

Задача 9.4. Докажите, что множество чисел, представляемых
в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

(a_1, a_2, \dots, a_n - данные целые числа) - идеал. Чему
равна его образующая?

Задача 9.5. Докажите, что множество чисел, делящихся одно-
временно и на a , и на b - идеал. Чему равна его образующая?

Задача 9.6. а) Докажите, что пересечение нескольких идеалов
- тоже идеал.

б). Чему равна его образующая, если образующие данных идеалов
- a_1, a_2, \dots, a_n ?

Задача 9.7. Найдите образующие следующих идеалов:

а) $\{x : 15x \text{ делится на } 36\}$,

б) $\{x : x = 26x + 65y; x, y \in \mathbb{Z}\}$,

в) $\{x : x \text{ делится на } 8, \text{ на } 14 \text{ и на } 35\}$,

г) $\{x : x = 18x + 42y \text{ и } x \text{ делится на } 5\}$.

Ц Е Л Ы Е Ч И С Л А

(Сборник заданий для учащихся 8-9 классов)

Подписано к печати 29.12.75г. 1-36196 Заказ 31

Тираж 10000 экз. Объем 2 п.л. Цена 5 коп.

Ротапринт института содержания и методов обучения АПН СССР

Ул. Макаренко д.5/16

М о с к в а - 1976

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вы, вероятно, знаете, что любое целое положительное число можно единственным способом разложить в произведение простых множителей: так, например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2; 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13; 290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Более простой факт: если произведение mn делится на 7, то хотя бы одно из чисел m и n должно делиться на 7.

Эти факты считаются очевидными. Между тем, доказать их не так просто. Это мы сделаем позже, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел.

Всюду латинскими буквами: a, b, c, d, m, n, x, y и т.д. мы обозначаем целые числа.

Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ 1. Делимость суммы, разности и произведения	3
§ 2. Деление с остатком	5
§ 3. Делители	9
§ 4. Простые числа	9
§ 5. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа	12
§ 6. Основная теорема арифметики	13
§ 7. Прямые на решетке. Линейные уравнения	16
§ 8. Алгоритм Евклида	24
§ 9. Идеалы	30

§ 1. Делимость суммы, разности и произведения.

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b , если существует такое целое число k , что $a = bk$. В таком случае число b называется делителем числа a .

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. Если числа a и b делятся на c , то их сумма $a+b$ и их разность $a-b$ делятся на c ;
 2°. Если a делится на c , а b делится на d , то их произведение ab делится на cd .

Докажем 1°. Поскольку a делится на c , то $a = kc$, где k — некоторое целое число. Точно также $b = mc$, где m — целое число. Поэтому $a+b = (k+m)c$, $a-b = (k-m)c$, откуда следует, что каждое из чисел $a+b$ и $a-b$ делится на c .

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда следует, что ab делится на cd .

Задача 1.1. Докажите, что если a делится на b , а b делится на c , то a делится на c .

Задача 1.2. Докажите, что если каждое из чисел a и b делится на c (где $c \neq 0$), то целое число $\frac{ab}{c}$ делится на a и на b .

Задача 1.3. а) Докажите, что если a делится на b , то a^n делится на b^n .

б) Докажите, что если a^2 делится на $a+b$, то и b^2 делится на $a+b$.

Задача 1.4. Докажите, что если ab делится на c и $a+b$ делится на c , то а) a^2+b^2 делится на c ;

б) a^3+b^3 делится на c^2 .

Решение 1.4. а) Выразим a^2+b^2 через $(a+b)$ и (ab) :

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

По условию, $(a+b)$ делится на c , следовательно, $(a+b)^2$ делится на c . По условию, ab делится на c , поэтому $2ab$ делится на c . Так как число a^2+b^2 равно разности двух чисел, делящихся на c , согласно утверждению 1°, оно само делится на c .

Задача 1.5. Докажите, что a^5+b^5 делится на $a+b$.

Решение 1.5. Выражение a^5+b^5 разлагается на множители:

$$a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Если a и b - целые, то оба множителя будут целыми числами.

Отсюда следует, что $a^5 + b^5$ делится на $a + b$.

Задача 1.6. Докажите, что $a^3b + b^3a$ делится на $a^2b + b^2a$.

Задача 1.7.* Докажите, что $a^4 + 4b^4$ делится на $a^2 + 2ab + 2b^2$.

Задача 1.8. Докажите, что если $ab + cd$ делится на $a + c$, то $aa + bc$ делится на $a + c$ (здесь $a + c \neq 0$).

Указание. Разложите сумму $ab + cd + ad + bc$ на множители.

Задача 1.9 Какие из следующих утверждений верны, а какие - нет: а) если одно слагаемое делится на 15, а другое не делится на 15, то их сумма не делится на 15;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 15, то их сумма не делится на 15;

в) если каждый из двух сомножителей не делится на 15, то их произведение не делится на 15;

г) если один из двух сомножителей делится на 15, а другой не делится на 15, то произведение делится на 15;

д) если число делится на 15 и на 21, то оно делится на $15 \cdot 21 = 315$?

Решение 1.9. а) Это утверждение верно. Докажем это. Пусть $a + b = c$, причем a делится на 15, а b не делится на 15. Докажем, что c не делится на 15. Предположим противное: пусть c делится на 15. Но тогда по утверждению (1⁰) разность $b = c - a$ делится на 15. Мы получили противоречие с условием задачи.

Решение 1.9. б) Это утверждение неверно. Приведем противоречащий пример: $7 + 8 = 15$. Здесь каждое из двух слагаемых не делится на 15, в то время как их сумма делится на 15.

Важное замечание. Подчеркнем, что когда спрашивается: "верна какая-то теорема (какое-то математическое утверждение) или нет" - то имеется в виду: "верно ли это при всех значениях букв, во всех возможных случаях?" Поэтому, когда мы доказываем теорему, т.е. доказываем, что верна, мы должны проводить рассуждение так, чтобы оно годилось для всех случаев. Если же мы хотим показать, что теорема неверна, то достаточно привести один опровергающий пример; так мы построили ответ на вопрос 1.9 б).

§ 2. Деление с остатком.

Отметим на числовой оси точки, соответствующие целым числам (рис.1). Пусть b - некоторое натуральное (целое положительное)



Рис.1

число. Выделим на рисунке все целые числа,¹⁾ делящиеся на b . Они расположены на оси на равном расстоянии друг от друга. Эти числа называют еще кратными числу b .

Пусть теперь какое-то число a не кратно b . Тогда оно попадает между двумя числами, кратными b - между qb и $(q+1)b$ (рис.2).

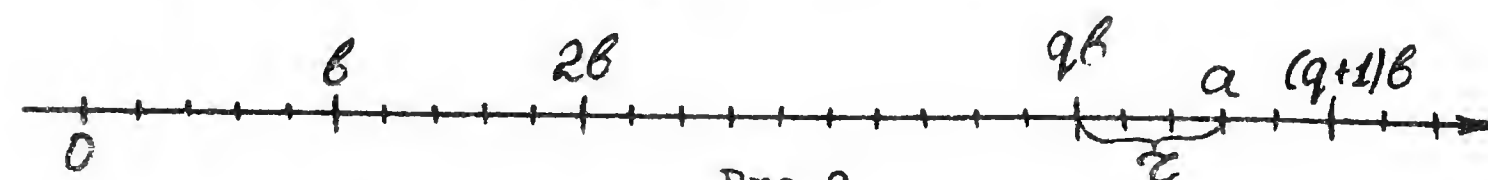


Рис.2

По этому поводу можно сформулировать такое утверждение.

Если a и b - целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q , что $a = bq + r$, где "остаток" r - целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq r < b$. Эти числа q и r определяются (по данным a и b) единственным образом.

Пусть числа a и b заданы своими записями в десятичной системе. Чтобы найти "частное" q и остаток r , не нужно, конечно, рисовать отрезок длины a на числовой оси и "укладывать" на нем много раз отрезок длины b . Для этого существует более рациональный способ. Это - известное всем правило деления одного числа a на другое число b "столбиком". Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если делить 1973 на 31, то при делении получится частное 63 и остаток 20:

$$\begin{array}{r} - 1973 \quad | \quad 31 \\ \underline{186} \\ 113 \\ \underline{93} \\ 20 \end{array}$$

или $1973 = 31 \times 63 + 20$

¹⁾ Вместо "точки, соответствующие числам" будем говорить просто "числа".

Замечание про отрицательные числа. В утверждении, обведенном в рамочку, мы считаем, что "делитель" b - положительное число, и про остаток мы сказали, что $r \geq 0$, но про "делимое" a мы ничего такого не говорили. Разберем пример, когда делимое a - отрицательное число. Пусть $a = -23$, $b = 7$. Тогда $-23 = (-4) \cdot 7 + 5$, где $0 \leq 5 < 7$. Следовательно, остаток r при делении (-23) на 7 равен 5.

Задача 2.1. Какой остаток дает число

- а) 1005 при делении на 13?
- б) 1001 при делении на 11?
- в) 1111 при делении на 37?
- г) (-150) при делении на 19?
- д) (-54321) при делении на 4?

Задача 2.2. Докажите, что числа

- а) 10^4 и 10^6 ,
- б) 10^5 и -1 ,
- в) -123456789 и 9876543210

дают одинаковые остатки при делении на 11.

Решение 2.2. а). Имеем $10^4 = 11 \cdot 909 + 1$, $10^6 = 11 \cdot 90909 + 1$. Следовательно, оба числа дают при делении на 11 один и тот же остаток 1.

Заметим, что условие: " x дает при делении на m остаток r (где $0 \leq r < m$)" эквивалентно такому:
 $x = mt + r$, где t - целое число.

Пусть в этой формуле t пробегает все множество целых чисел $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, в то время как m и r фиксированы, не меняются (скажем, $m = 8$, $r = 5$, тогда $x = 8 \cdot t + 5$). При этом формула дает все возможные числа, для которых остаток от деления на m равен r . Если изобразить эти числа на оси, то получится множество точек, отстоящих друг от друга на расстояние m :



(на нашем рисунке изображено множество чисел $x = 8 \cdot t + 5$).

Таким образом, если задано $m > 0$, то все множество целых чисел можно разбить на m классов: к одному классу отнести все числа, дающие при делении на m остаток 1, к другому - остаток 2, и так далее. Эти классы можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= mt + 1, \\ x &= mt + 2, \\ &\dots \\ x &= mt + (m-1). \end{aligned}$$

И наконец, последний (вернее, "нулевой") класс $x = mt$. В него входят все числа, дающие при делении на m остаток 0.

Например, если $m = 8$, то всего классов 8, каждое целое число x может попасть в один из классов $x = 8t$, $x = 8t + 1$, ..., $x = 8t + 7$.

Заметим, что если m задано, то два числа x_1 и x_2 попадают в один и тот же класс в том и только в том случае, если их разность $x_1 - x_2$ делится на m .

Второе решение задачи 2.2. а) Поскольку $10^6 - 10^4 = 10^4(100 - 1) = 10^4 \cdot 99$ делится на 11, то числа 10^6 и 10^4 дают одинаковые остатки при делении на 11.

Задача 2.3. а) Нарисуйте числовую ось и отметьте на ней целые числа, которые при делении на 7 дают в остатке 3. (Масштаб и начало отсчета выберите так, чтобы, по крайней мере, все числа между (-20) и $(+20)$ поместились)

б) Каково наименьшее из чисел, больших 1975, которое при делении на 7 дает в остатке 3?

в) Каково наибольшее из чисел, меньших 2001, которое при делении на 11 дает остаток 8?

Решение 2.3.б) Разделим 1975 на 7 с остатком: $1975 = 282 \cdot 7 + 1$. Остаток равен 1. Следовательно искомое число $1975 + 2 = 1977$, это число при делении на 7 дает остаток 3.

Задача 2.4. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира № 178? (на всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково).

Задача 2.5. а) Найдите какое-нибудь шестизначное число, которое делится на 321.

б) Найдите наименьшее такое число.

Задача 2.6. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1973 куска?

Указание. Как возрастает число кусков, когда один разрезают на 7?

Задача 2.7. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число $n^2 + 3n + 5$ при делении на число $n + 1$?

Решение 2.7. Перепишем данное число n^2+3n+5 так:

$$n^2+3n+5=(n+1)(n+2)+3.$$

Из этой записи видно, что если число $n+1$ больше 3, то остаток всегда равен 3. Если $n+1=2$ (при $n=1$), то поскольку $3=1 \cdot 2+1$, остаток равен 1. Если $n+1=3$ (при $n=2$), то остаток равен 0.

Задача 2.8. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число:

- а) $2n^2+5n-3$ при делении на $n+4$?
- б) $4n+7$ при делении на $2n+1$?
- в) $4n+5$ при делении на $2n+3$?
- г) n^2+1 при делении на 4?

Указание. г) Рассмотрите два случая:

- (1) n - четно,
- (2) n - нечетно.

Задача 2.9*. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если по 7 книг в пачку, то лишних книг не останется. Сколько, самое меньшее, может быть книг на столе?

Указание. Чтобы число делилось на 4, на 5 и на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 60. Это один из тех "очевидных" фактов, которые мы научимся строго доказывать ниже.

Задача 2.10. а) Докажите, что из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

б) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, у которых разность любых двух делится на 7? а 16 таких чисел?

в) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать два таких, у которых сумма делится на 7?

г) Докажите, что из 5 чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.

Решение 2.10. а) Пусть даны любые 8 целых чисел. Найдем остаток каждого из них от деления на 7. Всего существует 7 возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. А у нас имеется 8 остатков. Значит, хотя бы два из них совпадают. Следовательно, два из наших чисел давали один и тот же остаток при делении на 7: $a_1=7q_1+r$, $a_2=7q_2+r$. Тогда их разность $a_1-a_2=7(q_1-q_2)$ должна делиться на 7.

Указание к задаче г) Вместе с каждым остатком r рассмотрите "дополнительный" - $(7-r)$.

§ 3. Делители.

В этом параграфе, а также в §§ 4, 5 и 6 мы будем рассматривать только натуральные, то есть целые положительные числа. Возьмем какое-то целое число a и выпишем все его делители. Например, у числа $a=48$ множество D всех его делителей состоит из 10 чисел:

$$D=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}.$$

Множество D делителей данного числа a всегда обладает некоторой симметрией, которую мы сейчас объясним.

Если b - делитель числа a , то $a=bk$, где k - целое число. Конечно, k при этом тоже будет делителем числа a . Такие два делителя, произведение которых равно a , называются дополнительными. Например, 3 и 16 - дополнительные делители числа 48. Сопоставляя каждому делителю дополнительный, мы получим взаимнооднозначное отображение множества D на себя. Например, для числа $a=48$ это отображение можно задать так:

Делитель	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
Дополнительный делитель	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1

Задача 3.1. Приведите пример числа, имеющего:

- а) ровно 5 делителей; б) ровно 6 делителей.

Задача 3.2*. Докажите, что если число не является полным квадратом, то у него четное количество делителей, а если является квадратом - то нечетное.

Задача 3.3*. Пусть целое число a четно и не делится на 4. Докажите, что у числа a столько же четных делителей, сколько нечетных.

Указание. Постройте взаимнооднозначное отображение множества четных делителей числа a на множество его нечетных делителей.

§ 4. Простые числа.

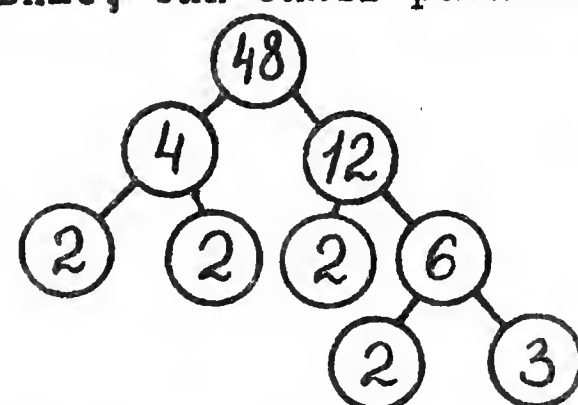
Каждое натуральное число a , большее 1, имеет по крайней мере два делителя: 1 и a . Число a называется простым, если у него нет других делителей, и составным - если они есть. Вот первые десять простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Можно доказать (см. задачи 4.4 или 8.8), что существует бесконечно много простых чисел. Это знал еще Евклид.

Простые числа, по определению, не разлагаются в произведение меньших чисел. Почти очевидно следующее утверждение.

Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых чисел.

Действительно, пусть нам дано составное число a . Мы можем разложить его в произведение двух множителей, меньших a . Если среди них есть хотя бы один не простой, то мы можем и его разложить в произведение двух множителей. Если среди них опять будут составные, они опять разлагаются на множители и т.д.



$$\begin{aligned} 48 &= \\ &= 4 \cdot 12 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Этот процесс не может продолжаться бесконечно, поскольку каждый сомножитель меньше самого числа. (В нашей схеме на каждом "этаже" числа меньше, по крайней мере, вдвое, чем на предыдущем "этаже".) В результате мы приходим к разложению на простые множители.

Обычно равные простые множители собирают вместе и записывают разложение так:

$$48 = 2^4 \cdot 3;$$

в общем случае:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

где p_1, p_2, \dots, p_m — простые числа. (Конечно, пока не ясно, почему такое разложение единственно. Это мы докажем ниже в § 6.)

Чтобы начать процесс разложения данного числа a в произведение простых, нужно найти хотя бы один его простой множитель. Никакого простого способа для этого не существует: если про число

a заранее ничего неизвестно, приходится перебирать простые числа и по очереди испытывать, делится ли a на 2, 3, 5 и т.д.

Пример. Разложим число 1970 на простые множители. Оно четное — делится на 2:

$$1970 = 2 \cdot 985.$$

Далее, 985 явно делится на 5:

$$985 = 5 \cdot 197.$$

Пробуем делить 197 на 7, 11, 13 — не делится. Далее можно не пробовать: поскольку $17^2 = 289 > 197$, то 197 не может иметь ни одного делителя, отличного от 1 и 197, то есть 197 — простое. (Если $197 = ak$, где $197 > a > 17$, то $1 < k < 17$, а таких делителей 197 не имеет.) Итак, $1970 = 2 \cdot 5 \cdot 197$.

Задача 4.1. а) Докажите, что если четырехзначное число p не делится ни на одно простое число от 2 до 97, то p простое.

б) Докажите, что каждое составное число a имеет простой делитель p такой, что $p^2 \leq a$.

Задача 4.2. Разложите на простые множители числа 1973, 1974, 1975, 1976, 1977.

Задача 4.3. Разложите на простые множители число $2^{2^4} - 1$.

Указание. Это число делится на $2^{12} - 1$, $2^{12} + 1$, $2^6 + 1$, $2^4 + 1$, $2^4 + 1$ и т.п.

Задача 4.4.* а) На столе 211 книг. Проверьте, что если их связывать по 2, 3, 5 или 7 книг в пачку, то всегда остается одна лишняя.

б) Сколько должно быть книг на столе, чтобы всегда оставалась лишняя при связывании по 2, 3, 5, 7, 11, 13 штук в пачку?

в) Пусть p_1, p_2, \dots, p_m — любые простые числа. Придумайте число N , которое при делении на каждое из этих чисел p_i дает в остатке 1 ($i = 1, 2, \dots, m$).

г) Докажите, что кроме p_1, \dots, p_m существуют и другие простые числа.

Указание. Любой простой делитель числа N , построенного в задаче в), отличен от p_1, p_2, \dots, p_m .

§ 5. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Пусть a и b - два целых числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a , и b одновременно. Выберем из них наибольшее число и назовем его наибольшим общим делителем. Далее будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через НОД (a, b) .

Пример. Выпишем общие делители чисел 48 и 30: 1, 2, 3, 6.

Таким образом, отсюда видно, что НОД $(48, 30) = 6$.

Точно также легко проверить, что НОД $(4, 12) = 4$, НОД $(21, 91) = 7$, НОД $(15, 28) = 1$.

Если НОД $(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Задача 5.1. Докажите, что если НОД $(a, b) = d$ и $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, то числа a_1, b_1 взаимно просты.

Задача 5.2. Пусть p - простое. Докажите, что либо a делится на p , либо НОД $(a, p) = 1$.

Задача 5.3. Верно ли, что если НОД $(a, b) = \text{НОД}(b, c) = d$, то и НОД $(a, c) = d$?

Задача 5.4. Выпишите делители каждого из чисел 441 и 686, их общие делители и найдите НОД $(441, 686)$.

Задача 5.5. Сократите дробь $78/195$.
(Разделите числитель и знаменатель на наибольшее возможное целое число.)

Задача 5.6. а) Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 192 белых и 264 красных георгинов?

б) Каков будет ответ в общем случае, если белых георгинов a штук, а красных - b штук?

Задача 5.7. Выберите из следующих чисел всевозможные пары взаимно простых чисел: 14, 18, 21, 35, 45, 60, 78, 99.

Задача 5.8. а) Нарисуйте числовую ось и отметьте на ней целые числа x , для которых НОД $(x, 12) = 1$ (красным цветом), НОД $(x, 12) = 3$ (синим цветом) и НОД $(x, 12) = 4$ (зеленым цветом).

б) Найдите наибольшее трехзначное число x , для которого НОД $(x, 540) = 36$.

Задача 5.9. При каких натуральных n будут взаимно просты числа:

а) $2n+3$ и $n+1$?

б) $3n+1$ и $5n+2$?

в) n^2+1 и $n+3$?

Решение 5.9.б) Предположим, что числа $3n+1$ и $5n+2$ имеют общий делитель d . Тогда число $3(5n+2) - 5(3n+1) = 1$ тоже имеет делитель d . В значит, $d=1$. Следовательно, $3n+1$ и $5n+2$ взаимно просты при любом n .

Теперь сформулируем основной факт, в который упирается доказательство единственности разложения на простые множители.

Теорема 1. Если числа a и b взаимно просты и произведение bx делится на a , то x делится на a .

То же самое можно сформулировать, введя новые буквы, так:

Теорема 1'. Если числа a и b взаимно просты и $bx = ay$, то существует t такое, что $x = at$ и $y = bt$.

В следующем параграфе (§ 6) мы докажем, исходя из этой теоремы, основную теорему арифметики. В § 7 мы дадим простое геометрическое объяснение теоремы 1. А в § 9 мы приведем короткое алгебраическое доказательство теоремы 1.

§ 6. Основная теорема арифметики.

В § 4 мы показали, что всякое число можно разложить на простые множители. Теперь, пользуясь теоремой 1, мы можем доказать больше.

Теорема 2. ("Основная теорема арифметики").

Каждое натуральное число разлагается на простые множители единственным образом

Доказательство. Сначала докажем такую лемму.

Лемма 1. Если числа q, p_1, p_2, \dots, p_n - простые и произведение $p_1 p_2 \dots p_n$ делится на q , то одно из чисел p_i равно q .

Прежде всего заметим, что если простое число p делится на простое число q , то $p=q$ (в противном случае, если $p \neq q$, то p и q взаимно просты - простое число, по определению, не имеет делителей, кроме самого себя и единицы).

Отсюда сразу следует утверждение леммы для $n=1$. Для $n=2$ оно вытекает прямо из теоремы 1: если $p_1 p_2$ делится на q и $p_1 \neq q$, то p_2 делится на q (то есть $p_2 = q$).

Доказательство леммы для $n=3$ проведем так. Пусть $p_1 p_2 p_3$ делится на q . Если $p_3=q$, то все доказано. Если $p_3 \neq q$, то, согласно теореме 1, $p_1 p_2$ делится на q . Таким образом, случай $n=3$ мы свели к уже рассмотренному случаю $n=2$.

Точно так же от $n=3$ мы можем перейти к случаю $n=4$, затем - к $n=5$, и вообще, предполагая, что для $n=k$ утверждение леммы доказано, мы можем легко доказать его для $n=k+1$. Это убеждает нас, что лемма верна для всех n .

(Такой способ рассуждений называется доказательством по индукции.)

Теперь докажем, наконец, теорему 2.

Предположим, что имеется два разложения числа a на простые множители:

$$a = p_1 p_2 p_3 \dots p_n = q_1 q_2 q_3 \dots q_e.$$

Так как правая часть делится на q_1 , то левая часть равенства должна делиться на q_1 . Согласно лемме I, одно из чисел p_1, p_2, \dots, p_n равно q_1 . Сократим обе части равенства на q_1 .

Проведем такое же рассуждение для q_2 , затем для q_3, \dots , для q_e . В конце концов справа сократятся все множители и останется 1. Естественно, и слева не останется ничего, кроме 1.

Отсюда мы заключаем, что два разложения $p_1 p_2 \dots p_n$ и $q_1 q_2 \dots q_e$ могут отличаться только порядком сомножителей. Используя основную теорему арифметики, можно доказать такие предложения.

1°. Для того, чтобы число a делилось на число b , необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b , входил и в разложение числа a ; причем, если простой множитель входит в разложение b k раз, то в разложение числа a он должен входить не менее k раз.

2°. Пусть a и b разложены на простые множители. Тогда, чтобы найти НОД (a, b), нужно перемножить все общие простые множители чисел a и b ; причем, если p входит в разложение b k раз, а в разложение a - e раз и $k \leq e$, то в разложение НОД (a, b) множитель p должен входить k раз.

3°. Пусть c - какой-нибудь общий делитель чисел a и b , а $d = \text{НОД} (a, b)$, - наибольший общий делитель этих чисел. Тогда d обязательно делится на c .

4°. Пусть число a делится на b и c , причем b и c взаимно просты. Тогда a делится на произведение bc .

5°. Пусть число a делится на b и на c , и пусть $\text{НОД} (b, c) = d$. Тогда a делится на целое число $\frac{bc}{d} = k$.

Это число k называется наименьшим общим кратным b и c :

$$bc / \text{НОД}(b, c) = \text{НОК}(b, c).$$

Задача 6.1а) Выпишите все делители числа $7^2 \cdot 11^3$.

Сколько делителей имеет число:

б) 7^m ? в) $7^m 11^n$? г) $3^e 7^m 11^n$?

Решение задачи а) Согласно 1°, это будут числа $7^h 11^e$, где $h \leq 2, e \leq 3$. Их удобно записать в такую таблицу:

I	II	II ²	II ³
7	7 · II	7 · II ²	7 · II ³
7 ²	7 ² · II	7 ² · II ²	7 ² · II ³

Всего их, таким образом, 12 штук.

Задача 6.2. Докажите, что если a^n делится на b^n , то a делится на b . (Сравните с задачей 1.3).

Задача 6.3. Пусть $x^n = y^m$, где x и y - целые числа, $\text{НОД} (m, n) = 1$. Докажите, что существует такое целое z , что

$$x = z^m, y = z^n.$$

Задача 6.4. а) Найдите наименьшее число, которое делится на 36, 57, 95.

б). Найдите наибольшее число, на которое делятся числа 576, 180, 9060.

Задача 6.5. Найдите наименьшее целое число, половина которого - полный квадрат, третья часть - полный куб, четвертая часть - пятая степень целого числа.

Задача 6.6. Чему равно наименьшее общее кратное:

а) $3^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$? б) 288 и 324?

Задача 6.7*. Сколько существует чисел, меньших числа a и взаимно простых с ним, если:

а) $a = 3^6$;

б) $a = 2^6 \cdot 3^5$;

в) $a = 2^6 \cdot 3$.

Задача 6.8. Докажите, что если p простое, то не существует целых m и $n \neq 0$ таких, что $pm^2 = n^2$.

§ 7. Прямые на решетке. Линейные уравнения.

Начнем с решения такой задачи.

Задача 7.1. Пусть на клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a \times b$ клеток (стороны прямоугольника идут по линиям сетки). Проведем диагональ и отметим все узлы сетки, которые на ней лежат. На сколько частей эти узлы делят диагональ?

Узлами мы называем точки, где пересекаются линии сетки.

Прежде чем решать задачу в общем виде, рассмотрим несколько примеров.

На рис. 3 на клетчатой бумаге взят прямоугольник 10×15 . Мы видим, что узлы делят диагональ на равные части и число частей равно 5.

Диагональ прямоугольника 5×7 (рис. 4) вообще не проходит через узел, лежащий внутри прямоугольника: число частей - 1.

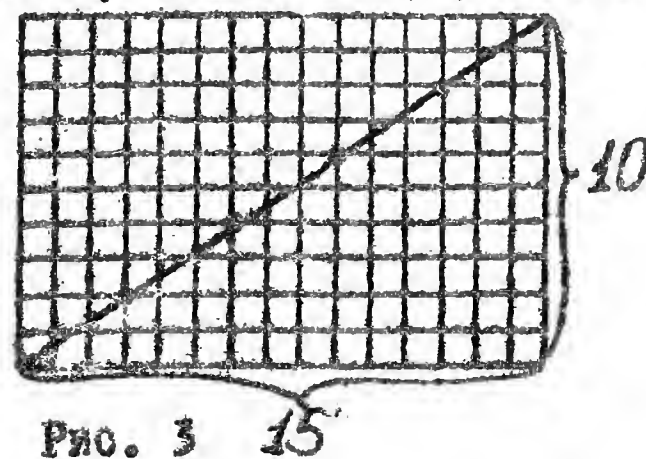


Рис. 3 15

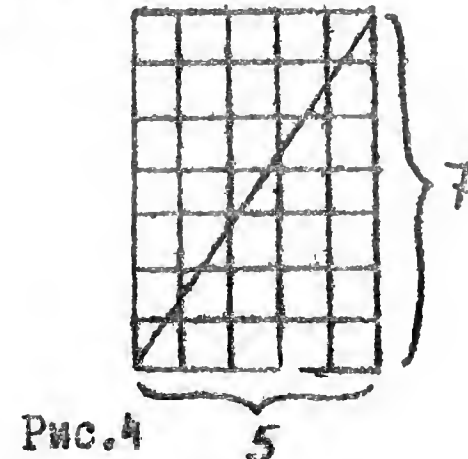


Рис. 4 5

Для прямоугольника 12×20 (рис. 5) диагональ разбивается узлами решетки на 4 одинаковых отрезка (каждый из них служит диагональю прямоугольника 3×5 клеток).

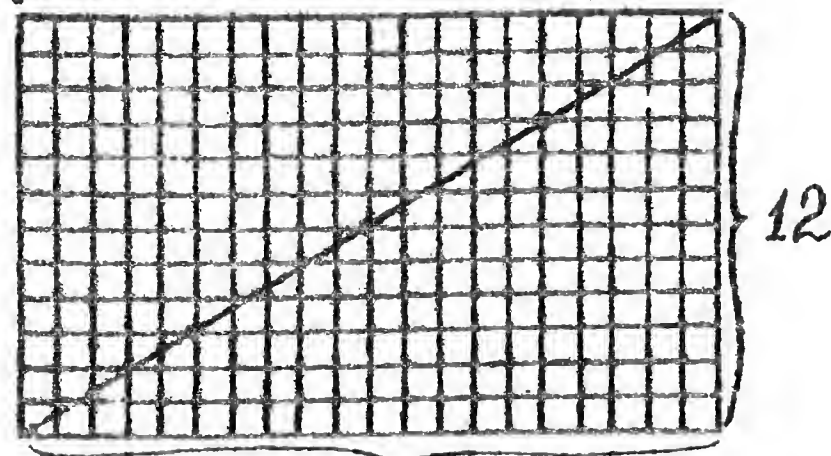


Рис. 5 20

Нарисуйте еще несколько прямоугольников на клетчатой бумаге. Проверьте, скажем, что диагональ прямоугольника 4×10 делится узлами на 2 равных части, прямоугольника 9×15 - на 3, 14×35 - на 7, 20×36 - на 4.

Теперь вы сможете догадаться, что ответ в задаче 7.1 такой: диагональ прямоугольника $a \times b$ разбита узлами на $d = \text{НОД}(a, b)$ частей.

Удобнее доказать более сильное утверждение: диагональ делится узлами на $d = \text{НОД}(a, b)$ равных (как теперь принято говорить, конгруэнтных) отрезков.

Объясним в первую очередь, почему отрезки, на которые диагональ делится узлами, будут равны. Для того чтобы это понять, не нужен прямоугольник, удобнее говорить просто о прямой, проведенной на клетчатой бумаге. Пусть прямая проходит через два узла решетки: A и B . Будем двигаться по прямой в направлении AB . Пусть следующим за A узлом, лежащим на прямой, будет C , а следующим за B - узел D (рис. 6). Ясно, что $|AC| = |BD|$:

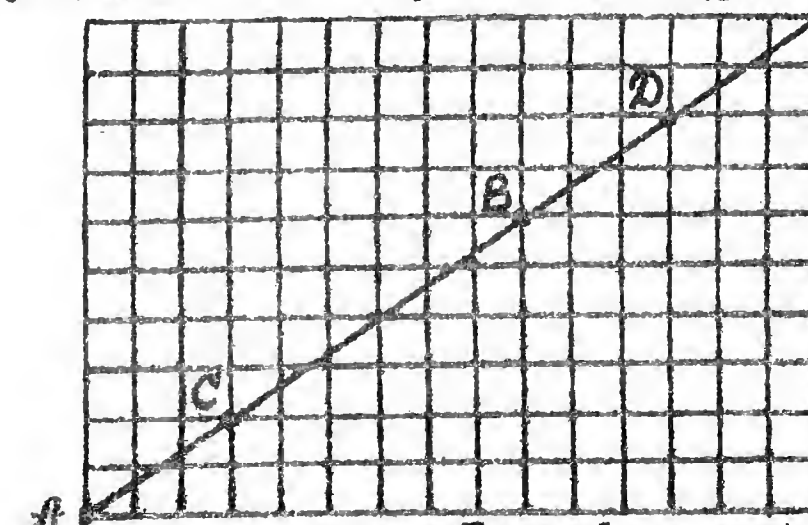


Рис. 6.

Мы можем передвинуть весь лист клетчатой бумаги вдоль прямой AB так, что точка A перейдет в B , при этом все узлы клетчатой бумаги снова перейдут в узлы, следовательно, ближайший к A узел C перейдет в ближайший к B узел D . Тем самым мы показали, что узлы на нашей прямой расположены на равных расстояниях друг от друга.

Теперь объясним, почему диагональ прямоугольника $a \times b$ разбита на $d = \text{НОД}(a, b)$ частей. Пусть k - какой-то общий делитель чисел a и b . Тогда мы можем разбить каждую сторону некоторыми узлами на k равных частей. Проведя через точки деления линии сетки, мы разобьем весь прямоугольник на k^2 меньших прямоугольников, а диагональ при этом разобьется на k равных кусков (рис. 7). Обратно, если некоторые узлы разбивают диагональ на k равных частей, то, проведя через них линии сетки, мы разобьем на k частей стороны, то есть получим что k - общий делитель a и b ($a = ka_1, b = kb_1$).

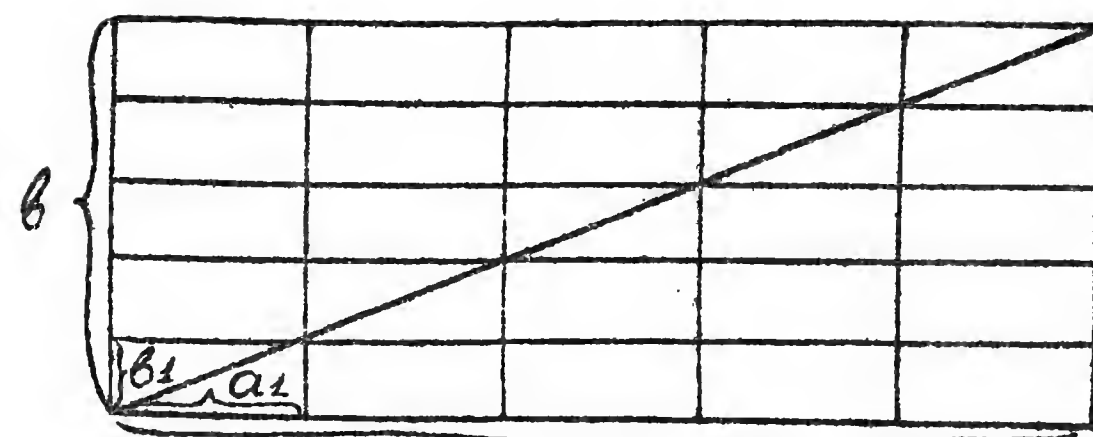


Рис. 7а

Итак, каждому общему делителю k чисел a и b соответствует (взаимно однозначным образом) разбиение диагонали на k равных частей. Ясно, что самому мелкому разбиению (всеми узлами, лежащими на диагонали), соответствует наибольший общий делитель. Задача 7.1 решена.

Связь между узлами клетчатой бумаги и целыми числами, которая использовалась в этом решении, легко объясняется с помощью метода координат.

Выберем на клетчатой бумаге за оси координат две линии сетки, за единицу масштаба - сторону клетки. Тогда узлы сетки можно охарактеризовать так: это - такие точки (x, y) , обе координаты которых - целые числа. Будем их называть целыми точками, а все множество этих точек (узлов) - решеткой.

(Таким образом, задачу 7.1 можно было бы сформулировать так: "на сколько частей целые точки делят отрезок с концами в точках $(0, 0)$ и (a, b) ?").

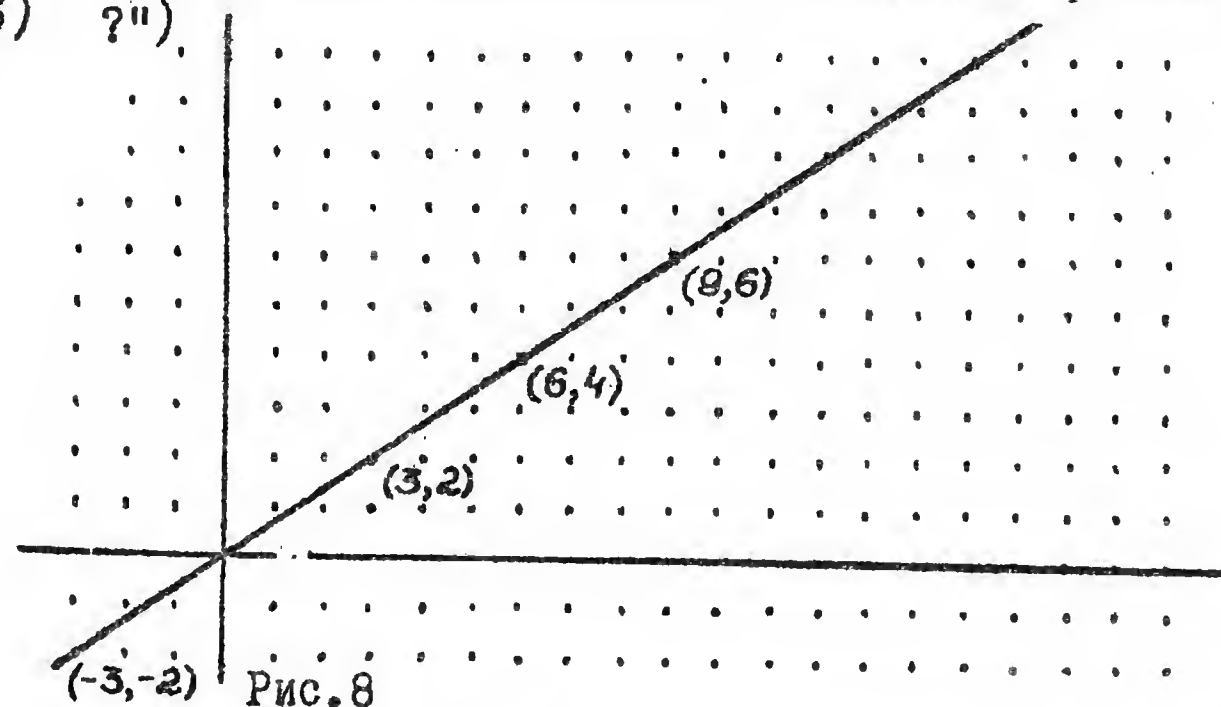


Рис. 8

На рисунке 8 по решетке проведена прямая, задаваемая уравнением

$$y = \frac{2}{3}x$$

или, что то же самое, $2x = 3y$.

Легко видеть, что все возможные точки решетки, лежащие на этой прямой - это

$$(3, 2), (6, 4), (9, 6), (12, 8), \dots$$

по одну сторону от начала координат $(0, 0)$ и

$$(-3, -2), (-6, -4), \dots$$

по другую сторону. Короче, все эти точки можно записать общей формулой: их координаты

$$x = 3t, y = 2t,$$

где t - любое целое число.

В общем виде сформулируем наше наблюдение так.

Теорема 1. Если целые числа a и b взаимно просты, то все целые точки (x, y) , лежащие на прямой $ay = bx$ находятся по формуле $x = at, y = bt$, где t - произвольное целое число.

Эта теорема, разумеется, - ещё один вариант формулировки теоремы 1 из § 5.

Выше, при решении задачи 7.1, мы дали наглядное объяснение, а в § 9 проведем чисто алгебраическое доказательство этой теоремы.

Задача 7.2. а) Сколько целых точек лежит на отрезке, соединяющем точки $(0, 0)$ и $(20, 28)$ (включая его концы)?

Тот же вопрос про отрезок, соединяющий точки:

б) $(20, 0)$ и $(0, 28)$;

в) $(0, 0)$ и $(-56, 72)$;

г) $(20, 20)$ и $(-36, 92)$;

д) $(1, 7)$ и $(253, 43)$.

Задача 7.3. а) Нарисуйте прямую, задаваемую уравнением

$$20x = 28y,$$

и напишите общую формулу, задающую все целые точки этой прямой. (Масштаб и размеры рисунков выбирайте так, чтобы несколько - хотя бы три, четыре точки решетки, лежащие на прямой, уместились на рисунке.) То же задание для прямых:

б) $20x + 28y = 0$;

в) $252x = 84y$;

г) $85y = -153x$.

Решение 7.3. г) После сокращения на НОД $(85, 153) = 17$ получим уравнение прямой: $5y = -9x$. Ближайшие к узлу $(0, 0)$ целые

точки на этой прямой $(5, -9)$ и $(-5, 9)$, а общее решение $x = 5t$, $y = -9t$, где t - любое целое число. Рисунок сделайте сами.

Выше мы сформулировали теорему I'' про целые решения уравнения

$$ay - bx = 0 \quad (1)$$

Теперь мы решим в целых числах уравнение $ay - bx = 1$ (2) и вообще $ay - bx = c$ (3),

где a , b и c - заданные целые числа. Начнем с примеров.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $28x + 20y = 22$. Левая часть при всех x и y делится на 4, а правая - нет. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $28y - 20x = 12$. Разделим обе части на 4. Получим: $7y - 5x = 3$. Теперь начертим несколько прямых, уравнения которых $7y - 5x = 0$, $7y - 5x = 1$, $7y - 5x = 2$, $7y - 5x = 3$, ..., $7y - 5x = 7$. Все эти прямые параллельны (рис. 9), нужная нам прямая - четвертая снизу. Заметим, что она проходит через целую точку $(5, 4)$. А остальные целые точки на этой прямой расположены на равных расстояниях (точно так же, как на прямой $7y - 5x = 0$).

Отсюда ясно, что все решения нашего уравнения в целых числах:

$$\begin{cases} x = 5 + 7t \\ y = 4 + 5t \end{cases}, \text{ где } t - \text{любое целое число.}$$

Теперь сформулируем общую теорему 3.

а) Уравнение $ay - bx = c$ тогда и только тогда имеет решение (x, y) в целых числах, когда c делится на НОД (a, b) .

б) Если НОД $(a, b) = 1$, c - произвольное целое число, то уравнение $ay - bx = c$ имеет бесконечное число решений (x, y) в целых числах. Если известно одно решение (x_0, y_0) , то все решения имеют вид

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad \text{где } t - \text{любое целое число.}$$

Доказательство. Ясно, что если a и b делятся на d , то при целых x , y число $ay - bx = c$ тоже делится на d .

Таким образом, если c не делится на $d = \text{НОД}(a, b)$, то уравнение (3) не имеет решений. Если же a , b и c делятся на d , то поделив все члены на d , мы придем к случаю, когда $\text{НОД}(a, b) = 1$. Рассмотрим такое уравнение.

Пусть одно решение (x_0, y_0) мы нашли: $ay_0 - bx_0 = c$. Тогда уравнение $ay - bx = c$ сводится к такому $a(y - y_0) - b(x - x_0) = 0$, а по теореме I'' получаем $x - x_0 = at$, $y - y_0 = bt$ (t - целое число).

Осталось доказать, что уравнение (3) имеет хотя бы одно решение в целых числах, если $\text{НОД}(a, b) = 1$. Достаточно доказать это для $c=1$, т.е. для уравнения (2). Действительно, если (x_0, y_0) - какое-нибудь решение уравнения (2), то (cx_0, cy_0) - решение (3).

Мы рассмотрим сразу целое семейство параллельных прямых (3) с разными значениями c . Большому c соответствует прямая, расположенная выше (подставьте в (3) $x=0$, тогда получится $y = c/a$ - чем больше c , тем выше точка пересечения прямой с осью Oy).

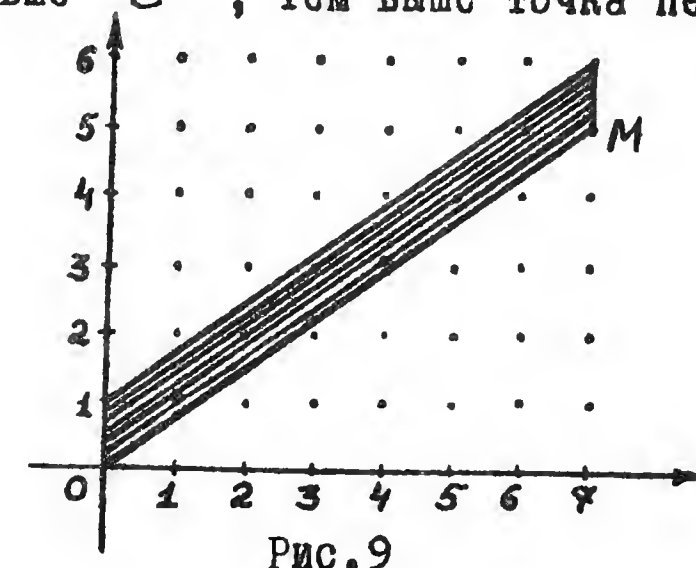


Рис. 9

Рассмотрим теперь все целые точки, лежащие внутри параллелограмма, изображенного на рис. 9 - с вершинами $(0, 0)$, $(0, 1)$,

$(a, b+1)$, (a, b) . Внутри его, очевидно, лежат $(a-1)$ целых точек: на каждой вертикальной прямой $x=1, x=2, \dots, x=a-1$ по одной. Через каждую из этих целых точек проходит прямая, параллельная (I) с уравнением (3). Ни одна прямая не проходит через две из этих точек: ведь целые точки лежат на каждой прямой так, что от одной точки до следующей нужно пройти отрезок, равный стороне OM (так же, как на прямой (I)). Следовательно, все эти прямые соответствуют разным значениям c , и всего их $(a-1)$.

Но заметим, что верхняя сторона параллелограмма идет по прямой, для которой $c=a$; достаточно подставить в уравнение (3) $x=0$, $y=1$, чтобы убедиться в этом. Следовательно, каждому целому числу $c=1, c=2, \dots, c=a-1$ должна обязательно отвечать прямая, проходящая через целую точку (сравните с рассуждением при решении задачи 2.10). В частности, и на прямой $ay - bx = 1$ должна лежать целая точка.

Задача 7.4. а) Начертите прямую $3y - 5x = 1$, через какую целую точку она проходит? Как записать все множество решений этого уравнения в целых числах?

Тот же вопрос для прямых:

б) $3y + 8x = 2$; в) $5y + 8x = 49$;
г) $-42y + 54x = -18$; д) $3x - 2y + 11 = 0$.

Задача 7.5*. Пусть НОД $(a, b) = 1$, $a > 0$. Рассмотрим семейство всевозможных прямых $ay - bx = c$, где c - целое число.

а) На каком расстоянии лежат друг от друга "целые точки" на каждой прямой?

б) Сколько прямых пересекают отрезок оси Oy от точки $(0,0)$ до точки $(0,1)$ (не считая его концов)?

в) Докажите, что соседние прямые расположены на одном и том же расстоянии друг от друга.

г) Найдите расстояние между соседними прямыми ("ширину просеки" между рядами деревьев в направлении $y/x = -a/b$).

Указание к задаче в). На каждой прямой $ay - bx = c$ есть целая точка (x_0, y_0) . Перенесем плоскость параллельно так, чтобы $(0,0)$ перешла в (x_0, y_0) . Докажите, что тогда прямая $ay - bx = 1$ перейдет в $ay - bx = c + 1$ (а $ay - bx = 0$ в $ay - bx = c$).

Задача 7.6. а) Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

б) Нарисуйте на числовой оси красным карандашом целые числа, которые при делении на 4 дают в остатке 1, синим - числа, которые при делении на 6 дают в остатке 3. Как записать множество чисел, удовлетворяющих обоим этим условиям?

в) Найдите общую формулу для чисел, которые при делении на 15 дают остаток 7, а при делении на 25 - остаток 11.

Указание к задаче в). Напишите общую формулу для решений уравнения $15x + 7 = 25y + 11$ в целых числах.

Задача 7.7. Двум мастерам приказали просверлить в рейке длиной 3 метра отверстия на равных расстояниях друг от друга и от концов рейки: одному мастеру - на расстоянии 20 см, другому - 12 см.

а) Сколько всего отверстий будет сделано в рейке?

б) Каково будет наименьшее расстояние между отверстиями?

Замечание. Разумеется, в концах рейки отверстий сверлить не надо.

Задача 7.8. а) Отметим на числовой оси точки, дающие при делении на 12 остаток 5, красным карандашом, а точки, дающие при делении на 18 остаток 13 - синим. Каково будет наименьшее расстояние между красной и синей точкой?

б) Тот же вопрос для двух множеств: чисел, дающих при делении на a_1 остаток r_1 , и чисел, дающих при делении на a_2 остаток r_2 .

Задача 7.9. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

а) $6x - 16y = 220$;
б) $105x + 42y = 56$;
в) $-104x + 65y = 243$;
г) $-35x + 204y = 17$.

Если имеют, то укажите хотя бы одно такое решение и напишите общую формулу для решения. Если нет - докажите, что их не существует.

Задача 7.10. Имеются контейнеры весом 130 кг и 160 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Как это можно сделать (укажите все решения)?

Если Вам трудно отыскать решение уравнения в целых числах, хотя Вы уверены, что они существуют (это следует из теоремы 3) - то не обязательно "подбирать" решение или чертить на очень большом листе клетчатой бумаги прямую. Для этого есть более удобные способы, например, алгоритм Евклида. Его мы и изучим в следующем параграфе.

§ 8. Алгоритм Евклида.

Слово "алгоритм" (иногда пишут "алгоритм" - это то же самое) означает "общий метод, применимый к целому классу задач". Обычно в математике подразумевается, что этот метод можно сформулировать в виде совершенно точного описания - настолько точно и определенно, что любой человек, умеющий только читать и считать, может его выполнить (для любой конкретной задачи, то есть для любых заданных ему значений параметров).¹⁾ Например, вы умеете с помощью циркуля и линейки делить угол на две равные части - то есть, знаете алгоритм, позволяющий любой угол разделить пополам. Вы знаете алгоритм, позволяющий любое натуральное число a , записанное в десятичной системе, разделить на другое натуральное число b с остатком - правило "деления столбиком".

Алгоритм Евклида - это правило, которое позволяет по двум натуральным числам: a и b найти НОД (a, b). В принципе, для этого можно предложить такой алгоритм:

- 1) найти все делители числа a (перепробовав все числа: $1, 2, \dots$, не превосходящие \sqrt{a});
- 2) найти все общие делители чисел a и b (проверив, на какие из делителей a делится b);
- 3) выбрать из общих делителей наибольший.

Или другой алгоритм: разложить оба числа на простые множители и воспользоваться следствием из теоремы 2, § 6. Однако, если разложения на простые множители ни одного из данных чисел не известны, а числа большие, требуется много вычислений.

Алгоритм Евклида позволяет найти НОД (a, b) в этих случаях значительно быстрее, не отыскивая всех делителей ни у одного из чисел a и b .

Что еще важнее - алгоритм Евклида дает нам путь к отысканию решений уравнения $ax + by = c$ в целых числах. Заодно, мы еще раз докажем теорему об этих уравнениях из § 7.

Алгоритм Евклида основан на таком факте.

1) Понятие алгоритма тесно связано с понятием программы для вычислительной машины. Чтобы точно определить понятие "алгоритма", нередко описывают воображаемую "машину" и класс допустимых "программ" для этой машины.

Лемма 2. Пусть $a = bq + r$, тогда $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

Покажем, что у пары чисел (a, b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b, r). Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r , и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a .

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на m . Тогда bq делится на m и $a - bq = r$ делится на m .

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на k , то bq делится на k и $a = bq + r$ делится на k .

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. Найти НОД (273, 1014).

Решение. Выполняем деление с остатком: По лемме 2:

$$\begin{array}{ll} 1014 = 273 \times 3 + 195 & \text{НОД}(273, 1014) = \\ 273 = 195 \cdot 1 + 78 & = \text{НОД}(195, 273) = \\ 195 = 78 \times 2 + 39 & = \text{НОД}(195, 78) = \\ 78 = 39 \times 2 & = \text{НОД}(78, 39) = \\ & = 39 \end{array}$$

Ответ: НОД (273, 1014) = 39.

Метод отыскания наибольшего делителя, состоящий в последовательном применении леммы 2, носит специальное название - алгоритм Евклида.

Задача 8.1. Найдите наибольший общий делитель чисел:

- а) 987654321 и 123456789;
- б) 16484 и 42282;
- в) 7 777 777 777 и 777 777.

Указание к 8.1. в). Здесь удобно использовать задачу 8.3.

Задача 8.2. а). От прямоугольника 324 см х 141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого одна сторона меньше 141 см. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис.10). На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите количество квадратов каждого размера).

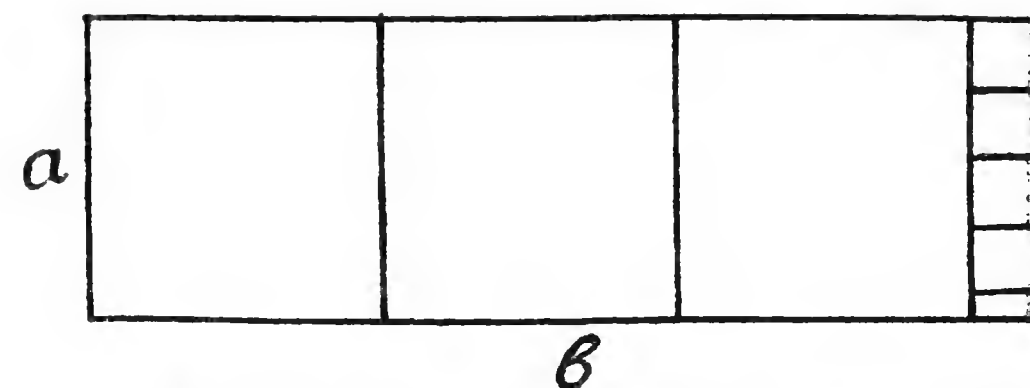


Рис. 10

б) Каковы будут размеры самого последнего, наименьшего квадрата, если такие операции проделать с прямоугольником $a \times b$ (a и b - натуральные числа)?

Алгоритм Евклида в общем случае можно описать так. Если у вас имеется два числа a и b , причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b , и получаем остаток τ_1 , который меньше, чем b . Затем делим число b на τ_1 , и находим остаток τ_2 , который меньше, чем τ_1 . Далее, мы делим число τ_1 на число τ_2 , при этом получаем остаток τ_3 , меньший, чем τ_2 и так далее, пока какой-нибудь остаток τ_{n-1} не разделится на остаток τ_n нацело, без остатка (т.е. $\tau_{n+1} = 0$).

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а все остатки - неотрицательные числа. Последний остаток и есть НОД (a, b). Действительно,

$$\tau_n = \text{НОД}(\tau_n, \tau_{n-1}) = \text{НОД}(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}) = \dots = \\ = \text{НОД}(\tau_2, \tau_1) = \text{НОД}(\tau_1, b) = \text{НОД}(a, b).$$

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 8.2. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида - алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис. II).

На отрезке a откладываем столько раз, сколько это возможно, отрезок b , получаем остаток τ_1 ; на отрезке b откладываем, пока это возможно, τ_1 , получаем остаток τ_2 ; на τ_1 откладываем, пока возможно, τ_2 , получаем τ_3 и т.д.

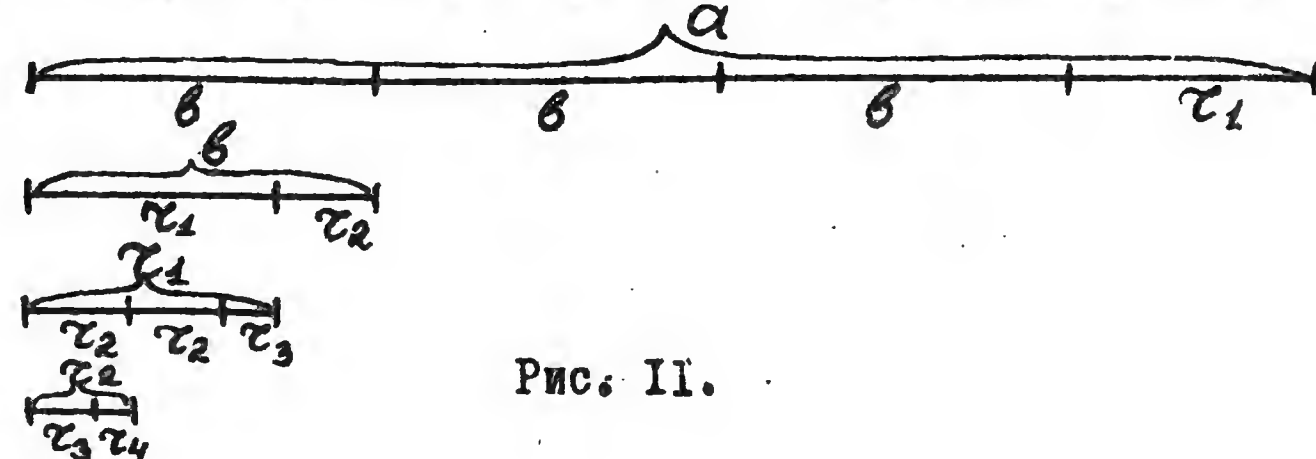


Рис. II.

Правда, для отрезков (длины которых не целые числа) может случиться, что этот процесс никогда не кончится, а будет продолжаться бесконечно (никогда не получится остаток, равный нулю) - это произойдет в том случае, когда отрезки a и b несоизмеримы (вы, вероятно, знаете, например, что диагональ квадрата и его сторона несоизмеримы). Но если этот процесс кончится, то последний не равный нулю остаток даст наибольшую общую меру отрезков a и b - то есть наибольший отрезок d такой, что $a = kd$, $b = ld$, где k и l - целые числа. Это доказывается точно так же, как мы выше с помощью леммы 2 доказали, что алгоритм Евклида, примененный к целым числам, дает НОД (a, b): а именно, у каждой пары отрезков (a, b) , (b, τ_1) , (τ_1, τ_2) , (τ_2, τ_3) , ... наибольшая общая мера будет одна и та же, а если τ_n целое число раз укладывается в τ_{n-1} , то ясно, что их наибольшая общая мера - как раз τ_n .

Задача 8.3. Докажите, что для любых двух целых чисел a и b

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a - b).$$

Указание. Проведите такое же рассуждение, как и в доказательстве леммы 2.

Покажем теперь, как алгоритм Евклида позволяет найти решение уравнения в целых числах. Пусть, например, нужно решить уравнение

$$273x + 1014y = 156 \quad (I)$$

Выше мы нашли $\text{НОД}(273, 1014) = 39$ из цепочки равенств, которые мы перепишем так:

$$\begin{aligned} 1014 - 273 \cdot 3 &= 195 \\ 273 - 195 \cdot 1 &= 78 \\ 195 - 78 \cdot 2 &= 39 \\ 78 - 39 \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку 156 делится на 39: $156 = 39 \cdot 4$, то уравнение (I) имеет решения в целых числах. И цепочка равенств (2) позволяет найти одно из решений, последовательно представив в виде $273x_n + 1014y_n$ (где x_n и y_n - целые) остатки τ_n :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 195 = 1014 - 273 \cdot 3 = 273(-3) + 1014 \cdot 1; \\ \tau_2 &= 78 = 273 - (1014 - 273 \cdot 3) = 273 \cdot 4 + 1014 \cdot (-1) \\ \tau_3 &= 39 = 195 - 78 \cdot 2 = 273 \cdot (-11) + 1014 \cdot 3 \end{aligned}$$

Конечно, удобнее сразу разделить все числа на 39, тогда в уравнении (I) и равенствах (2), (3) будут встречаться меньшие числа:

$$7x + 26y = 4 \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} 26 - 7 \cdot 3 &= 5 \\ 7 - 5 \cdot 1 &= 2 \\ 5 - 2 \cdot 2 &= 1 \\ 2 - 1 \cdot 2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} 5 &= 7 \cdot (-3) + 26 \cdot 1, \\ 2 &= 7 \cdot 4 + 26 \cdot (-1), \\ 1 &= 7 \cdot (-11) + 26 \cdot 3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Итак, мы нашли решение уравнения $7x + 26y = 1$: $x = -11, y = 3$.

Отсюда получаем решение (1): $x = -44, y = 12$.

А общее решение, как следует из теоремы 3: $x = -44 + 26t, y = 12 - 7t$, t - любое целое число.

Например, при $t = 2$ получаем $x = 8, y = -2$.

Тот же способ применим и в общем случае.

Если нужно решить уравнение

$$ay - bx = c$$

(можно считать, что $b > 0$), отыскиваем с помощью алгоритма

$$\begin{aligned} \text{Евклида НОД}(a, b): \quad a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} = d$$

и пишем цепочку равенств, из которой находим представление d в виде $ay_0 - bx_0$, где y_0 и x_0 - целые числа.

Если c делится на $d = \text{НОД}(a, b)$ и $a = a_1d, b = b_1d, c = c_1d$, то числа (c_1x_0, c_1y_0) будут давать решение уравнений

$$ay - bx = c \Leftrightarrow a_1y - b_1x = c_1.$$

А общее решение, как следует из теоремы 3 § 7 -

$$x = c_1x_0 + a_1t, y = c_1y_0 + b_1t.$$

Задача 8.4. Найдите решение в целых числах уравнений:

а) $75y - 39x = 1$;

б) $43x + 250y = 77$;

в) $11715y - 4473x = 6390$.

Задача 8.5. а) Докажите, что

$$\text{НОД}(2^6 - 1, 2^{15} - 1) = 7.$$

б) Докажите, что

$$\text{НОД}(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{\text{НОД}(m, n)} - 1$$

для любых натуральных m и n .

Указание. Не забудьте правила действий со степенями: если $m > n$, то $2^m = 2^{m-n} \cdot 2^n$. Воспользуйтесь тем, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b-a)$ (задача 8.3).

Задача 8.6* а) Докажите, что число $2^{16} + 1$ взаимно просто с каждым из чисел

$$3 = 2 + 1; 5 = 2^2 + 1; 17 = 2^4 + 1; 257 = 2^8 + 1.$$

б) Докажите, что в последовательности

$$2 + 1; 2^2 + 1; 2^4 + 1; 2^8 + 1; 2^{2^n} + 1$$

любые два числа взаимно просты.

Указание. Проверьте равенство

$$2^{16} - 1 = (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1).$$

Задача 8.7* Докажите, что множество простых чисел бесконечно, воспользовавшись предыдущей задачей.

Указание. Рассмотрите простые числа, входящие в разложение на множители чисел последовательности

$$2 + 1; 2^2 + 1; 2^4 + 1; 2^8 + 1; \dots; 2^{2^n} + 1.$$

Задача 8.8. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить по единице к некоторым 23 из них. Докажите, что, повторив эту операцию достаточно число раз, можно сделать все данные числа равными.

Каким условиям должны удовлетворять числа m и n ($m < n$), чтобы была разрешима общая задача: заданы произвольные n целых чисел, разрешается прибавлять по единице к любым m из них и требуется добиться того, чтобы все они стали равными?

§ 9. Идеалы.

Назовем некоторое множество \mathcal{I} целых чисел идеалом, если оно удовлетворяет таким условиям:

(\mathcal{I}_1) Если $x \in \mathcal{I}$, то $kx \in \mathcal{I}$ для любого целого k .

(\mathcal{I}_2). Если $x_1 \in \mathcal{I}$ и $x_2 \in \mathcal{I}$, то $x_1 + x_2 \in \mathcal{I}$.
(Значок \in заменяет слова "принадлежит множеству", читается так: "икс" принадлежит множеству " \mathcal{I} ").

Примеры. 1. Множество всех четных чисел - идеал.

2. Множество всех чисел, делящихся на a - идеал.

3. Множество \mathbb{Z} всех целых чисел - идеал.

4. Множество, состоящее из одного нуля - идеал.

Теорема об идеалах, из которой легко выводятся все основные факты, доказанные выше, звучит так.

Теорема 4. Любой идеал - множество всех чисел, делящихся на a , где a - некоторое целое число.

Таким образом, теорема утверждает, что наш пример 2 - самый общий, и других идеалов не бывает. (Конечно, примеры 1, 3 и 4 - частные случаи соответственно при $a=2, a=1$ и $a=0$).

Доказательство. Если \mathcal{I} содержит хотя бы одно число $b \neq 0$, то наверняка содержит и положительные числа (вместе с b в \mathcal{I} входит и $(-1)b = -b$). Пусть a - наименьшее положительное число, содержащееся в \mathcal{I} . Тогда докажем, что в \mathcal{I} нет чисел, отличных от чисел na (которые, по условию, все входят в \mathcal{I}). Пусть $b \in \mathcal{I}$, $b = ma + r$, $0 < r < a$. Поскольку $(-m)a \in \mathcal{I}$, то $b + (-m)a = b - ma = r \in \mathcal{I}$, но это противоречит выбору a . Теорема доказана.

Итак, согласно теореме 4, любой идеал \mathcal{I} имеет вид $\mathcal{I} = \{x: x = ka, k \in \mathbb{Z}\}$ (\mathbb{Z} означает множество всех целых чисел).

Очевидно, число a , с которым идет речь в теореме, определяется для данного идеала \mathcal{I} однозначно, если наложить еще условие, что $a \geq 0$. Это число назовем образующей идеала \mathcal{I} .

Задача 9.1. Пусть a и b - взаимно простые натуральные числа. Докажите, что множество \mathcal{I} чисел x , для которых bx делится на a - идеал. Чему равна его образующая?

Решение 9.1. Пусть \mathcal{I} - множество чисел x , для которых bx делится на a . Это множество можно обозначить так: $\mathcal{I} = \{x: bx = ay\}$.

Докажем, что \mathcal{I} - идеал. Проверим условие (\mathcal{I}_1):
 $x \in \mathcal{I} \Rightarrow bx = ay \Rightarrow b(kx) = a(ky) \Rightarrow kx \in \mathcal{I}$.

Проверим (\mathcal{I}_2): $x_1, x_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow bx_1 = ay_1, bx_2 = ay_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow b(x_1 + x_2) = a(y_1 + y_2) \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathcal{I}$.

Итак, \mathcal{I} - идеал. Обозначим его образующую через c . Тогда по теореме 4, $\mathcal{I} = \{x: x = kc, k \in \mathbb{Z}\}$. Найдем c . Поскольку ab делится на a , то $ab \in \mathcal{I}$. Значит, $ab = dc$ при некотором d . Поскольку $c \in \mathcal{I}$, то bc делится на $a = dc$, значит, b делится на d . Но поскольку a и b взаимно просты, и оба делятся на d , то $d=1$, значит $c=a$.

Ответ. $\{x: bx = ay\}$ - идеал с образующей a .

Решив задачу 9.1, мы попутно доказали теорему 1 из § 5: если $\text{НОД}(a, b) = 1$ и $bx = ay$, то $x = at, y = bt$.

Задача 9.2. Пусть a и b - целые числа, $\text{НОД}(a, b) = d$. Докажите, что множество $\mathcal{I} = \{x: bx = ya\}$ - идеал. Чему равна его образующая?

Задача 9.3. а). Пусть a и b - целые числа, не равные 0. Докажите, что множество \mathcal{I} чисел z , представимых в виде $z = ax + by$, где x и y - целые - идеал.

б). Докажите, что образующая этого идеала равна $\text{НОД}(a, b)$.

Решение 9.3. Докажем, что множество

$\mathcal{I} = \{z: z = ax + by, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ - идеал.

Проверим (\mathcal{I}_1): $z \in \mathcal{I} \Rightarrow z = ax + by \Rightarrow$

$\Rightarrow zk = a(kx) + b(ky) \Rightarrow zk \in \mathcal{I}$. Проверим (\mathcal{I}_2)

$z_1, z_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow z_1 = ax_1 + by_1, z_2 = ax_2 + by_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 + z_2 = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \Rightarrow z_1 + z_2 \in \mathcal{I}$.

Итак, \mathcal{I} - идеал. Обозначим его образующую через d . Тогда, по теореме 4, $\mathcal{I} = \{z: z = kd, k \in \mathbb{Z}\}$. Поскольку $a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in \mathcal{I}$, то $a = a_1 d$ при некотором a_1 . Аналогично $b = b_1 d$ при некотором b_1 . Таким образом, d - общий делитель a и b . Пусть m какой-то общий делитель a и b . Тогда, поскольку $d \in \mathcal{I}$, то $d = ax_0 + by_0$ при некоторых x_0 и y_0 , значит

d делится на m . Поэтому $d \geq m$ (ясно, что $d \neq 0$).
Таким образом, d - наибольший общий делитель a и b .

Решив задачу 9.3, мы попутно доказали два важных факта:

Уравнение $c = ax + by$ разрешимо в целых числах
в том и только в том случае, если c делится на НОД (a, b)
(теорема 3 а);

НОД (a, b) делится на любой общий делитель a и b
(следствие 3⁰ теоремы 2.)

Задача 9.4. Докажите, что множество чисел, представляемых
в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

(a_1, a_2, \dots, a_n - данные целые числа) - идеал. Чему
равна его образующая?

Задача 9.5. Докажите, что множество чисел, делящихся одно-
временно и на a , и на b - идеал. Чему равна его образующая?

Задача 9.6. а) Докажите, что пересечение нескольких идеалов
- тоже идеал.

б). Чему равна его образующая, если образующие данных идеалов
- a_1, a_2, \dots, a_n ?

Задача 9.7. Найдите образующие следующих идеалов:

а) $\{x : 15x \text{ делится на } 36\}$,

б) $\{x : x = 26x + 65y; x, y \in \mathbb{Z}\}$,

в) $\{x : x \text{ делится на } 8, \text{ на } 14 \text{ и на } 35\}$,

г) $\{x : x = 18x + 42y \text{ и } x \text{ делится на } 5\}$.

Подписано к печати 29.12.75г. 1-36196 Заказ 31

Тираж 10000 экз. Объем 2 п.л. Цена 5 коп.

Ротапринт института содержания и методов обучения АПН СССР

Ул. Макаренко д. 5/16

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Вы, вероятно, знаете, что любое целое положительное число можно единственным способом разложить в произведение простых множителей: так, например,

$$400 = 2^4 \cdot 5^2; 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13; 290981 = 43 \cdot 67 \cdot 101.$$

Более простой факт: если произведение $m \cdot n$ делится на 7, то хотя бы одно из чисел m или n должно делиться на 7.

Эти факты считаются очевидными. Между тем доказать их не так просто. Это мы сделаем позже, а начнем с самых простых утверждений, относящихся к делимости целых чисел.

Всюду латинскими буквами: a, b, c, m, n, x, y и т.д. мы обозначаем целые числа.

З а д а н и е №

Обязательные задачи.

- | | | |
|-----------|--------------|------------------------|
| 1) I.4 б. | 5) 2.3 а, в. | 9) 3.1 а, б. (см. 3.2) |
| 2) I.6. | 6) 2.5 б. | 10) 4.1 а, б. |
| 3) I.8. | 7) 2.8 а, г. | 11) 4.4 г. |
| 4) I.9 д. | 8) 2.10 б. | 12) 6.4 а, б. |

Дополнительные задачи.

- 13) I.7. 14) 2.6. 15) 2.9. 16) 3.2. 17) 5.3. 18) 6.7 б.

З а д а н и е №

Обязательные задачи.

- | | | |
|--------------|-----------|------------|
| 1) 7.2 а, б. | 5) 7.6 а. | 9) 8.2 а. |
| 2) 7.2 в, г. | 6) 7.6 б. | 10) 8.3. |
| 3) 7.3 б, в. | 7) 7.7 а. | 11) 8.4 а. |
| 4) 7.4 а. | 8) 8.1 б. | |

Дополнительные задачи.

- 12) 7.5 а. 13) 7.5 г. 14) 7.10. 15) 8.4 б. 16) 8.6 б.

Критерии оценок по каждому из заданий.

За обязательные задачи: "5" - решены все задачи;
"4" - решено не менее 9 задач;
"3" - решено не менее 6 задач.

За дополнительные задачи: "5" - решено не менее 4 задач;
"4" - решено не менее 2 задач.

Срок присылки задания №

№

§ I. Делимость суммы, разности и произведения.

Мы говорим, что целое число a делится на целое число b , если существует такое число k , что $a = bk$. В таком случае число b называется делителем числа a .

Сразу выведем два простых утверждения:

1°. Если числа a и b делятся на c , то и их сумма $a+b$ и их разность $a-b$ делятся на c ;

2°. Если a делится на c , а b делится на d , то их произведение ab делится на cd .

Докажем 1°. Поскольку a делится на c , то $a = kc$, где k - некоторое целое число. Точно также $b = mc$, где m - целое число. Поэтому $a+b = (k+m)c$, $a-b = (k-m)c$, откуда следует, что каждое из чисел $a+b$ и $a-b$ делится на c .

Докажем 2°. Пусть $a = kc$, $b = md$. Тогда $ab = (km)cd$, откуда следует, что ab делится на cd .

Задача I.1. Докажите, что если a делится на b , а b делится на c , то a делится на c .

Задача I.2. Докажите, что если каждое из чисел a и b делится на c (где $c \neq 0$), то целое число $\frac{ab}{c}$ делится на a и на b .

Задача I.3. а) Докажите, что если a делится на b , то a^2 делится на b^2 .

б) Докажите, что если a^2 делится на $a+b$, то и b^2 делится на $a+b$.

Задача I.4. Докажите, что если ab делится на c и $a+b$ делится на c , то: а) a^2+b^2 делится на c ;
б) a^3+b^3 делится на c^2 .

Решение I.4. а) Выразим a^2+b^2 через $a+b$ и ab :

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

По условию, $(a+b)$ делится на c , следовательно, $(a+b)^2$ делится на c . По условию, ab делится на c , поэтому $2ab$ делится на c . Так как число a^2+b^2 равно разности двух чисел,

делящихся на C , согласно утверждению I^0 , оно само делится на C .

Задача I.5. Докажите, что $a^5 + b^5$ делится на $a + b$.

Решение. I.5. Выражение $a^5 + b^5$ разлагается на множители:

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

Если a и b - целые, то оба множителя будут целыми числами. Отсюда следует, что $a^5 + b^5$ делится на $a + b$.

Задача I.6. Докажите, что $a^3b + b^3a$ делится на $a^2b + b^2a$.

Задача I.7. Докажите, что $a^4 + 4b^4$ делится на $a^2 + 2ab + 2b^2$.

Задача I.8. Докажите, что если $ab + cd$ делится на $a + c$, то $ad + bc$ делится на $a + c$ (здесь $a + c \neq 0$).

Указание. Разложите сумму $ab + cd + ad + bc$ на множители.

Задача I.9. Какие из следующих утверждений верны, а какие - нет: а) если одно слагаемое делится на 15, а другое не делится на 15, то их сумма не делится на 15;

б) если каждое из двух слагаемых не делится на 15, то их сумма не делится на 15;

в) если каждый из двух сомножителей не делится на 15, то их произведение не делится на 15;

г) если один из двух сомножителей делится на 15, а другой не делится на 15, то произведение делится на 15.

д) если число делится на 15 и на 21, то оно делится на $15 \cdot 21 = 315$?

Решение I.9. а) Это утверждение верно. Докажем, что. Пусть $a + b = c$, причем a делится на 15, а b не делится на 15. Докажем, что c не делится на 15. Предположим противное: пусть c делится на 15. Но тогда по утверждению I^0 разность $b = c - a$ делится на 15. Мы получили противоречие с условием задачи.

Решение I.9. б) Это утверждение неверно. Приведем противоречащий пример: $7 + 8 = 15$. Здесь каждое из двух слагаемых не делится на 15, а то время как их сумма делится на 15.

Важное замечание. Подчеркнем, что когда спрашивается: "верна какая-то теорема (какое-то математическое утверждение) или нет" - то имеется в виду: "верно ли это при всех значениях букв, во всех возможных случаях?". Поэтому, когда мы доказываем, что теорема верна, мы должны проводить рассуждение так, чтобы оно годилось для всех случаев. Если же мы хотим показать, что теорема неверна, то достаточно привести один опровергающий пример; так мы построили ответ на вопрос I.9 б).

2. Деление с остатком.

Отметим на числовой оси точки, соответствующие целым числам (рис. I). Пусть b - некоторое натуральное (целое положительное)

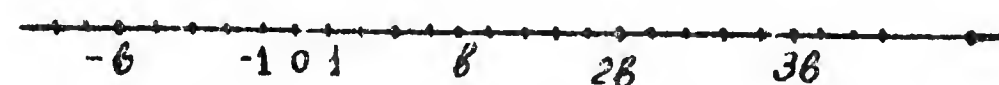


рис. I.

число. Выделим на рисунке все целые числа, I^1 делящиеся на b . Они расположены на оси на равном расстоянии друг от друга. Эти числа называют еще кратными числу b .

Пусть теперь какое-то число a не кратно b . Тогда оно попадает между двумя числами, кратным b - между qb и $(q+1)b$ (рис. 2)



Рис. 2.

По этому поводу можно сформулировать такое утверждение.

Если a и b - целые числа, причем b больше нуля, то существует такое целое число q , что $a = bq + r$, где "остаток" r - целое число, удовлетворяющее неравенствам $0 \leq r < b$. Эти числа q и r определяются (по данным a и b) единственным образом.

Пусть числа a и b заданы своими записями в десятичной системе. Чтобы найти "частное" q и остаток r , не нужно, конечно, рисовать отрезок длины a на числовой оси и "укладывать" на нем много раз отрезок длины b . Для этого существует более рациональный способ. Это - известное всем правило деления одного числа a на другое число b "столбиком". Это деление можно продолжать до тех пор, пока остаток не станет меньше, чем делитель. Например, если делить 1973 на 31, то при делении получим частное 63 и остаток 20:

$$\begin{array}{r} 1973 : 31 \\ \underline{186} \\ 113 \\ \underline{93} \\ 20 \end{array}$$

Вместо "точки, соответствующие числам" будем говорить просто "числа".

или $1973 = 31 \cdot 63 + 20$.

Замечание про отрицательные числа. В утверждении, обведенном в рамочку, мы считаем, что "делитель" δ - положительное число, и про остаток мы сказали, что $\gamma \geq 0$, но про "делимое" a мы ничего такого не говорили. Разберем пример, когда делимое a - отрицательное число. Пусть $a = -23$, $\delta = 7$. Тогда $-23 = (-4) \cdot 7 + 5$, где $0 \leq 5 < 7$. Следовательно, остаток при делении (-23) на 7 равен 5.

Задача 2.1. Какой остаток дает число:

- а) 1005 при делении на 13?
- б) 1001 при делении на 11?
- в) 1111 при делении на 37?
- г) (-150) при делении на 19?
- д) (-54321) при делении на 4?

Задача 2.2. Докажите, что числа

- а) 10^4 и 10^6 ;
- б) 10^5 и -1 ;
- в) 123456789 и 9876543210

дают одинаковые остатки при делении на 11.

Решение 2.2. а) Имеем: $10^4 = 11 \cdot 909 + 1$, $10^6 = 11 \cdot 90909 + 1$. Следовательно, оба числа дают при делении на 11 один и тот же остаток 1.

Заметим, что условие: x дает при делении на m остаток

γ (где $0 \leq \gamma < m$), эквивалентно такому: $x = mt + \gamma$ где t - целое число.

Пусть в этой формуле t пробегает все множество целых чисел $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, в то время как m и γ фиксированы, не меняются (скажем, $m = 8$, $\gamma = 5$, тогда $x = 8t + 5$). При этом формула дает все возможные числа, для которых остаток от деления на m равен γ . Если изобразить эти числа на оси, то получится множество точек, отстоящих друг от друга на расстоянии m :



(на нашем рисунке изображено множество чисел $x = 8t + 5$).

Таким образом, если задано $m > 0$, то все множество целых чисел можно разбить на m классов: к одному классу отнести все числа, дающие при делении на m остаток 1, к другому - остаток

2, и так далее. Эти классы можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= mt + 1, \\ x &= mt + 2, \\ &\dots \\ x &= mt + (m-1) \end{aligned}$$

и, наконец, последний (вернее "нулевой") класс $x = mt$. В него входят все числа, дающие при делении на m остаток 0.

Например, если $m = 8$, то всего классов 8; каждое целое число x может попасть в один из классов $x = 8t$, $x = 8t + 1$, \dots , $x = 8t + 7$.

Заметим, что если m задано, то два числа x_1 и x_2 попадают в один и тот же класс в том и только в том случае, если их разность $x_1 - x_2$ делится на m .

Второе решение задачи 2.2. а) Поскольку $10^6 - 10^4 = (100-1) \cdot 10^4 = 99 \cdot 10^4$ делится на 11, то числа 10^6 и 10^4 дают одинаковые остатки при делении на 11.

Задача 2.3. а) Нарисуйте числовую ось и отметьте на ней целые числа, которые при делении на 7 дают в остатке 3. (Масштаб и начало отсчета выберите так, чтобы по крайней мере все числа между (-20) и $(+20)$ поместились).

б) Каково наименьшее из чисел, больших 1975, которые при делении на 7 дают в остатке 3?

в) Каково наибольшее из чисел, меньших 2001, которые при делении на 11 дают остаток 8?

Решение 2.3. б) Разделим 1975 на 7 с остатком: $1975 = 282 \cdot 7 + 1$. Остаток равен 1. Следовательно, искомое число: $1975 + 2 = 1977$, это число при делении на 7 дает остаток 3.

Задача 2.4. В одном из подъездов 8-этажного дома на первом этаже находятся квартиры от № 97 до № 102. На каком этаже и в каком (по номеру) подъезде находится квартира № 178 (на всех этажах одинаковое число квартир и все подъезды устроены одинаково).

Задача 2.5. а) Найдите какое-нибудь шестизначное число, которое делится на 321.

б) Найдите наименьшее такое число.

Задача 2.6. Было 7 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на 7 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 7 кусков, и так сделали несколько раз. Могли ли в результате получить 1973 кусков?

Указание. Как возрастет число кусков, когда один разрежут на 7?

Задача 2.7. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число $n^2 + 3n + 5$ при делении на число $n + 1$?

Решение 2.7. Перепишем данное число $n^2 + 3n + 5$ так:

$$n^2 + 3n + 5 = (n + 1)(n + 2) + 3.$$

Из этой записи видно, что если число $n + 1$ больше 3, то остаток всегда равен 3. Если $n + 1 = 2$ (при $n = 1$), то, поскольку $3 = 1 \cdot 2 + 1$, остаток равен 1. Если $n + 1 = 3$ (при $n = 2$), то остаток равен 0.

Задача 2.8. Какой остаток (при каждом натуральном n) дает число:

а) $2n^2 + 5n - 3$ при делении на $n + 4$?

б) $4n + 7$ при делении на $2n + 1$?

в) $4n + 5$ при делении на $2n + 3$?

г) $n^2 + 1$ при делении на 4?

Указание. г) Рассмотрите два случая:

(1) n - четно,

(2) n - нечетно.

Задача 2.9.* На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 книг в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько, самое меньшее, может быть книг на столе?

Указание. Чтобы число делилось на 4, на 5 и на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 60. Это один из тех "очевидных" фактов, которые мы научимся строго доказывать ниже.

Задача 2.10.* а) Докажите, что из 8 целых чисел всегда можно выбрать два таких, разность которых делится на 7.

б) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать 15 таких, у которых разность любых двух делится на 7? а 16 таких чисел?

в) Верно ли, что из 100 целых чисел всегда можно выбрать два таких, у которых сумма делится на 7?

г) Докажите, что из 5 чисел всегда можно выбрать два таких, у которых разность квадратов делится на 7.

Решение 2.10. а) Пусть даны любые 8 целых чисел. Найдем остаток каждого из них от деления на 7. Всего существует 7 возможных остатков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. А у нас имеется 8 остатков. Значит,

хотя бы два из них совпадают. Следовательно, два из наших чисел давали один и тот же остаток при делении на 7: $a_1 = 7q_1 + r$, $a_2 = 7q_2 + r$. Тогда их разность $a_1 - a_2 = 7(q_1 - q_2)$ должна делиться на 7.

Указание к задаче г). Вместе с каждым остатком r рассмотрите "дополнительный" - $(7 - r)$.

Задача 2.11. Какие из следующих утверждений верны, а какие - нет:

а) если a при делении на 8 дает в остатке 3, то при делении на 4 оно дает в остатке 3;

б) если a при делении на 4 дает в остатке 3, то и при делении на 8 оно дает в остатке 3;

в) если a при делении на 15 дает в остатке 7, то при делении на 5 оно не может дать в остатке 3;

г) если a при делении на 15 дает в остатке 3; то при делении на 9 оно не может дать в остатке 6.

Решение 2.11. а) Утверждение верно. Пусть $a = 8k + 3$, тогда $a = 4(2k) + 3$.

Решение 2.11. б) Утверждение неверно. Например, $a = 7$. Тогда $7 = 4 \cdot 1 + 3$, но $7 = 8 \cdot 0 + 7$, то есть остаток при делении 7 на 4 равен 3, а при делении на 8 равен 7.

Задача 2.12. а) Двое играют в такую игру. Первый называет любое целое число от 1 до 5. Затем второй к этому числу прибавляет любое из целых чисел от 1 до 5, потом первый к полученной сумме снова прибавляет любое из чисел от 1 до 5 и так далее. Выигрывает тот, кто первым получит число 50. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер? Какова выигрывающая стратегия: какой ход нужно сделать вначале и как играть дальше, чтобы выиграть?

б) Решите ту же задачу, если разрешается называть числа от 1 до 5, а требуется получить число n .

Указание к задаче 2.12. б) Пусть остаток от деления n на 6 равен r . Если $r = 0$, то выигрывает второй; его стратегия: на ход "5" отвечать ходом "6-5". Если $r > 0$, то выигрывает первый; правильный первый ход - " r ".

3. Делители.

В этом параграфе, а также в §§ 4, 5 и 6 мы будем рассматривать только натуральные, то есть целые положительные числа. Возьмем

какое-то целое число a и выпишем все его делители. Например, у числа $a = 48$ множество \mathcal{D} всех его делителей состоит из 10 чисел:

$$\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}.$$

Множество \mathcal{D} делителей данного числа a всегда обладает некоторой симметрией, которую мы сейчас объясним.

Если b - делитель числа a , то $a = bk$, где k - целое число. Конечно, k при этом тоже будет делителем числа a . Такие два делителя, произведение которых равно a , называют дополнительными. Например, 3 и 16 - дополнительные делители числа 48. Сопоставляя каждому делителю дополнительный, мы получим взаимнооднозначное отображение множества \mathcal{D} на себя. Например, для числа $a = 48$ это отображение можно задать так:

Делитель	1	2	3	4	6	8	12	16	24	48
Дополнительный делитель	48	24	16	12	8	6	4	3	2	1

Задача 3.1. Приведите пример числа, имеющего:

а) ровно 5 делителей; б) ровно 6 делителей.

Задача 3.2*. Докажите, что если число не является полным квадратом, то у него четное количество делителей, а если является квадратом - то нечетное.

Задача 3.3*. Пусть целое число a четно и не делится на 4. Докажите, что у числа a столько же четных делителей, сколько нечетных.

Указание. Постройте взаимнооднозначное отображение множества четных делителей числа a на множество его нечетных делителей.

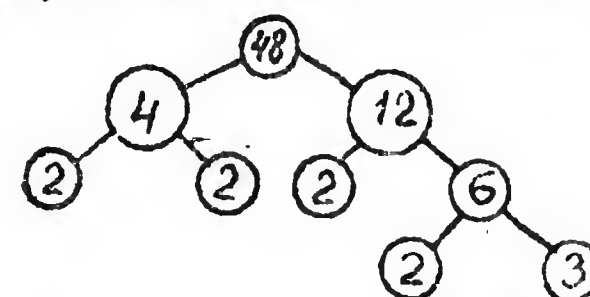
Каждое натуральное число a , большее 1, имеет, по крайней мере, два делителя: 1 и a . Число a называется простым, если у него нет других делителей, и составным - если они есть. Вот первые десять простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Можно доказать (см. задачи 4.4г или 8.8), что существует бесконечно много простых чисел. Это знал еще Евклид.

§ 4. Простые числа.

Каждое натуральное число можно разложить в произведение простых чисел.

Действительно, пусть нам дано составное число a . Мы можем

разложить его в произведение двух множителей, меньших a . Если среди них есть хотя бы один не простой, то мы можем и его разложить в произведение двух множителей. Если среди них опять будут составные, они опять разлагаются на множители и т.д.



$$\begin{aligned} 48 &= \\ &= 4 \cdot 12 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3. \end{aligned}$$

Это процесс не может продолжаться бесконечно, поскольку каждый сомножитель меньше самого числа. (В нашей схеме на каждом "этаже" числа меньше, по крайней мере, вдвое, чем на предыдущем "этаже"). В результате мы приходим к разложению на простые множители.

Обычно разные простые множители собирают вместе и записывают разложение так:

$$48 = 2^4 \cdot 3,$$

в общем случае

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

где p_1, p_2, \dots, p_m - простые числа. (Конечно, пока не ясно, почему такое разложение единственно. Это мы докажем ниже в § 6).

Чтобы начать процесс разложения данного числа a в произведение простых, нужно найти хотя бы один простой множитель. Никакого простого способа для этого не существует; если про число a заранее ничего неизвестно, приходится перебирать простые числа по очереди испытывать, делится ли a на 2, 3, 5 и т.д.

Пример. Разложим число 1970 на простые множители. Оно четное - делится на 2.

$$1970 = 2 \cdot 985.$$

Далее, 985 явно делится на 5

$$985 = 5 \cdot 197.$$

Пробуем делить 197 на 7, 11, 13 - не делится. Далее можно не пробовать; поскольку $17^2 = 289 > 197$, то 197 не может иметь ни одного делителя, отличного от 1 и 197, то есть 197 - простое. (Если $197 = ak$, где $197 > a > 17$, то $1 < k < 17$, а таких делителей 197 не имеет). Итак, $1970 = 2 \cdot 5 \cdot 197$.

Задача 4.1. а) Докажите, что если четырехзначное число p не делится ни на одно простое число от 2 до 97, то p - простое.

б) Докажите, что каждое составное число a имеет простой

делитель p такой, что $p^2 \leq a$.

Задача 4.2. Разложите на простые множители числа 1973, 1974, 1975, 1976, 1977.

Задача 4.3. Разложите на простые множители число $2^{2^y} - 1$.

Указание. Это число делится на $2^{12}-1, 2^{12}+1, 2^6+1, 2^y-1, 2^y+1$ и т.п.

Задача 4.4.* а) На столе 211 книг. Проверьте, что если их связывать по 2, 3, 5 или 7 книг в пачку, то всегда остается одна лишняя.

б) Сколько должно быть книг на столе, чтобы всегда оставалась одна лишняя при связывании по 2, 3, 5, 7, 11, 13 штук в пачку?

в) Пусть p_1, p_2, \dots, p_m — любые простые числа. Придумайте число, которое при делении на каждое из этих чисел p_i дает остаток i ($i = 1, 2, \dots, m$).

г) Докажите, что, кроме p_1, p_2, \dots, p_m , существуют и другие простые числа.

Указание. Любой простой делитель числа N , построенного в задаче в), отличен от p_1, \dots, p_m .

Задача 4.5.* Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k+3$.

Задача 4.6. Назовем четное число "просто четным", если оно не раскладывается в произведение двух четных. Верны ли следующие утверждения:

а) каждое четное число можно разложить в произведение просто-четных;

б) такое разложение единственно (с точностью до порядка сомножителей)?

Задача 4.7. Найдите все простые числа p такие, что

а) число p^2+13 — тоже простое;

б)* число p^2+14 — тоже простое.

§ 5. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа.

Пусть a и b — два целых числа, не равные одновременно нулю. Рассмотрим все числа, на которые делятся и a , и b одновременно. Выберем из них наибольшее число и назовем его наибольшим общим делителем. Далее будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b через $\text{НОД}(a, b)$.

Пример. Общие делители чисел 48 и 30: 1, 2, 3, 6.

Таким образом, отсюда видно, что $\text{НОД}(48, 30) = 6$.

Точно также легко проверить, что $\text{НОД}(4, 12) = 4$, $\text{НОД}(21, 91) = 7$, $\text{НОД}(15, 28) = 1$.

Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Задача 5.1. Докажите, что если $\text{НОД}(a, b) = d$ и $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, то числа a_1, b_1 взаимно просты.

Задача 5.2. Пусть p — простое. Докажите, что либо a делится на p , либо $\text{НОД}(a, p) = 1$.

Задача 5.3. Верно ли, что если $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, c) = d$, то и $\text{НОД}(a, c) = d$?

Задача 5.4. Выпишите делители каждого из чисел 441 и 686, их общие делители и найдите $\text{НОД}(441, 686)$.

Задача 5.5. Сократите дробь $78/195$. (Разделите числитель и знаменатель на наибольшее возможное целое число).

Задача 5.6. а) Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 192 белых и 264 красных георгинов?

б) Каков будет ответ в общем случае, если белых георгинов a штук, а красных — b штук?

Задача 5.7. Выберите из следующих чисел всевозможные пары взаимно простых чисел: 14, 18, 21, 35, 45, 60, 78, 99.

Задача 5.8. а) Нарисуйте числовую ось и отметьте на ней целые числа x , для которых $\text{НОД}(x, 12) = 1$ (красным цветом), $\text{НОД}(x, 12) = 3$ (синим цветом) и $\text{НОД}(x, 12) = 4$ (зеленым цветом).

б) Найдите наибольшее трехзначное число x , для которого $\text{НОД}(x, 540) = 36$.

Задача 5.9. При каких натуральных n будут взаимно просты числа:

а) $2n+3$ и $n+1$?

б) $3n+1$ и $5n+2$?

в) n^2+1 и $n+3$?

Решение 5.9 б. Предположим, что числа $3n+1$ и $5n+2$ имеют общий делитель d . Тогда число $3(5n+2) - 5(3n+1) = 1$ тоже имеет делитель d . Значит, $d = 1$. Следовательно, $3n+1$ и $5n+2$ взаимно просты при любом n .

Теперь сформулируем основной факт, в который упирается доказательство единственности разложения на простые множители.

Теорема I. Если числа a и b взаимно просты и произведение bx делится на a , то x делится на a .

То же самое можно сформулировать, введя новые буквы, так.

Теорема I'. Если числа a и b взаимно просты и $bx = ay$, то существует t такое, что $x = at$ и $y = bt$.

В следующем параграфе (§ 6) мы докажем, исходя из этой теоремы, основную теорему арифметики. В § 7 мы дадим геометрическое объяснение теоремы I. А в § 9 мы приведем короткое алгебраическое доказательство теоремы I.

Задача 5.10. а) Рассмотрим такое отображение множества

$$X = \{0; 1; 2; \dots; 49\}$$

в себя: каждому числу x ставится в соответствие остаток от деления числа $7x$ на 50. Будет ли это отображение взаимнооднозначным?

б) Тот же вопрос для такого отображения того же множества

$X: x \rightarrow$ остаток от деления числа $8x$ на 50.

в)* Для каких чисел a и b следующее отображение множества $X = \{0; 1; \dots; b-1\}$ в себя:

$x \rightarrow$ остаток от деления числа ax на b

будет взаимнооднозначным?

Задача 5.11. Найдите число, при делении на которое три числа: 480608, 508811 и 723317 дают одинаковые остатки.

Задача 5.12. Докажите, что для любого $n > 2$ количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним, всегда четно.

Это количество обозначается обычно через $\varphi(n)$ (φ — "функция Эйлера"); например, $\varphi(3) = 2$; $\varphi(4) = 2$; $\varphi(5) = 4$.

§ 6. Основная теорема арифметики.

В § 3 мы показали, что всякое число можно разложить на простые множители. Теперь, пользуясь теоремой I, мы можем доказать больше.

Теорема 2. ("Основная теорема арифметики").

Каждое натуральное число разлагается на простые множители единственным образом.

Доказательство. Сначала докажем такую лемму.

Лемма I. Если числа q, p_1, p_2, \dots, p_n — простые и произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ делится на q , то одно из чисел p_i равно q .

Прежде всего заметим, что если простое число p делится на простое число q , то $p = q$ (в противном случае, если $p \neq q$, то p и q взаимно просты — простое число, по определению, не имеет делителей, кроме самого себя и единицы).

Отсюда сразу следует утверждение леммы для $n=1$. Для $n=2$ оно вытекает прямо из теоремы I: если $p_1 p_2$ делится на q и $p_1 \neq q$, то p_2 делится на q (то есть $p_2 = q$).

Доказательство леммы для $n=3$ проведем так. Пусть $p_1 p_2 p_3$ делится на q . Если $p_3 = q$, то все доказано. Если $p_3 \neq q$, то, согласно теореме I, $p_1 p_2$ делится на q . Таким образом, случай $n=3$ мы свели к уже рассмотренному случаю $n=2$.

Точно так же от $n=3$ мы можем перейти к случаю $n=4$, затем — к $n=5$, и вообще, предполагая, что для $n=k$ утверждение леммы доказано, мы можем легко доказать его для $n=k+1$. Это убеждает нас, что лемма верна для всех n .

(Такой способ рассуждений называется доказательством по индукции).

Теперь докажем, наконец, теорему 2.

Предположим, что имеется два разложения числа a на простые множители:

$$a = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_c.$$

Так как правая часть делится на q_1 , то и левая часть... равенства должна делиться на q_1 . Согласно лемме I, одно из чисел $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ равно q_1 . Сократим обе части равенства на q_1 .

Проведем такое же рассуждение для q_2 , затем для q_3, \dots , для q_c . В конце концов справа сократятся все множители и останется 1. Естественно, и слева не останется ничего, кроме 1.

Отсюда мы заключаем, что два разложения $p_1 p_2 \dots p_n$ и $q_1 q_2 \dots q_c$ могут отличаться только порядком сомножителей.

Используя основную теорему арифметики, можно доказать такие предложения.

I.⁰ Для того, чтобы число a делилось на число b , необходимо и достаточно, чтобы каждый простой множитель, входящий в разложение числа b , входил и в разложение числа a ; причем,

если простой множитель входит в разложение b K раз, то в разложении числа a он должен входить не менее K раз.

2°. Пусть a и b разложены на простые множители. Тогда, чтобы найти НОД(a, b), нужно перемножить все общие простые множители чисел a и b ; причем, если p входит в разложение b K раз, а в разложении a ℓ раз и $K \leq \ell$, то в разложение НОД(a, b) множитель p должен входить K раз.

3°. Пусть c - какой-нибудь общий делитель чисел a и b , а $d = \text{НОД}(a, b)$ - наибольший общий делитель этих чисел. Тогда d обязательно делится на c .

4°. Пусть число a делится на b и c , причем b и c взаимно просты. Тогда a делится на произведение bc .

5°. Пусть число a делится на b и на c , и пусть $\text{НОД}(b, c) = d$. Тогда a делится на целое число $bc/d = k$. Это число k называется наименьшим общим кратным b и c :
 $bc/\text{НОД}(b, c) = \text{НОК}(b, c)$.

Задача 6.1. а) Выписать все делители числа $7^2 \cdot 11^3$. Сколько делителей имеет число:

б) 7^m ? в) $7^m 11^n$? г) $3^e 7^m 11^n$?

Решение задачи. а) Согласно 1°, это будут числа $7^k \cdot 11^\ell$, где $k \leq 2$, $\ell \leq 3$. Их удобно записать в такую таблицу:

1	11	11^2	11^3
7	$7 \cdot 11$	$7 \cdot 11^2$	$7 \cdot 11^3$
7^2	$7^2 \cdot 11$	$7^2 \cdot 11^2$	$7^2 \cdot 11^3$

Всего их таким образом, 12 штук.

Задача 6.2. Докажите, что если a^n делится на b^n , то a делится на b . (Сравните с задачей 1.3).

Задача 6.3. Пусть $x^n = y^m$, где x и y - целые числа, $\text{НОД}(m, n) = 1$. Докажите, что существует такое целое z , что $x = z^m$, $y = z^n$.

Задача 6.4. а) Найдите наименьшее число, которое делится на 36, 57, 95.

б) Найдите наибольшее число, на которое делятся числа 576, 180, 9060.

Задача 6.5. Найдите наименьшее целое число, половина которого - полный квадрат, третья часть - полный куб, четвертая часть - пятая степень целого числа.

Задача 6.6. Чему равно наименьшее общее кратное:

а) $3^2 \cdot 5 \cdot 7$ и $3 \cdot 5^3 \cdot 11^2$? б) 288 и 324?

Задача 6.7.* Сколько существует чисел, меньших числа a и взаимно простых с ним, если

а) $a = 3^6$;

б) $a = 2^6 \cdot 3^5$;

в) $a = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 7^4$.

Задача 6.8.* Докажите, что если p простое, то не существует пелых m и $n \neq 0$ таких, что $pm^2 = n^2$.

Задача 6.9. Найдите наименьшее натуральное число x , которое дает:

а) остаток 1 при делении на каждое из чисел от 2 до 15;

б)* остаток 2 при делении на 3, остаток 3 - при делении на 4, остаток 4 - при делении на 5, ..., остаток 19 - при делении на 20.

Задача 6.10. а) На какую степень числа 3 делится число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 99$?

б) Каким количеством нулей оканчивается десятичная запись числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$?

Задача 6.11. а) Придумайте три числа: a , b и c так, чтобы наибольший общий делитель любых двух из них был больше 1, а наибольший общий делитель всех трех чисел, $\text{НОД}(a, b, c)$, равнялся 1.

б) Докажите, что наименьшее число, делящееся на a , b и c , всегда равно

$$\text{НОК}(a, b, c) = \frac{abc \cdot \text{НОД}(a, b, c)}{\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОД}(b, c) \cdot \text{НОД}(a, c)}$$

§ 7. Прямые на решетке. Линейные уравнения.

Начнем с решения такой задачи.

Задача 7.1. Пусть на клетчатой бумаге нарисован прямоугольник размерами $a \times b$ клеток (стороны прямоугольника идут по линиям сетки). Проведем диагональ и отметим все узлы сетки, которые на ней лежат. На сколько частей эти узлы делят диагональ?

Узлами мы называем точки, где пересекаются линии сетки.

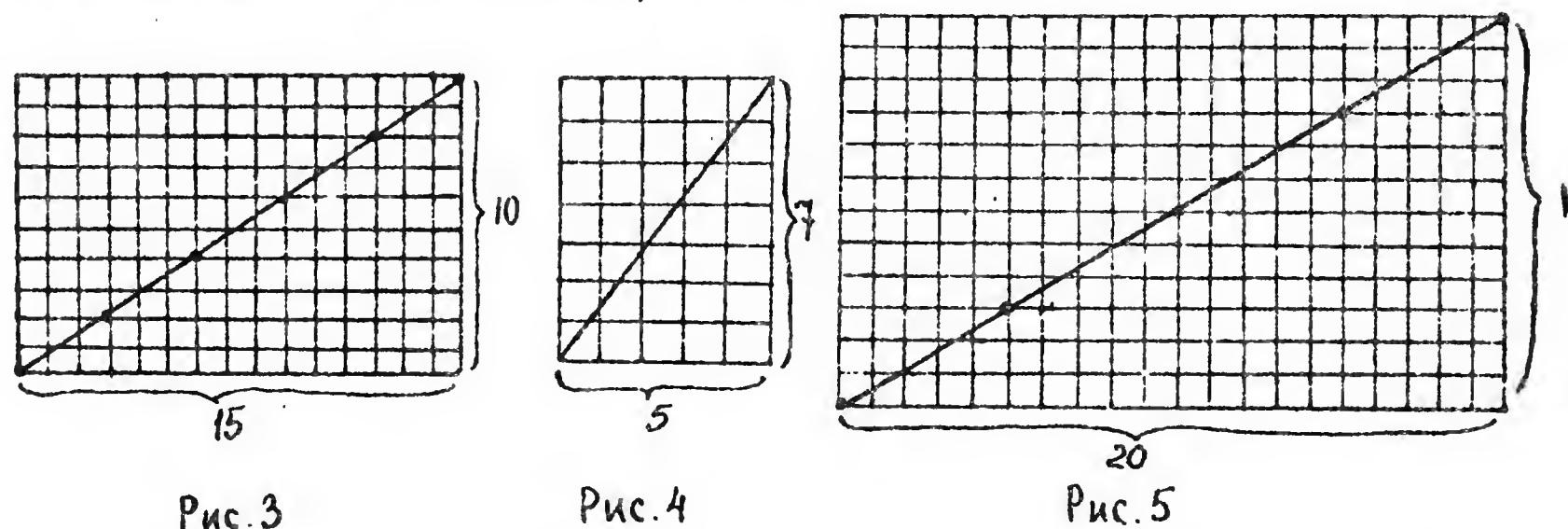
Прежде чем решать задачу в общем виде, рассмотрим несколько примеров.

На рис. 3 на клетчатой бумаге взят прямоугольник 10×15 . Мы видим, что узлы делят диагональ на равные части, и число частей

равно 5.

Диагональ прямоугольника 5×7 (рис. 4) вообще не проходит через узел, лежащий внутри прямоугольника; число частей - 1.

Для прямоугольника 12×20 (рис. 5) диагональ разбивается узлами решетки на 4 одинаковых отрезка (каждый из них служит диагональю прямоугольника 3×5 клеток).



Нарисуйте еще несколько прямоугольников на клетчатой бумаге. Проверьте, скажем, что диагональ прямоугольника 4×10 делится узлами на 2 равных части, прямоугольника 9×15 - на 3, 14×35 - на 7, 20×36 - на 4.

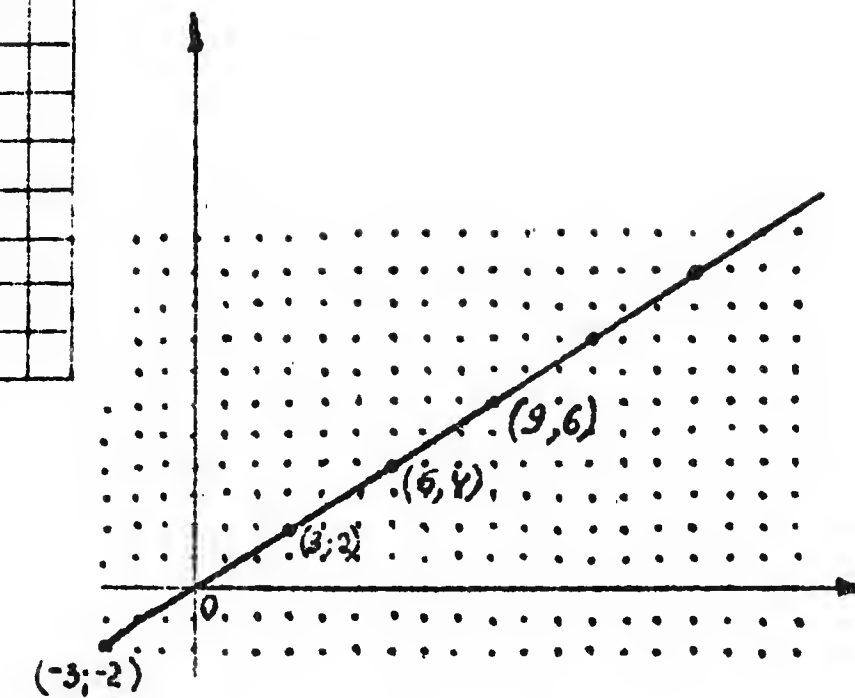
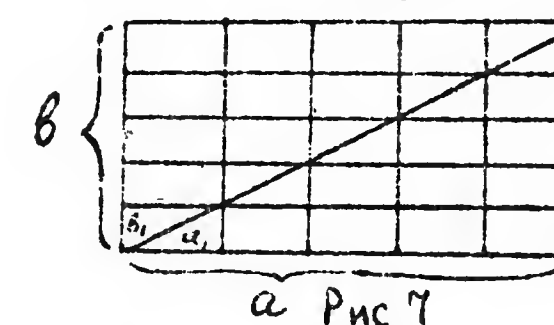
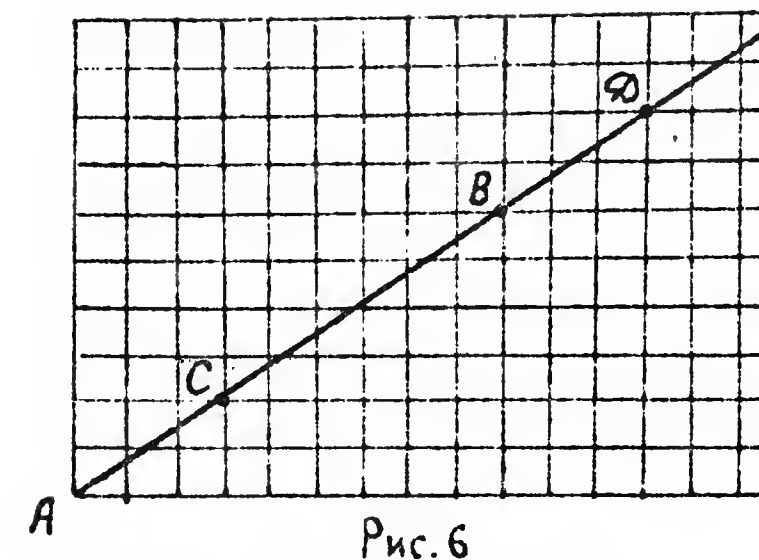
Теперь вы сможете догадаться, что ответ в задаче 7.1 такой: диагональ прямоугольника $a \times b$ разбита узлами на $d = \text{НОД}(a, b)$ частей.

Удобнее доказать более сильное утверждение: диагональ делится узлами на $d = \text{НОД}(a, b)$ равных (как теперь принято говорить, конгруэнтных) отрезков.

Объясним, в первую очередь, почему отрезки, на которые диагональ делится узлами, будут равны. Для того, чтобы это понять, не нужен прямоугольник, удобнее говорить просто о прямой, проведенной на клетчатой бумаге. Пусть прямая проходит через два узла решетки A и B . Будем двигаться по прямой в направлении

\overrightarrow{AB} . Пусть следующим за A узлом, лежащим на прямой, будет C , а следующим за B - узел D (рис. 6). Ясно, что

$|AC| = |BD|$: ведь мы можем передвинуть весь лист клетчатой бумаги вдоль прямой AB так, что точка A перейдет в B , при этом все узлы клетчатой бумаги снова перейдут в узлы, следовательно, ближайший к A узел C перейдет в ближайший к B узел D .



Тем самым мы показали, что узлы на нашей прямой расположены на равных расстояниях друг от друга.

Теперь объясним, почему диагональ прямоугольника $a \times b$ разбита на $d = \text{НОД}(a, b)$ частей. Пусть K - какой-то общий делитель чисел a и b . Тогда мы можем разбить каждую сторону некоторыми узлами на K равных частей. Проведя через точки деления линии сетки, мы разобьем весь прямоугольник на K^2 меньших прямоугольников, а диагональ при этом разобьется на K равных кусков (рис. 7). Обратно, если некоторые узлы разбивают диагональ на K равных частей, то, проведя через них линии сетки, мы разобьем на K частей стороны, то есть получим, что K - общий делитель a и b ($a = Ka_1$, $b = Kb_1$).

Итак, каждому общему делителю K чисел a и b соответствует (взаимно однозначным образом) разбиение диагонали на K равных частей. Ясно, что самому мелкому разбиению (всеми узлами, лежащими на диагонали), соответствует наибольший общий делитель. Задача 7.1 решена.

Связь между узлами клетчатой бумаги и целыми числами, которая использовалась в этом решении, легко объясняется с помощью метода координат.

Выберем на клетчатой бумаге за оси координат две линии сетки, за единицу масштаба - сторону клетки. Тогда узлы сетки можно охарактеризовать так: это - такие точки (x, y) , обе координаты которых - целые числа. Будем их называть целыми точками, а все множество этих точек (узлов) - решеткой.

(Таким образом, задачу 7.1 можно было бы сформулировать так: "на сколько частей целые точки делят отрезок с концами в точках $(0,0)$ и (a,b) ?")

На рисунке 8 по решетке проведена прямая, задаваемая уравнением

$$y = \frac{2}{3}x$$

или, что то же самое, $2x = 3y$.

Легко видеть, что все возможные точки решетки, лежащие на этой прямой - это

$$(3,2), (6,4), (9,6), (12,8), \dots$$

по одну сторону от начала координат $(0,0)$ и

$$(-3,-2), (-6,-4), \dots$$

по другую сторону. Короче, все эти точки можно записать общей формулой: их координаты

$$x = 3t, y = 2t,$$

где t - любое целое число.

В общем виде сформулируем наше наблюдение так.

Теорема 1. Если целые числа a и b взаимно просты, то все целые точки (x,y) , лежащие на прямой $ay = bx$, находятся по формуле $x = at, y = bt$, где t - произвольное целое число.

Эта теорема, разумеется - еще один вариант формулировки теоремы I из § 5.

Выше при решении задачи 7.1, мы дали наглядное объяснение, а в § 9 проведем чисто алгебраическое доказательство этой теоремы.

Задача 7.2. а) Сколько целых точек лежит на отрезке, соединяющем точки $(0,0)$ и $(20,28)$ (включая его концы)?

Тот же вопрос про отрезок, соединяющий точки:

б) $(20,0)$ и $(0,28)$;

в) $(0,0)$ и $(-56,72)$;

г) $(20,20)$ и $(-36,92)$;

д) $(1,7)$ и $(253,43)$.

Задача 7.3. Нарисуйте прямую, задаваемую уравнением

$$20x = 28y,$$

и напишите общую формулу, задающую все целые точки этой прямой. (Масштаб и размеры рисунка выбирайте так, чтобы несколько хотя бы три, четыре точки решетки, лежащие на прямой, уместились на ри-

сунке). То же задание для прямых:

а) $20x + 28y = 0$;

б) $252x = 84y$;

в) $85y = -153x$.

Решение 7.3 г). После сокращения на НОД $(85, 153) = 17$ получим уравнение прямой: $5y = -9x$. Ближайшие к узлу $(0,0)$ целые точки на этой прямой $(5, -9)$ и $(-5, 9)$, а общее решение $x = 5t$, $y = -9t$, где t - любое целое число. Рисунок сделайте сами.

Мы научились решать однородное уравнение $ay - bx = 0$ в целых числах (x, y) .

Обсудим теперь, как устроено множество решений неоднородного уравнения $ay - bx = c$.

Начнем с примеров.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $28x + 20y = 22$. Левая часть при всех x и y делится на 4, а правая - нет. Следовательно, уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $28y - 20x = 12$. Разделим обе части на 4. Получим: $7y - 5x = 3$. Теперь начертим несколько прямых, уравнения которых $7y - 5x = 0$, $7y - 5x = 1$, $7y - 5x = 2$, $7y - 5x = 3$, ..., $7y - 5x = 7$. Все эти прямые параллельны (рис. 9), нужная нам прямая - четвертая снизу. Заметим, что она проходит через целую точку $(5, 4)$. А остальные целые точки на этой прямой расположены на равных расстояниях (точно так же, как на прямой $7y - 5x = 0$).

Отсюда ясно, что все решения нашего уравнения в целых числах

$$\begin{cases} x = 5 + 7t, \\ y = 4 + 5t \end{cases}, \text{ где } t - \text{любое целое число.}$$

Теперь сформулируем общую теорему 3.

а) Уравнение $ay - bx = c$ тогда и только тогда имеет решение (x, y) в целых числах, когда c делится на НОД (a, b) .

б) Если НОД $(a, b) = 1$, c - произвольное целое число, то уравнение $ay - bx = c$ имеет бесконечное число решений (x, y) в целых числах. Если известно одно решение (x_0, y_0) , то все решения имеют вид

$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, \text{ где } t - \text{любое целое число.}$$

Доказательство. Ясно, что если a и b делятся на d , то при целых x, y число $ay - bx = c$ тоже делится на d . Таким образом, если c не делится на $d = \text{НОД}(a, b)$, то

уравнение (3) не имеет решений. Если же a, b и c делятся на d , то поделив все члены на d , мы приходим к случаю, когда $\text{НОД}(a, b) = 1$. Рассмотрим такое уравнение.

Пусть одно решение $(x_0; y_0)$ уравнения мы нашли:
 $ay_0 - bx_0 = c$. Тогда легко найти общую формулу для остальных решений. В самом деле, уравнение $ay - bx = c$ мы можем записать теперь так:

$$ay - bx = ay_0 - bx_0 \quad \text{или} \quad a(y - y_0) = b(x - x_0).$$

Отсюда по теореме I получаем: $x - x_0 = at, y - y_0 = bt$, где t - любое целое число.

Эти общие формулы выражают геометрически очевидный факт: если прямая $ay - bx = c$ проходит через целую точку $(x_0; y_0)$, то все другие целые точки расположены на ней с такими же интервалами, как и на параллельной прямой $ay - bx = 0$. В самом деле, можно перенести плоскость так, что $(0; 0)$ перейдет в $(x_0; y_0)$ и при этом наши прямые (и множества целых точек) совпадут.

Осталось показать, как найти хотя бы одно решение $(x_0; y_0)$ уравнения $ay - bx = c$ (если $\text{НОД}(a, b) = 1$). Заметим, что достаточно сделать это для $c = 1$: если $(x_1; y_1)$ - решение уравнения $ay_1 - bx_1 = 1$, то есть $ay_1 - bx_1 = 1$, то $x_0 = cx_1, y_0 = cy_1$ будет решением уравнения $ay - bx = c$.

Итак, нужно доказать такую лемму.

Лемма 2. Если $\text{НОД}(a, b) = 1$, то существуют целые числа x, y такие, что $ay - bx = 1$.

Здесь мы дадим геометрическое объяснение этой леммы; очень короткое алгебраическое доказательство приведено в § 9. Но это - только доказательство существования нужных x и y . А в § 8 мы увидим, как действительно можно быстро их найти для конкретных чисел a и b , даже довольно больших.

Рассмотрим множество точек $(x; y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq ay - bx \leq a$. Это - параллелограмм с вершинами $(0; 0), (0; 1), (a; b+1), (a; b)$; (см. рис. 9 внизу на стр. 50, где $a = 7, b = 5$). Внутри него лежат $a-1$ целых точек (на каждой прямой $x = 1, x = 2, \dots,$

$x = a-1$ по одной - ведь эти прямые пересекают параллелограмм по отрезку длины 1). Посчитаем для каждой из этих $(a-1)$ целых точек $(x_i; y_i)$ значение $c_i = ay_i - bx_i$. Это - целое число, $0 < c_i - bx_i < a$. При этом разным точкам $(x_i; y_i)$

обязательно соответствуют разные c_i (подумайте, почему). Значит, соответствие $(x_i; y_i) \rightarrow (ay_i - bx_i)$ между $(a-1)$ целыми точками и $(a-1)$ числами $1, 2, \dots, a-1$ взаимнооднозначно (проверьте это для рис. 9). В частности, найдется $(x_i; y_i)$ такая, что $ay_i - bx_i = 1$.

Задача 7.4. а) Начертите прямую $3y - 5x = 1$; через какую целую точку она проходит? Как записать все множество решений этого уравнения в целых числах?

Тот же вопрос для прямых

а) $3y + 8x = 2$; в) $5y + 8x = 49$;

г) $-42y + 54x = -18$; д) $3x - 2y + 11 = 0$.

Задача 7.5* Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1, a > 0$. Рассмотрим семейство всевозможных прямых $ay - bx = c$, где c - целое число.

а) На каком расстоянии лежат друг от друга "целые точки" на какой-либо прямой?

б) Сколько прямых пересекает отрезок оси Oy от точки $(0; 0)$ до точки $(0; 1)$ (не считая его концов)?

в) Докажите, что соседние прямые расположены на одном и том же расстоянии друг от друга.

г) Найдите расстояние между соседними прямыми ("ширину просеки" между рядами деревьев в направлении $y/x = b/a$).

Указание к задаче в). На каждой прямой $ay - bx = c$ есть целая точка $(x_0; y_0)$. Перенесем плоскость параллельно так, чтобы $(0; 0)$ перешла в $(x_0; y_0)$. Докажите, что тогда прямая $ay - bx = 1$ перейдет в $ay - bx = c+1$ (а $ay - bx = 0$ - в $ay - bx = c$).

Задача 7.6. а) Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать остаток 10?

б) Нарисуйте на числовой оси красным карандашом целые числа, которые при делении на 4 дают в остатке 1, синим - числа, которые при делении на 6 дают в остатке 3. Как записать множество чисел, удовлетворяющих обоим этим условиям?

в) Найдите общую формулу для чисел, которые при делении на 15 дают остаток 7, а при делении на 25 - остаток 11.

Указание к задаче в). Напишите общую формулу для решений уравнения $15x + 7 = 25y + 11$ в целых числах.

Задача 7.7. Двум мастерам приказали просверлить в рейке длиной 3 метра отверстия на равных расстояниях друг от друга и от концов рейки: одному мастеру - на расстоянии 20 см, другому - 12 см.

- а) Сколько всего отверстий проделано в рейке?
б) Каково будет наименьшее расстояние между отверстиями?

Замечание. Разумеется, в конках рейки отверстия сверлить не надо.

Задача 7.8. а) Отметим на числовой оси точки, дающие при делении на 12 остаток 5, красным карандашом, а точки, дающие при делении на 18 остаток 13 - синим. Каково будет наименьшее расстояние между красной и синей точкой?

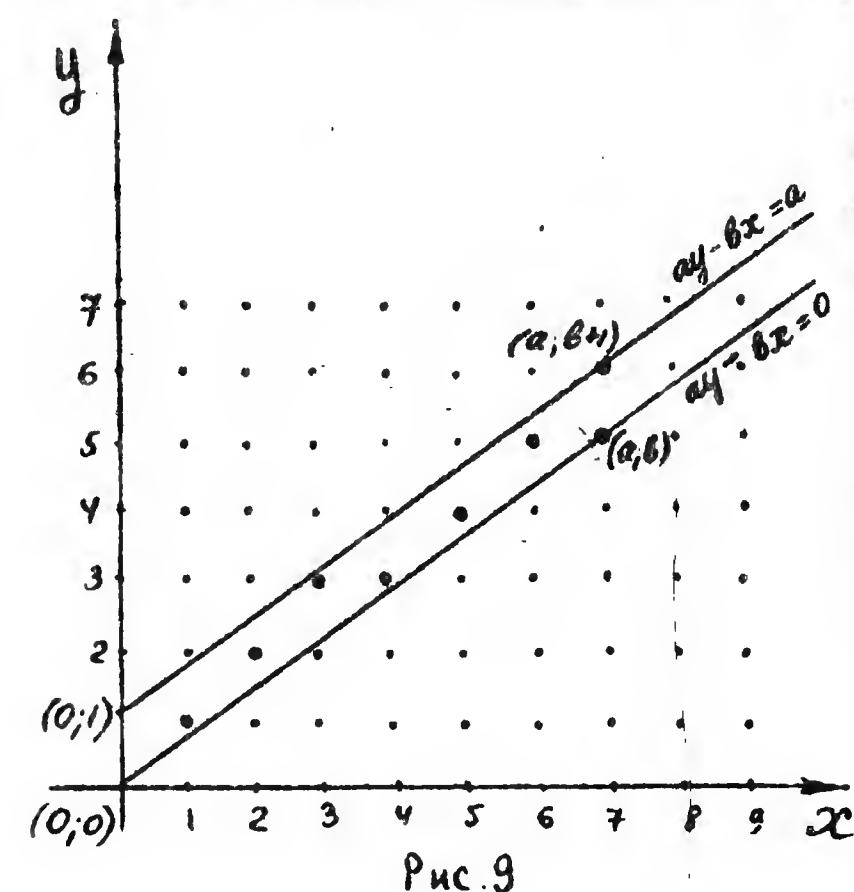
б) Тот же вопрос для двух множеств: чисел, дающих при делении на a_1 остаток r_1 , и чисел, дающих при делении на a_2 остаток r_2 .

Задача 7.9. Имеют ли следующие уравнения решения в целых числах:

- а) $6x - 16y = 220$;
б) $105x + 42y = 56$;
в) $-104x + 65y = 243$;
г) $-35x + 204y = 17$.

Если имеют, то укажите хотя бы одно такое решение и напишите общую формулу для решения. Если нет, докажите, что их не существует.

Задача 7.10. Имеются контейнеры весом 130 кг и 160 кг. Нужно полностью загрузить ими грузовик грузоподъемностью 3 тонны. Как это можно сделать (укажите все решения).



Если Вам трудно отыскать решение уравнения в целых числах, хотя Вы уверены, что они существуют (это следует из теоремы 3), то не обязательно "подбирать" решение или чертить на очень большом листе клетчатой бумаги прямую. Для этого есть более удобные способы, например, алгоритм Евклида. Его мы и изучим в следующем параграфе.

§ 8. Алгоритм Евклида.

Слово "алгоритм" (иногда пишут "алгорифм" - это то же самое) означает "общий метод, применимый к целому классу задач". Обычно в математике подразумевается, что этот метод можно сформулировать в виде совершенно точного описания - настолько точно и определенно,

что любой человек, умеющий только читать и считать, может его выполнить (для любой конкретной задачи, то есть для любых заданных ему значений параметров¹⁾). Например, вы умеете с помощью циркуля и линейки делить угол на две равные части, то есть знаете алгоритм, позволяющий любой угол разделить пополам. Вы знаете алгоритм, позволяющий любое натуральное число a , записанное в десятичной системе, разделить на другое натуральное число b с остатком - правило "деления столбиком".

Алгоритм Евклида - это правило, которое позволяет по двум натуральным числам: a и b найти НОД (a, b) . В принципе, для этого можно предложить такой алгоритм:

- 1) Найти все делители числа a (перепробовав все числа: $1, 2, \dots$, не превосходящие \sqrt{a});
- 2) Найти все общие делители чисел a и b (проверив, на какие из делителей a делится b);
- 3) Выбрать из общих делителей наибольший.

Или другой алгоритм: разложить оба числа на простые множители и воспользоваться следствием из теоремы 2, § 6. Однако, если разложения на простые множители ни одного из данных чисел не известны, а числа большие, требуется много вычислений.

Алгоритм Евклида позволяет найти НОД (a, b) в этих случаях значительно быстрее, не отыскивая всех делителей ни у одного из чисел a и b .

Что еще важнее - алгоритм Евклида дает нам путь к отысканию решений уравнения $ax + by = c$ в целых числах. Заодно мы еще раз докажем теорему об этих уравнениях из § 7.

Алгоритм Евклида основан на таком факте:

¹⁾ Понятие алгоритма тесно связано с понятием программы для вычислительной машины. Чтобы точно определить понятие "алгоритма", нередко описывают воображаемую "машину" и класс допустимых "программ" для этой машины.

Лемма 3. Пусть $a = bq + r$, тогда $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r)$.

Покажем, что у пары чисел (a, b) множество общих делителей в точности такое же, как у пары чисел (b, r) . Отсюда, конечно, будет следовать, что и НОД у этих пар один и тот же. Итак, докажем, что каждый общий делитель чисел a и b является также делителем числа r , и наоборот, что каждый общий делитель чисел b и r является делителем числа a .

Докажем сначала первое утверждение. Пусть a и b делятся на m . Тогда bq делится на m и $a - bq = r$ делится на m .

Перейдем ко второму утверждению. Если b и r делятся на k , то bq делится на k и $a = bq + r$ делится на k .

Доказанная лемма позволяет легко и быстро находить НОД двух чисел. Посмотрим, как это делается.

Пример. Найти НОД (273, 1014).

Решение. Выполняем деление с остатком: По лемме 3:

$$\begin{aligned} 1014 &= 273 \times 3 + 195; & \text{НОД}(273, 1014) &= \\ 273 &= 195 \times 1 + 78; & &= \text{НОД}(195, 273) = \\ 195 &= 78 \times 2 + 39; & &= \text{НОД}(78, 195) = \\ 78 &= 39 \times 2. & &= \text{НОД}(39, 78) = \\ & & &= 39 \end{aligned}$$

Ответ: НОД (273, 1014) = 39.

Метод отыскания наибольшего делителя, состоящий в последовательном применении леммы 3, носит специальное название - алгоритм Евклида.

Задача 8.1. Найдите наибольший общий делитель чисел:

а) 987654321 и 123456789;

б) 16484 и 42282;

в) 7 777 777 777 и 777 777.

Указание к 8.1. в) Здесь удобно использовать задачу 8.3.

Задача 8.2. а) От прямоугольника 324 см х 141 см отрезают несколько квадратов со стороной 141 см, пока не останется прямоугольник, у которого одна сторона меньше 141 см. От полученного прямоугольника снова отрезают квадраты, стороны которых равны его меньшей стороне, до тех пор, пока это возможно, и так далее (рис.10). На какие квадраты будет разрезан прямоугольник? (Укажите количество квадратов каждого размера).

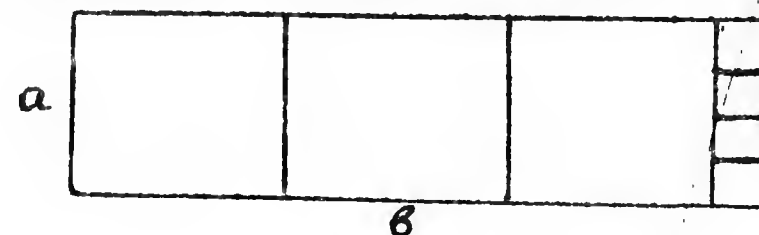


Рис.10

б) Каковы, будет размеры самого последнего наименьшего квадрата, если такие операции про-

делать с прямоугольником $a \times b$ (a и b - натуральные числа)?

Алгоритм Евклида в общем случае можно описать так. Если у нас имеется два числа a и b , причем $a > b > 0$, то сначала делим a на b и получаем остаток r_1 , который меньше, чем b . Затем делим число b на r_1 и находим остаток r_2 , который меньше, чем r_1 . Далее, мы делим число r_1 на число r_2 , при этом получаем остаток r_3 , меньший, чем r_2 , и так далее, пока какой-нибудь остаток r_{n-1} не разделится на остаток r_n нацело, без остатка (т.е. $r_{n+1} = 0$).

Ясно, что указанный процесс обязательно кончится, поскольку каждый остаток меньше предыдущего, а все остатки - неотрицательные числа. Последний остаток и есть НОД (a, b). Действительно,

$$\begin{aligned} r_n &= \text{НОД}(r_n, r_{n-1}) = \text{НОД}(r_{n-1}, r_{n-2}) = \\ &= \text{НОД}(r_1, r_1) = \text{НОД}(r_1, b) = \text{НОД}(a, b). \end{aligned}$$

С одной геометрической иллюстрацией алгоритма Евклида мы встретились в задаче 8.2. Более известный и важный геометрический вариант алгоритма Евклида - алгоритм отыскания наибольшей общей меры двух отрезков (рис.11).

На отрезке a откладываем столько раз, сколько это возможно, отрезок b , получаем остаток r_1 ; на отрезке b откладываем, пока это возможно, r_1 , получаем остаток r_2 ; на r_1 откладываем, пока это возможно, r_2 , получаем r_3 , и т.д.

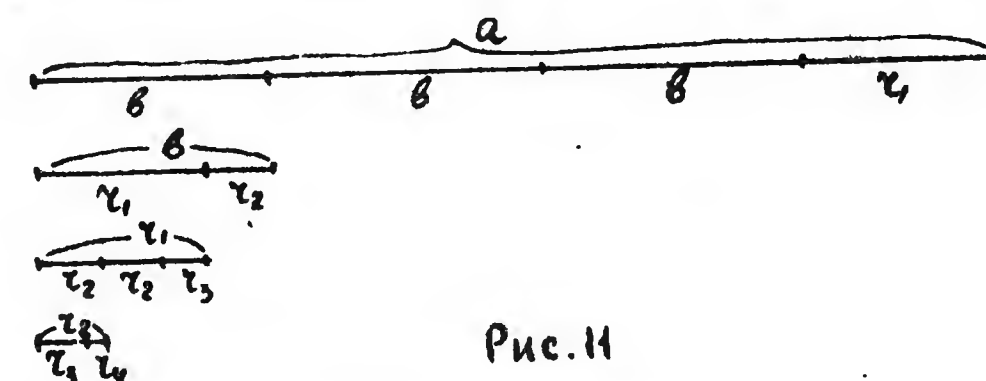


Рис.11

Правда, для отрезков (длины которых не целые числа) может случиться, что этот процесс никогда не кончится, а будет продолжаться бесконечно (никогда не получится остаток, равный нулю) - это произойдет в том случае, когда отрезки a и b несоизмеримы (вы вероятно знаете, например, что диагональ квадрата и его сторона несоизмеримы). Но если этот процесс кончится, то последний не равный нулю остаток даст наибольшую общую меру отрезков a и b - то есть наибольший отрезок d такой, что $a = kd$, $b = ld$, где k и l - целые числа. Это доказывается точно так же, как мы выше с помощью леммы 3 доказали, что алгоритм Евклида, приме-

ненный к целым числам, дает НОД (a, b) : а именно, у каждой пары отрезков (a, b) , (b, r_1) , (r_1, r_2) , (r_2, r_3) , ... наибольшая общая мера будет одна и та же, а если r_n целое число раз укладывается в r_{n-1} , то ясно, что их наибольшая общая мера - как раз r_n .

Задача 8.3. Докажите, что для любых двух целых чисел a и b

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, a-b).$$

Указание. Проведите такое же рассуждение, как и в доказательстве леммы 3.

Покажем теперь, как алгоритм Евклида позволяет найти решение уравнения в целых числах. Пусть, например, нужно решить уравнение

$$273x + 1014y = 156 \quad (1)$$

Выше мы нашли НОД $(273, 1014) = 39$ из цепочки равенств, которые мы перепишем так:

$$\begin{aligned} 1014 - 273 \cdot 3 &= 195; \\ 273 - 195 \cdot 1 &= 78; \\ 195 - 78 \cdot 2 &= 39; \\ 78 - 39 \cdot 2 &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку 156 делится на 39: $156 = 39 \times 4$, то уравнение (1) имеет решения в целых числах. И цепочка равенств (2) позволяет найти одно из решений, последовательно подставляя в виде $273x_n + 1014y_n$ (где x_n и y_n - целые) остатки r_n :

$$\begin{aligned} r_1 &= 195 = 1014 - 273 \cdot 3 = 273 \cdot (-3) + 1014 \cdot 1; \\ r_2 &= 78 = 273 - (1014 - 273 \cdot 3) = 273 \cdot 4 + 1014 \cdot (-1); \\ r_3 &= 39 = 195 - 78 \cdot 2 = 273 \cdot (-11) + 1014 \cdot 3. \end{aligned}$$

Конечно, удобнее сразу разделить все числа на 39, тогда в уравнении (1) и равенствах (2) (3) будут встречаться меньшие числа:

$$7x + 26y = 4. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 26 - 7 \cdot 3 &= 5, \\ 7 - 5 \cdot 1 &= 2, \\ 5 - 2 \cdot 2 &= 1, \\ 2 - 1 \cdot 2 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 5 &= 7 \cdot (-3) + 26 \cdot 1, \\ 2 &= 7 \cdot 4 + 26 \cdot (-1), \\ 1 &= 7 \cdot (-11) + 26 \cdot 3. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли решение уравнения $7x + 26y = 1$: $x = -11, y = 3$.

Отсюда получаем решение (1): $x = -44, y = 12$.

А общее решение, как следует из теоремы 3: $x = -44 + 26t$, $y = 12 - 7t$, t - любое целое число.

Например, при $t = 2$ получаем $x = 8, y = -2$.

Тот же способ применим и в общем случае.

Если нужно решить уравнение

$$ay - bx = c$$

(можно считать, что $b > 0$), отыскиваем с помощью алгоритма

$$\begin{aligned} \text{Евклида НОД}(a, b) : \quad a &= bq_1 + r_1, \\ b &= r_1q_2 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_{n+1} = d \end{aligned}$$

и пишем цепочку равенств, из которой находим представление d в виде $ay_0 - bx_0$, где y_0 и x_0 - целые числа,

Если c делится на $d = \text{НОД}(a, b)$ и $a = a', d, b = b', d, c = c', d$, то числа (c', x_0, c', y_0) будут давать решение уравнений

$$ay - bx = c \Leftrightarrow a'y - b'x = c'.$$

А общее решение, как следует из теоремы 3 § 7 -

$$x = c', x_0 + a', t; y = c', y_0 + b', t.$$

Задача 8.4. Найдите решение в целых числах уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } 75y - 39x &= 1. \\ \text{б) } 43x + 250y &= 77. \\ \text{в) } 11715y - 4473x &= 6390. \end{aligned}$$

Начертите (примерно) прямые с такими уравнениями на плоскости

Oxy и укажите на них несколько целых точек. Выберите подходящий масштаб. (Всю "сетку" целых точек рисовать не нужно).

В последнем примере в) нужно сделать довольно много "шагов" алгоритма Евклида - деления с остатком - прежде чем найдешь НОД $(11715, 4473)$ и решение уравнения.* Интересно выяснить: какое

* После деления на НОД числа становятся не такими уж большими в пределах сотни.

наибольшее число шагов нужно, чтобы наверняка найти НОД, если числа a и b , скажем, не превосходят 50, или 100, или 1000?

Сначала поставим вопрос по-другому. Пусть задано n - число шагов в алгоритме Евклида. Каковы наименьшие a и b , такие что пара (a, b) требует n шагов?

Задача 8.5. а) Пусть $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > 0$,

$$a = q_1 b + r_1, \quad (1)$$

$$b = q_2 r_1 + r_2, \quad (2)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3, \quad (3)$$

$$r_2 = q_4 r_3 + r_4, \quad (4)$$

$$r_3 = q_5 r_4. \quad (5)$$

Докажите, что $a > 13$.

б) Пусть "алгоритм Евклида" продолжается не 5 шагов, а n ; докажите, что тогда a не меньше n -го члена последовательности

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, \quad (\Phi)$$

в которой каждый член равен сумме двух предыдущих. (эта последовательность довольно часто встречается в разных задачах и носит специальное название "Последовательность Фибоначчи").

Указание к задаче 8.5. а) Докажите последовательно неравенства: $r_4 > 1, r_3 > 2, r_2 > 3, r_1 > 5, b > 8, a > 13$.

Решив задачу 8.5 а), легко ответить на вопрос: за сколько шагов алгоритм Евклида справится с любыми числами, меньшими 100? Поскольку десятый член последовательности Фибоначчи больше 100,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Φ_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

то, значит, десять шагов алгоритм Евклида для чисел $b < a \leq 100$ продолжаться не может. А числа 89 и 55 - пример такой пары, для которой он продолжается наибольшее возможное число - девять шагов.

Задача 8.6. а) Докажите, что

$$\text{НОД}(2^6 - 1, 2^{15} - 1) = 7.$$

б) Докажите, что

$$\text{НОД}(2^n - 1, 2^m - 1) = 2^{\text{НОД}(m, n)} - 1$$

для любых натуральных m и n .

Указание. Не забудьте правила действия со степенями:

если $m > n$, то $2^m = 2^{m-n} \cdot 2^n$. Воспользуйтесь тем, что $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a, b-a)$ (задача 8.3).

Задача 8.7. а) Докажите, что число $2^{16} + 1$ взаимно просто с каждым из чисел

$$3 = 2 + 1; 5 = 2^2 + 1; 17 = 2^4 + 1; 257 = 2^8 + 1.$$

б) Докажите, что в последовательности

$$2 + 1; 2^2 + 1; 2^4 + 1; 2^8 + 1; \dots; 2^{2^n} + 1$$

любые два числа взаимно просты.

Указание. Проверьте равенство

$$2^{16} - 1 = (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)$$

Задача 8.8. Докажите, что множество простых чисел бесконечно, воспользовавшись предыдущей задачей.

Указание. Рассмотрите простые числа, входящие в разложение на множители чисел последовательности

$$2 + 1; 2^2 + 1; 2^4 + 1; 2^8 + 1; \dots; 2^{2^n} + 1.$$

Задача 8.9. а) Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить по единице к некоторым 23 из них. Доказать, что повторив эту операцию достаточное число раз, можно сделать все данные числа равными.

б) Каким условиям должны удовлетворять числа m и n ($m < n$), чтобы была разрешима общая задача: заданы произвольные n целых чисел, разрешается прибавлять по единице к любым m из них и требуется добиться того, чтобы все они стали равными?

§ 9. Выберем наименьшее.

Здесь мы дадим краткие формальные доказательства теоремы 1 (стр. 13) и леммы 2 (стр. 22).

Доказательство леммы 2. Пусть a и b - взаимно простые числа. Рассмотрим множество \mathcal{J} всех натуральных чисел z , представимых в виде $z = ay - bx$, и выберем в нем наименьшее число d .

Докажем, что a делится на d . Разделим a на d с остатком: $a = dq + r$ и пусть $0 < r < d$. Поскольку $d \in \mathcal{J}$, оно имеет вид $d = ay_0 - bx_0$, следовательно,

$$r = a - dq = a - aqy_0 - bq_0x_0 = a(1 - dy_0) - b(q_0x_0).$$

Мы видим, что $r \in \mathcal{J}$, $0 < r < d$.

Поскольку мы предположили, что d - наименьшее число в \mathcal{J} , получили противоречие. Значит, a делится на d .

Точно так же докажем, что b делится на d (проведите рассуждение!). Значит, $d=1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы I. Первый способ. Мы должны доказать, что если ac делится на b и $\text{НОД}(a; b) = 1$, то c делится на b .

По лемме 2, существуют x, y такие, что $ay - bx = 1$. Тогда $c = ac = ac \cdot y - b \cdot xc$, очевидно, делится на b .

Второй способ. Рассмотрим множество \mathcal{J} всех натуральных чисел z таких, что zc делится на b . Пусть d - наименьшее число в \mathcal{J} . Легко видеть, что $a \in \mathcal{J}$, $b \in \mathcal{J}$. Аналогично доказательству леммы 2 докажите, что a делится на d и b делится на d (иначе в \mathcal{J} оказался бы остаток от деления a или b на d). Поэтому $d=1$.

К

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА
ПРИ МГУ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

**ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

Выпуск II

«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1965

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой брошюре помещены разные задачи по математике для учащихся Республиканской заочной математической школы (РЗМШ).

В первом разделе помещены задачи, которые надо было решить для поступления в заочную математическую школу в 1964 и 1965 годах, и приведены их решения. Во втором разделе помещены задачи для самостоятельной работы.

Мы советуем вам прежде всего внимательно прочитать решения тех задач, которые вы посылали на конкурс, разобраться в них, проверить, не ошиблись ли вы в своих решениях. Потом интересно попробовать решить те задачи, которые у вас не получились, и опять сравнить свои решения с теми, которые даны здесь.

Разобравшись в задачах конкурсной работы, попробуйте решать задачи из второго раздела.

Если вы не выдержали конкурса и не приняты в заочную математическую школу, но все-таки хотите заниматься математикой по нашим заданиям, вы можете попробовать организовать у себя в школе группу «Коллективный ученик РЗМШ». Соберите несколько своих товарищей — учеников, перешедших в IX класс, и попросите вашего учителя математики взять на себя руководство группой, т. е. проверять работы, которые вы будете выполнять по нашим заданиям. Если учитель согласится, пришлите нам заявление, и мы будем регулярно (примерно раз в месяц) высылать вам брошюры с заданиями Республиканской заочной математической школы и указания руководителю группы.

Заявление присылайте по адресу: Москва, В-234, МГУ, мехмат, Заочная математическая школа, руководителю групп «Коллективный ученик РЗМШ».

Брошюры с заданиями РЗМШ издаются издательством «Наука» в серии «Библиотечка физико-математической школы». Вот названия первых трех выпусков: «Метод координат», «Функции и графики», «Задачи по элементарной математике» (последовательности, комбинаторика, пределы).

**ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
В ЗАОЧНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ШКОЛУ
(1964 г.)**

1. Двое играют в такую игру: первый называет однозначное число (т. е. целое число от 1 до 9 включительно), второй прибавляет к нему еще какое-нибудь однозначное число и называет сумму, к этой сумме первый прибавляет еще какое-нибудь однозначное число и опять называет сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет 66. Как нужно играть в такую игру, чтобы выиграть? Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

2. Разложить на множители:

а) $x^8 + x^4 + 1$ (на 3 множителя);

б) $x^5 + x + 1$ (на 2 множителя).

3. Из вершины B треугольника ABC проведены медиана и высота. Оказалось, что они делят угол ABC на три равные части. Определить углы треугольника ABC .

4. Четверо ребят — Алеша, Боря, Ваня и Гриша — соревновались в беге. После соревнований каждого из них спросили, какое место он занял. Алеша ответил: «Я не был ни первым, ни последним». Боря ответил: «Я не был последним». Ваня ответил: «Я был первым». Гриша ответил: «Я был последним». Три из этих ответов правильные, а один неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

5. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны?

6. Доказать, что в произвольном треугольнике:

а) сумма длин медиан меньше периметра;

б) сумма длин медиан больше трех четвертей периметра.

7. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько книг могло быть на столе?

8. Построить треугольник по двум сторонам a и b , если известно, что угол против одной из них в 3 раза больше угла против другой.

9. а) Найти все целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$x + y = xy.$$

б) Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению

$$x + y + z = xyz?$$

10. Если некоторое четырехзначное число умножить на четырехзначное число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получается восьмизначное число, у которого последние три цифры — нули. Найти все такие четырехзначные числа.

11. а) Построить окружность, которая касается данной окружности в данной точке и данной прямой.

б) Построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в данной точке.

12. а) Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 - 3|x| + 1 = 0?$$

б) Нарисуйте график

$$y = x^2 - 3|x| + 1.$$

Примечание. Через $|x|$ обозначается абсолютная величина числа x .

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В ЗАОЧНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ШКОЛУ

(1965 г.)

1. Доказать, что число N^5 оканчивается на ту же цифру, что и число N .

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . Доказать, что сумма углов AOB и COD равна 180° .

3. Решить уравнение

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.$$

(Решить уравнение — это значит найти все числа, удовлетворяющие этому уравнению, и доказать, что других таких чисел не существует.)

4. В турнире участвовало 5 шахматистов. Определить результаты всех партий, если известно, что каждый сыграл с каждым по одной партии и все набрали разное число очков, причем:

а) занявший первое место не сделал ни одной ничьей;
б) занявший второе место не проиграл ни одной партии;

в) занявший четвертое место не выиграл ни одной партии.

(В шахматных турнирах выигравшему начисляется одно очко, проигравшему — нуль очков; если партия закончилась вничью, каждому из игравших начисляется по $1/2$ очка.)

5. Доказать, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагоналей. (У правильного восьмиугольника все стороны равны между собой и все углы равны между собой.)

6. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых ее нет?

7. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $OC = AB$. Найти угол при вершине C .

8. Числа x и y положительны, и $x + y = 5$. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}?$$

9. Клетки шахматной доски занумерованы по порядку числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд — слева направо числами от 1 до 8, второй горизонтальный ряд — тоже слева направо числами от 9 до 16 и т. д. На доске расставлены восемь ладей так, что они не бьют друг друга. Какие значения может принимать сум-

ма номеров клеток, на которых стоят ладьи? (Ладья бьет все клетки, находящиеся с ней в одном горизонтальном или вертикальном ряду.)

10. Прохожий, идущий вдоль трамвайной линии, замечает, что его каждые 7 минут догоняет трамвай и каждые 5 минут проходит трамвай навстречу. Через какой интервал времени отправляются трамваи с конечного пункта? (Считается, что трамваи отправляются с конечного пункта через равные промежутки времени и движутся от одного конечного пункта до другого с постоянной скоростью и без остановок; прохожий тоже идет с постоянной скоростью.)

11. На плоскости даны три параллельные прямые. Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трех данных прямых.

12. Каким должно быть число a , чтобы уравнения

$$x^3 + ax + 1 = 0 \text{ и } x^4 + ax^2 + 1 = 0$$

имели общий корень?

13. Дан треугольник ABC . Из его медиан построен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан этого треугольника построен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, и найдите коэффициент подобия.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ 1964 г.

1. Проще всего разобраться в том, как нужно играть в эту игру, начав «с конца». Тот, кто назовет 66, выиграет. Значит, тот, кто назовет любое из чисел 57, 58, ..., 65, проигрывает, потому что его противник сразу же сможет назвать 66. Отсюда следует, что тот, кто назовет 56, выиграет, так как он заставит противника назвать одно из «проигрышных» чисел. Точно так же можно проверить, что числа 47, 48, ..., 55 — «проигрышные», а число 46 — «выигрышное» и т. д. Итак, «выигрышными» числами являются 66, 56, 46, 36, 26, 16, 6.

Начинающий игру выиграет, если он сразу назовет 6 и потом независимо от того, что называет противник, будет все время называть «выигрышные» числа. Если же он хоть раз отступит от этого правила, то проигрывает, так как тогда его противник сможет назвать «выигрышное» число.

Точно так же «с конца» можно разобраться в любой подобной игре, где имеется не слишком много различных «позиций» и поэтому можно перебрать их и разделить на «выигрышные» и «проигрышные» (и «ничейные», если по условиям возможна ничья). Предлагаем вам еще две игры такого рода:

1) В нижнем левом углу шахматной доски стоит пешка. Одним ходом ее разрешается сдвинуть на одно из соседних полей: вправо, вверх или по диагонали вправо-вверх. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

2) Имеется три кучки спичек. В одной — 3 спички, в другой — 5, в третьей — 7. Одним ходом можно взять любое число спичек из одной кучки. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку.

$$\begin{aligned}
2. \text{ а) } x^8 + x^4 + 1 &= x^8 + 2x^4 + 1 - x^4 = \\
&= (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1); \\
x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } x^5 + x + 1 &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = \\
&= x^2(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1 = \\
&= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1).
\end{aligned}$$

3. Пусть в треугольнике ABC высота BH и медиана BM делят угол ABC на три равные части. Будем считать, что точка H лежит между точками M и C . (Чертеж сделайте сами.) Опустим из точки M перпендикуляр на AB . Его основание — точка K — лежит на самой стороне AB , а не на ее продолжении, так как углы ABM и BAM острые (угол ABM равен одной трети угла ABC и поэтому не может быть больше 60° ; угол BAM не может быть тупым, так как иначе высота BH проходила бы вне угла ABC). Треугольники BKM и BMH равны, так как имеют общую гипотенузу BM и равные углы при вершине B . Кроме того, треугольники BMH и BHC равны, так как они имеют общий катет BH и равные углы при вершине B . Из равенства треугольников мы получаем $MK = MH = HC$. Так как BM — медиана, то $AM = MC$. Отсюда $AM = MC = MH + HC = 2MH = 2MK$. Мы получили, что в прямоугольном треугольнике AMK катет MK равен половине гипотенузы AM . Значит, угол KAM равен 30° . Так как точка K лежит на самой стороне AB (а не на ее продолжении), угол KAM совпадает с углом BAC . Таким образом, мы нашли один из углов треугольника ABC . Из прямоугольного треугольника ABH мы получаем, что угол ABH равен 60° . Но этот угол составляет $\frac{2}{3}$ угла ABC . Отсюда угол ABC равен 90° . Итак, треугольник ABC должен иметь углы 30° , 60° и 90° . Легко проверить, что в таком треугольнике высота и медиана действительно делят прямой угол на три равные части.

З а м е ч а н и е. Многие из решавших эту задачу доказали только, что треугольник с углами 30° , 60° и 90° удовлетворяет поставленным условиям. Но самая существенная и трудная часть решения задачи состоит не в этом, а в доказательстве того, что других таких треугольников не существует.

4. Будем вместо имен писать только первые буквы. Предположим, что А. сказал неправду. Тогда все остальные сказали правду, т. е. В. был первым, а Г. последним. Следовательно, А. не был ни первым, ни последним и, значит, он сказал правду. Мы пришли к противоречию; значит, А. сказал правду.

Предположим, что Б. сказал неправду, т. е. он был последним. Тогда Г. должен сказать правду, т. е. он тоже на последнем месте. Мы пришли к противоречию; значит, Б. сказал правду. Пусть В. сказал неправду, а все остальные — правду. При этом А. должен быть на 2 или 3 месте; Б. — на 1, 2 или 3; Г. (он сказал неправду!) — на 2, 3 или 4, Д. — на 4. Мы видим, что первым мог быть только Б.

Остается проверить, не подойдет ли и последний вариант, а именно, что Г. сказал неправду. Тогда все остальные сказали правду и, значит, никто не занял последнего места. Этого не может быть, значит, Г. сказал правду.

Итак, мы доказали, что неправду сказал Ваня, а первым был Боря.

5. Существует всего 5 нечетных цифр: 1, 3, 5, 7, 9. Значит, первую цифру нашего шестизначного числа мы можем выбрать пятью способами. К любой первой цифре мы можем приписать любую вторую, т. е. имеется $5 \times 5 = 25$ способов выбрать первые две цифры. К каждой из этих пар можно приписать любую из 5 цифр в качестве третьей цифры, т. е. имеется 5^3 способов выбрать первые 3 цифры. Рассуждая дальше аналогично, получим, что существует всего $5^6 = 15\,625$ способов составить набор из 6 нечетных цифр, т. е. 15 625 шестизначных чисел, все цифры которых нечетны.

6. а) Докажем сначала, что в любом треугольнике ABC медиана BM меньше полусуммы заключающих ее сторон BA и BC . Действительно, если на продолжении BM за точку M отложить отрезок $MD = MB$, то четырехугольник $ABCD$ будет параллелограммом (поскольку

$AM=MC$ и $BM=MD$), т. е. $AD=BC$. Но в треугольнике ABD $BD < AB+AD$; значит, $2MB < AB+BC$.

Пусть теперь a_1 , a_2 и a_3 — стороны произвольного треугольника, а m_1 , m_2 и m_3 — медианы, проведенные к серединам соответствующих сторон. По доказанному,

$$m_1 < \frac{a_2 + a_3}{2}, \quad m_2 < \frac{a_1 + a_3}{2}, \quad m_3 < \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Сложив эти неравенства, получим:

$$m_1 + m_2 + m_3 < a_1 + a_2 + a_3.$$

б) Сохраним обозначения, принятые в решении задачи а). Проведем только часть каждой медианы от вершины до точки пересечения медиан; эта часть составляет, как известно, $\frac{2}{3}$ длины медианы. Из рассмотрения трех получившихся треугольников можно заключить, что

$$a_1 < \frac{2}{3} m_2 + \frac{2}{3} m_3, \quad a_2 < \frac{2}{3} m_1 + \frac{2}{3} m_3, \quad a_3 < \frac{2}{3} m_1 + \frac{2}{3} m_2.$$

Сложив эти три неравенства, получим:

$$a_1 + a_2 + a_3 < \frac{4}{3} m_1 + \frac{4}{3} m_2 + \frac{4}{3} m_3,$$

т. е.

$$m_1 + m_2 + m_3 > \frac{3}{4} (a_1 + a_2 + a_3).$$

З а м е ч а н и е. Обозначим сумму длин медиан треугольника буквой M , периметр — буквой P . Мы доказали, что отношение $M:P$ всегда заключено между $\frac{3}{4}$ и 1. Интересно, что эта теорема является «точной», т. е. для любого числа C , которое больше $\frac{3}{4}$ и меньше 1, можно построить такой треугольник, что $M:P=C$.

7. Пусть N — число книг на столе. По условию, $N-1$ делится на 4, на 5 и на 6, а значит, и на их наименьшее общее кратное — 60, т. е. $N-1=60K$, где K — целое число. Таким образом, нам надо найти число N вида $60K+1$, которое делилось бы на 7. Из чисел $K=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, как нетрудно проверить, подходит только $K=5$, так что наименьшее число книг, которое могло быть на столе, 301.

Посмотрим, какие еще значения K годятся. Пусть $60K+1$ делится на 7; тогда и $60K+1-301$ делится на 7, т. е. $60(K-5)$ делится на 7 и, значит, $K-5$ делится на 7. Отсюда $K=7m+5$, где m — любое целое число. Значит, $N=60K+1=60(7m+5)+1=420m+301$.

О т в е т. На столе могло быть $420m+301$ книга, где m — любое целое число, начиная с нуля.

8. Предположим, что такой треугольник ABC построен. Пусть $AC=b$, $BC=a$ и угол ABC в три раза больше угла BAC , т. е. если обозначить через x величину угла BAC , то угол ABC будет равен $3x$. Проводим из точки B до прямой AC отрезок BE такой, что угол ABE равен x . Тогда треугольник ABE будет равнобедренным, поэтому $AE=BE$. Треугольник BCE также будет равнобедренным, поскольку каждый из углов BEC и CBE равен $2x$ (угол BEC — внешний угол треугольника ABE); поэтому $BC=EC=a$. Следовательно, $AE=EB=b-a$, так как вся сторона AC равна b .

В треугольнике BCE нам известны все три стороны. Поэтому его можно построить. После этого на продолжении стороны CE откладываем отрезок $EA=b-a$. Треугольник ABC искомым.

Действительно, у него, очевидно, $BC=a$ и $AC=b$. Докажем, что угол ABC втрое больше угла BAC . Треугольник AEB равнобедренный ($AE=EB=b-a$); поэтому угол BAE равен углу ABE . Далее, угол BEC как внешний угол треугольника AEB вдвое больше угла BAC . Поскольку треугольник BCE равнобедренный ($BC=CE$), угол BCE также вдвое больше угла BAC . Поэтому весь угол ABC втрое больше угла BAC , что и требовалось доказать.

Задача имеет решение, когда из отрезков a , a и $b-a$ можно построить треугольник, т. е. когда $3a > b > a$. При этом условии решение единственно (это следует из первого абзаца решения и из единственности всех построений).

9. а) Это уравнение имеет два решения в целых числах: $x=0$, $y=0$ и $x=2$, $y=2$. Самая существенная часть решения — доказательство того, что других решений не существует. Существует много разных доказательств. Приведем одно из них.

Перепишем наше уравнение в таком виде: $(x-1)(y-1)=1$. Ясно, что произведение двух целых чи-

сел может равняться 1 только, когда оба числа равны 1 или когда оба числа равны -1 . Отсюда получаем два указанных выше решения.

б) Будем считать, что $x \leq y \leq z$. Заменяя в левой части уравнения x и y большим числом z , получаем неравенство $3z > xyz$. (Равенство может получиться, если только все три числа равны; но тогда $3z = z^3$, что невозможно при целом положительном z .)

Так как по условию $z > 0$, можно разделить обе части неравенства на z . Получаем $xy < 3$. Поскольку $0 < x \leq y$, возможны только следующие варианты:

$$x=1, y=1; \quad x=1, y=2.$$

Подставляя эти значения в наше уравнение, получаем в первом случае $2+z=z$ — нет решений; во втором случае $3+z=2z$ — одно решение: $z=3$. Таким образом, наше уравнение имеет одно решение, удовлетворяющее условию $x \leq y \leq z$:

$$x=1, y=2, z=3.$$

Все остальные решения получают из этого перестановкой. Всего уравнение имеет 6 решений в целых положительных числах:

	x	y	z
(1)	1	2	3
(2)	1	3	2
(3)	2	1	3
(4)	2	3	1
(5)	3	1	2
(6)	3	2	1

10. Пусть A — данное четырехзначное число, A^* — четырехзначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Ясно, что ни A , ни A^* не оканчиваются цифрой 0, т. е. не делятся на 10 (иначе число, записанное цифрами в обратном порядке, не было бы четырехзначным). С другой стороны, мы знаем, что произведение AA^* делится на 1000, т. е. на $2^3 \cdot 5^3$. Это может быть, очевидно, только в том случае, если одно из чисел делится на 5^3 и не делится на 2, а другое — делится на 2^3 и не делится на 5 (если бы одно из чисел делилось и на 2

и на 5, то оно оканчивалось бы нулем). A и A^* совершенно равноправны, так что мы можем предположить, что A делится на $5^3 = 125$, а A^* — на $2^3 = 8$.

Нечетное число, делящееся на 125, может иметь только такие 3 последние цифры: 125, 375, 625, 875. Остается подобрать первую цифру чисел $x125$, $x375$, $x625$, $x875$ так, чтобы перевернутые числа $521x$, $573x$, $526x$, $578x$ делились на 8. В каждом случае существует ровно одна такая цифра. Найти ее можно непосредственно делением этих чисел на 8.

Получаем, таким образом, следующие 4 пары чисел: 4625 и 5264; 4875 и 5784; 6125 и 5216; 6375 и 5736.

11. а) Пусть дана окружность с центром O , прямая p и точка A на окружности. Предположим, что построена окружность, касающаяся данной окружности в точке A и прямой p в некоторой точке K . Ясно, что центр X этой окружности лежит на прямой OA и что радиус XK перпендикулярен прямой p . Проведем прямую AK . Пусть B — вторая (кроме A) точка ее пересечения с окружностью. Тогда $OB \parallel XK$. В самом деле, треугольники OAB и AXK подобны, так как они равнобедренные ($OB = OA$ и $AX = XK$) и имеют равные углы при основании (угол OAB равен углу KAX).

Поэтому можно предложить такое построение. Проведем прямую OA и прямую, проходящую через точку O и перпендикулярную прямой p . Эта прямая пересечет данную окружность в двух точках B_1 и B_2 .

Через точки B_1 и A проводим прямую до пересечения в точке K_1 с прямой p . Из точки K_1 восстанавливаем перпендикуляр к прямой p до пересечения в точке X_1 с прямой OA . Окружность с центром X_1 радиуса X_1K_1 искомая.

Действительно, эта окружность, очевидно, касается прямой p . Нетрудно показать из рассмотрения углов, что треугольник AX_1K_1 — равнобедренный, поэтому $AX_1 = K_1X_1$; следовательно, построенная окружность касается данной окружности в точке A .

Точно так же можно построить еще одно решение, исходя из точки B_2 .

Описанное построение становится невозможным в следующих случаях: 1) когда точка A совпадает с одной из точек B_1 и B_2 (т. е. когда прямая p перпендикулярна OA). Если при этом прямая p не проходит через A , то задача имеет одно решение, если проходит — бесконечно

много решений; 2) когда прямая p проходит через точку A и не касается данной окружности. В этом случае задача, очевидно, не имеет решений.

б) Пусть дана окружность с центром O , прямая p и точка A на прямой p . Предположим, что построена окружность, касающаяся данной окружности в некоторой точке K и прямой p в точке A . Ясно, что центр X этой окружности лежит на перпендикуляре, восстановленном к прямой p в точке A , и что точка K лежит на прямой XO . Проведем прямую KA . Пусть B — вторая (кроме точки K) точка ее пересечения с заданной окружностью. Тогда, как мы уже говорили при решении задачи а), $OB \parallel XA$.

Поэтому можно предложить такое построение. Проведем прямую AN , перпендикулярную прямой p , и прямую, перпендикулярную прямой p и проходящую через точку O . Эта вторая прямая пересечет окружность в двух точках B_1 и B_2 .

Через точки B_1 и A проводим прямую, которая пересечет окружность в некоторой точке K_1 . Проводим прямую OK_1 до пересечения в точке X_1 с прямой AN . Окружность с центром X_1 радиуса X_1A искомая.

Действительно, эта окружность, очевидно, касается прямой p , и, как нетрудно показать, треугольник K_1X_1A равнобедренный; поэтому $K_1X_1 = X_1O$; следовательно, построенная окружность касается данной окружности.

Точно так же можно построить еще одно решение, исходя из точки B_2 .

Рассмотрим теперь «особые случаи»:

1) Если прямые OA и p перпендикулярны, но точки B_1 и B_2 пересечения OA с окружностью не лежат на прямой p , то задача по-прежнему имеет два решения, хотя описанное выше построение теряет смысл. В этом случае искомыми окружностями являются окружности, построенные на отрезках AB_1 и AB_2 как на диаметрах.

2) Если прямая p касается данной окружности, то задача имеет либо одно решение (в случае, когда A не совпадает с точкой касания), либо бесконечно много решений (когда A совпадает с точкой касания).

3) Если прямая p пересекается с данной окружностью в точке A , то задача, очевидно, не имеет решений.

З а м е ч а н и е. Обе задачи 11 (а и б) можно решить многими разными способами. Например, решение первой

становится почти очевидным, если провести касательную к данной окружности в точке A : центры искомых окружностей лежат на пересечении прямой OA с биссектрисами углов, образованных прямой p и построенной касательной. Но во всех решениях задач на построение (см., например, нашу задачу 8) должно быть, кроме самого построения, приведено доказательство того, что: а) найдены все фигуры, обладающие требуемыми в задаче свойствами; б) все построенные фигуры действительно удовлетворяют поставленным в задаче условиям, т. е. что построение правильно. Первое обычно доказывается в анализе задачи, предшествующем построению, второе — после того, как приведен «рецепт» построения.

12. Найдем сначала положительные корни нашего уравнения. При $x > 0$ $|x| = x$ и уравнение можно переписать в виде $x^2 - 3x + 1 = 0$. Отсюда

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Оба эти числа удовлетворяют нашему условию ($x > 0$) и поэтому являются корнями исходного уравнения. Найдем теперь отрицательные корни уравнения

$$x^2 - 3|x| + 1 = 0.$$

При $x \leq 0$ $|x| = -x$ и уравнение можно переписать в виде $x^2 + 3x + 1 = 0$, откуда

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Оба эти числа отрицательные, и, значит, являются корнями нашего уравнения.

Таким образом, уравнение $x^2 - 3|x| + 1 = 0$ имеет четыре корня:

$$\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

График функции $y = x^2 - 3|x| + 1$ тоже проще всего строить отдельно при $x \geq 0$ и при $x \leq 0$. Для тех, кто умеет строить график квадратного трехчлена, построить графики не составит никакого труда.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1965 г.

1. Из правила умножения «столбиком» вытекает, что последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей. Поэтому достаточно убедиться в том, что пятая степень любой цифры N ($N=0, 1, 2, \dots, 9$) оканчивается на N . Можно, конечно, просто вычислить N^5 для всех этих N , но проще поступить так:

а) Пусть N равно 0 или 5:

$$0^2=0; \quad 5^2=25;$$

поэтому любая степень N в этих случаях оканчивается на N .

б) Пусть N равно 1, 3, 7 или 9:

$$1^2=1; \quad 3^2=9; \quad 7^2=49; \quad 9^2=81;$$

N^2 оканчиваются на 1 или на 9, поэтому $N^4=(N^2)^2$ оканчивается всегда на 1; отсюда следует, что $N^5=N^4 \cdot N$ оканчивается на N .

в) Пусть N равно 2, 4, 6 или 8:

$$2^2=4; \quad 4^2=16; \quad 6^2=36; \quad 8^2=64;$$

N^2 оканчивается на 4 или 6, поэтому N^4 оканчивается на 6. Тогда $N^5=N^4 \cdot N=6N$ и тоже оканчивается на N . В самом деле, $6N=5N+N$, а $5N$ оканчивается нулем, если N четно.

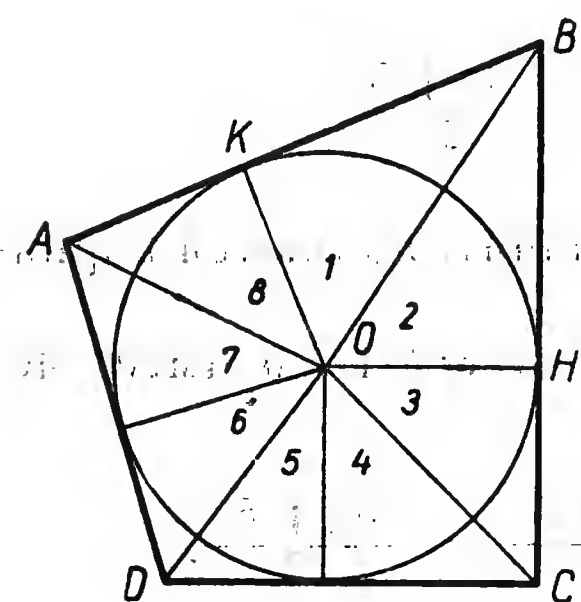


Рис. 1

Но сумма всех восьми углов $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle 8$ равна, очевидно, 360° . Поэтому $\angle AOB + \angle COD = \angle 1 + \angle 8 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$.

2. Опустим перпендикуляры из точки O на стороны четырехугольника (рис. 1). Их основания попадут, конечно, в точки касания. Из равенства треугольников OKB и OLB получаем, что $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично $\angle 4 = \angle 3$, $\angle 5 = \angle 6$ и $\angle 8 = \angle 7$. Сложив эти четыре равенства, получим:

$$\begin{aligned} \angle 1 + \angle 8 + \angle 4 + \angle 5 &= \\ &= \angle 2 + \angle 3 + \angle 6 + \angle 7. \end{aligned}$$

Но сумма всех восьми углов

3. Воспользуемся тем, что $|a| = a$, если $a \geq 0$ и $|a| = -a$, если $a \leq 0$. Рассмотрим отдельно те случаи, когда $|x-1|$, $|x-2|$ и $|x-3|$ «раскрываются» по-разному.

А. $x \geq 3$, тогда $x-3 \geq 0$, $x-2 > 0$, $x-1 > 0$. Наше уравнение принимает вид $(x-1) + 2(x-2) + 3(x-3) = 4$, откуда $x=5$. Итак, при $x \geq 3$ наше уравнение имеет только одно решение: $x=5$.

Б. $2 \leq x \leq 3$, тогда $x-3 \leq 0$, $x-2 \geq 0$, $x-1 > 0$. Наше уравнение принимает вид $(x-1) + 2(x-2) - 3(x-3) = 4$, откуда $x=2$. Итак, при $2 \leq x \leq 3$ наше уравнение имеет одно решение: $x=2$.

В. $1 \leq x \leq 2$, тогда $x-3 < 0$, $x-2 \leq 0$, $x-1 \geq 0$. Наше уравнение принимает вид $(x-1) + 2(x-2) - 3(x-3) = 4$ и после сокращений превращается в тождество: $4=4$. Таким образом, все значения x между 1 и 2 удовлетворяют нашему уравнению.

Г. $x \leq 1$, тогда $x-3 < 0$, $x-2 < 0$, $x-1 \leq 0$. Наше уравнение принимает вид $-(x-1) + 2(x-2) - 3(x-3) = 4$, откуда $x=1$. Таким образом, при $x \leq 1$ наше уравнение имеет только одно решение $x=1$.

Ответ. $1 \leq x \leq 2$ и $x=5$.

Замечание. График функции $y = |x-1| - 2|x-2| + 3|x-3|$ представляет собой ломаную линию — «молнию», изображенную на рис. 2. На этом графике хорошо видно, что y принимает значение 4 при любом x от 1 до 2 и еще раз — при $x=5$.

4. Поскольку второй шахматист не проиграл первому, а первый не сделал ни одной ничьей, то первый проиграл второму. Таким образом, первый набрал не более 3 очков, так как всего он сыграл 4 партии. С другой стороны, второй набрал не менее 2,5 очка, так как у первого он выиграл, а остальные 3 партии не проиграл. Поскольку первый набрал больше очков, чем второй, остается только один вариант: первый набрал 3 очка, второй — 2,5; при этом результаты их партий сра-

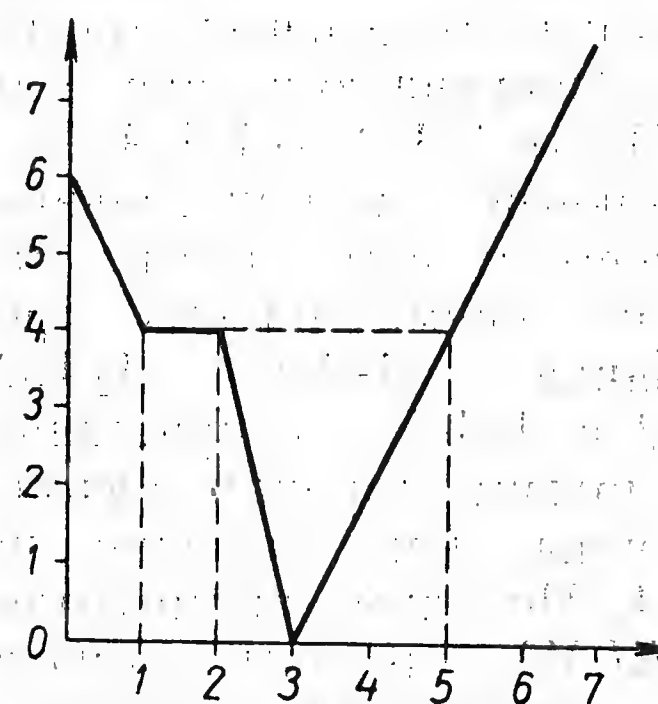


Рис. 2

	1	2	3	4	5	Очки
1	0	1	1	1	1	3
2	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	1	2
4	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
5	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1

а

	1	2	3	4	5	Очки
1	0	1	1	1	1	3
2	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
4	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
5	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1

б

Рис. 3

Исход партии третьего с пятым также теперь ясен: третий выиграл. Получаем таблицу, изображенную на рис. 3, б.

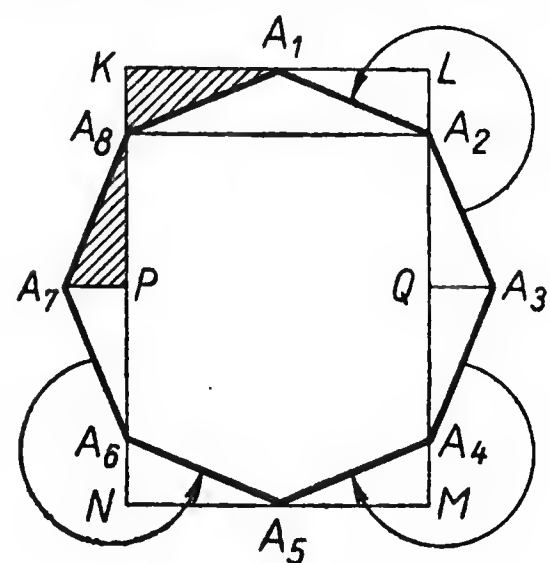


Рис. 4

ка: $KN=LM=A_1A_5$, $KL=MN=A_2A_8$. Отсюда следует доказываемое утверждение. Эту задачу можно решить алгебраически, выразив обе диагонали A_1A_5 и A_2A_8 и площадь восьмиугольника через одну какую-либо величину.

зу определяются, и турнирная таблица принимает вид, изображенный на рис. 3, а.

Поскольку все шахматисты набрали разное число очков, максимальное число очков, которое могли получить третий, четвертый и пятый, равно соответственно 2, 1, 5 и 1. Докажем, что ни один из них не мог получить меньше. Действительно, все пятеро вместе сыграли 10 партий, т. е. в сумме набрали 10 очков; первый и второй вместе набрали 5,5 очка, следовательно, трое последних вместе набрали 4,5 очка. Но $2+1,5+1=4,5$, следовательно, ни одно из этих чисел нельзя уменьшить. Записав эти числа в итоговый столбец нашей таблицы, видим, что четвертый, раз он не выиграл ни одной партии, должен был сыграть с третьим и с пятым вничью.

5. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ — правильный восьмиугольник. Отрежем от него четыре маленьких прямоугольных треугольника: A_7A_8P , A_2A_3Q , A_3A_4Q и A_6A_7P — и приставим их к другим сторонам восьмиугольника, как показано на рис. 4. Получим прямоугольник $KLMN$, стороны которого равны наибольшей и наименьшей диагонали восьмиугольника:

6. Подсчитаем количество чисел от 1 до 999 999, в записи которых нет единиц. Другими словами, нас интересует, сколько можно составить шестизначных чисел из цифр 0, 2, 3, 4, ..., 9 (если число имеет меньше шести цифр, условимся дописывать слева недостающее количество нулей). Мы утверждаем, что таких шестизначных чисел будет 9^6 : действительно, на первом месте в таком числе может стоять любая из девяти цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9; к каждой из них можно приписать справа любую из тех же девяти цифр; таким образом, получится $9 \times 8 = 81$ двузначное число из цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9; к каждому из этих чисел можно приписать произвольную третью цифру — получим 9^3 трехзначных чисел и т. д. Мы получим таким образом 9^6 шестизначных чисел. Из них нужно исключить одно: 000 000. Таким образом, мы показали, что среди первого миллиона существует ровно $9^6 = 81^3 = 531\,371$. Итак, чисел, в записи которых нет единицы, несколько больше 500 000.

Отв е т. Среди первого миллиона больше таких чисел, в записи которых нет единицы.

7. Пусть BK и CH — высоты треугольника ABC (рис. 5). Тогда треугольники ABK и OKC равны, поскольку они имеют равные гипотенузы $AB=OC$ и равные острые углы $\angle ABK = 90^\circ - \angle BAC = \angle ACH$. Таким образом, из равенства треугольников следует, что $BK=KC$, треугольник BKC — равнобедренный и прямоугольный, поэтому $\angle BCA = 45^\circ$.

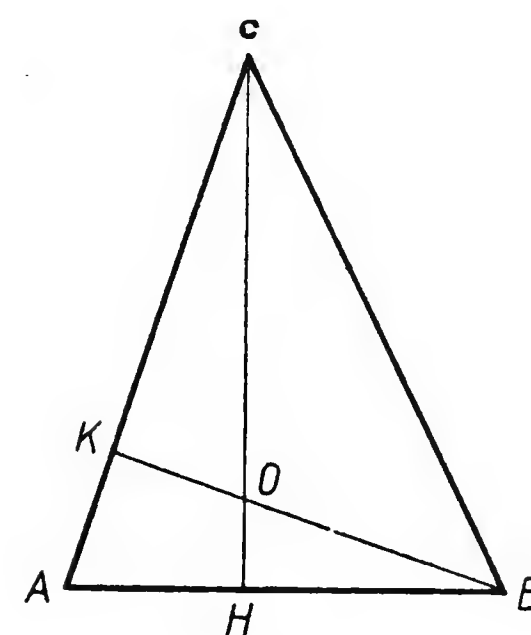


Рис. 5

Отв е т. Угол при вершине C равен 45° .

8. Пусть x и y положительны и $x+y=5$. Положим $x = \frac{5}{2} + \alpha$, тогда $y = 5 - x = \frac{5}{2} - \alpha$. Поскольку x и y положительны, $-\frac{5}{2} < \alpha < \frac{5}{2}$.

Интересующее нас выражение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ равно

$$\frac{1}{\frac{5}{2} + a} + \frac{1}{\frac{5}{2} - a} = \frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - a^2}$$

Очевидно, что при $-\frac{5}{2} < a < \frac{5}{2}$ знаменатель $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - a^2$ этой дроби положителен и что всегда $\left(\frac{5}{2}\right)^2 - a^2 \leq \left(\frac{5}{2}\right)^2$, поэтому $\frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - a^2} \geq \frac{5}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$ (равенство получается при $a = 0$).

Отв. Наименьшее значение равно $\frac{4}{5}$; оно достигается при $x = y = \frac{5}{2}$.

9. Напишем сверху над каждой вертикалью нашей доски числа 1, 2, 3, ..., 8, слева около каждой горизонтали — числа 0, 8, 16, 24, ..., 56, тогда мы можем считать, что в каждой клетке доски написана сумма двух чисел, соответствующих ее вертикали и горизонтали (рис. 6).

	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0+1	0+2	0+3	0+4	0+5	0+6	0+7	0+8
8	8+1	8+2	8+3	8+4
16	16+1	16+2
24
32
40
48
56	56+1	56+2	56+3	56+4

Рис. 6

вующие горизонталям. Поэтому сумма номеров всегда бу-

Теперь заметим, что если 8 ладей, стоящих на шахматной доске, не бьют друг друга, то обязательно в каждой вертикали и в каждой горизонтали стоит по одной ладье. Значит, в сумму номеров тех клеток, на которых стоят ладьи, войдут по одному разу все числа 1, 2, 3, ..., 8, соответствующие разным вертикалям, и по одному разу — все числа 0, 8, 16, 24, ..., 56, соответ-

дет иметь одно и то же значение: $1+2+3+\dots+8+0+8+\dots+16+24+\dots+56=260$.

Отв. Сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи, всегда равна 260.

10. Предположим, что прохожий оставил своего приятеля стоять на месте, а сам пошел прогуляться вдоль трамвайной линии: 35 минут шел в одну сторону, а затем 35 минут шел обратно. По условию задачи за каждые 5 минут ему попадаетеся один трамвай навстречу и за каждые 7 минут его обгоняет один трамвай. Поэтому за то время, что он шел вперед, его обогнало 5 трамваев, а за то время, когда он возвращался, ему навстречу проехало 7 трамваев. Таким образом, мимо неподвижного приятеля за 70 минут проехало в одну сторону 12 трамваев. Поэтому интервал между двумя трамваями равен $\frac{70}{12}$ мин., или $5\frac{5}{6}$ мин.

Для большей точности будем считать, что прохожий отошел от приятеля одновременно с трамваем, идущим в ту же сторону. Тогда он должен повернуть назад как раз тогда, когда его нагонит пятый (не считая начального) трамвай, и вернется назад как раз тогда, когда подойдет седьмой встречный трамвай. Таким образом, за 70 минут его отсутствия пройдет 12 полных интервалов между трамваями.

Второе решение (с «иксом и игреком»). Пусть скорость трамвая x км/мин, пешехода — y км/мин, расстояние между соседними трамваями, идущими в одну сторону, — a км. Нам нужно найти промежуток времени между трамваями, т. е. $\frac{a}{x}$.

Если пешеход идет в ту же сторону, что и трамвай, то скорость трамвая относительно пешехода равна $x - y$; если в противоположную, то $x + y$. Поэтому, согласно условию задачи,

$$\frac{a}{x-y} = 7, \quad \frac{a}{x+y} = 5.$$

Отсюда

$$\frac{x-y}{a} = \frac{1}{7}, \quad \frac{x+y}{a} = \frac{1}{5},$$

$$\frac{x-y}{a} + \frac{x+y}{a} = \frac{2x}{a} = \frac{12}{35}.$$

Таким образом, $\frac{a}{x} = \frac{70}{12} = 5 \frac{5}{6}$.

Ответ. Трамвай отправляется с конечного пункта через $5 \frac{5}{6}$ мин.

11. Мы считаем, что A , B , и C — вершины искомого квадрата $ABCD$, лежащие на трех данных прямых.

Опустим перпендикуляры AK и CH на данную прямую, проходящую через точку B . Поскольку $AB \perp BC$, углы ABK и CBH всегда в сумме составляют 90° (рис. 7, а). Поэтому треугольники ABK и BCN равны по гипотенузе и острому углу, откуда $BK=CH$ и $BH=AK$. Поскольку CH и AK мы знаем заранее, мы можем, выбрав положение точки B , найти положение точек H и K , а затем и вершин A и C квадрата.

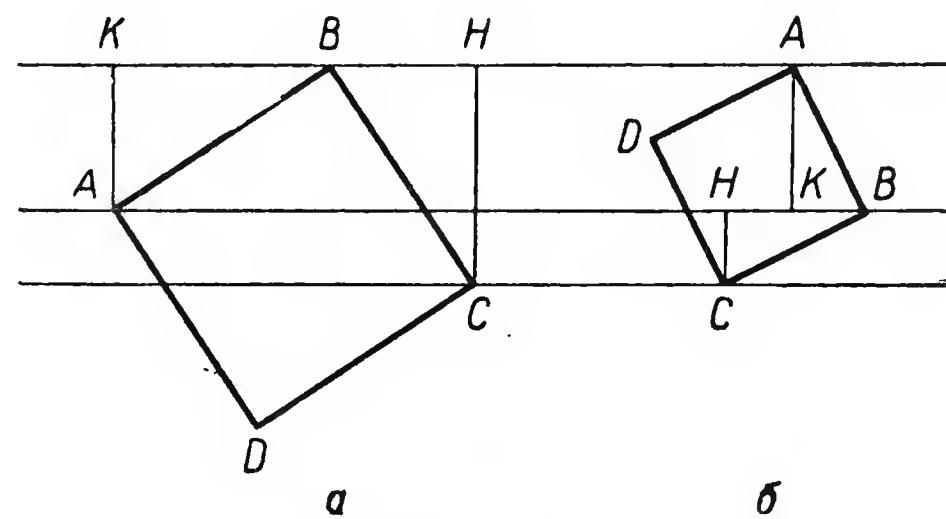


Рис. 7

Будем считать, что три наши прямые горизонтальны. Расстояние между верхней и средней обозначим через p , между средней и нижней — через q . Для каждого из шести случаев расположения точек A , B , C на этих трех прямых находим BK и BH :

№	На верхней прямой	На средней прямой	На нижней прямой	$BK=CH$	$BH=AK$
1	A	B	C	q	p
2	C	B	A	p	q
3	B	A	C	$p+q$	p
4	B	C	A	p	$p+q$
5	A	C	B	q	$p+q$
6	C	A	B	$p+q$	q

Положение точки B на прямой можно выбрать произвольно: ясно, что квадрат определяется с точностью до «сдвига» вдоль данных прямых. Откладывая BK и BH на данной прямой, проходящей через B , находим положение точек K и H . Восставив перпендикуляры KA и HC из точек K и H до пересечения с соответствующими данными прямыми, найдем точки A и C (рис. 7, б).

Докажем, что во всех случаях 1—6 построенные точки A , B , C будут вершинами квадрата. Треугольники ABK и BHC равны по двум катетам. Поэтому $AB=BC$ и $\angle ABC=90^\circ$ в 1-м и 2-м случае, $\angle ABC=\angle ABK+\angle CBH$, в остальных случаях $\angle ABC+\angle ABK+\angle CBH=180^\circ$, т. е. треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный, и т. д.

Таким образом, задача имеет, вообще говоря, шесть различных решений (решения, отличающиеся только «сдвигом» квадрата вдоль прямых, мы не считаем различными). При $p=q$ случаи 1 и 2 приводят к одному и тому же квадрату, т. е. остается пять решений.

Второе решение более красивое, но основано на «не совсем школьной» идее.

Пусть квадрат $ABCD$ построен. Положим на нашу плоскость лист прозрачной бумаги, перечертим на него всю картину и затем, воткнув в точку B булавку, повернем относительно нее лист прозрачной бумаги на 90° по часовой стрелке. Тогда вершина C квадрата, нарисованного на прозрачной бумаге, попадет, очевидно, в вершину A исходного квадрата. С другой стороны, три данные прямые a , b , c (мы считаем, что точки A , B , C лежат соответственно на прямых a , b , c) после поворота переходят в три вертикальные прямые a' , b' , c' . При этом вершина A лежит в точке пересечения прямых a и c' , а вершина B лежит в точке пересечения прямых b и b' .

Отсюда получается следующий способ построения квадрата. Повернем три данные прямые на 90° по часовой стрелке. Тогда если вершина B лежит в точке пересечения одной из трех данных прямых с ее повернутым положением, то вершина A лежит в точке пересечения некоторой другой из трех данных прямых с повернутой третьей. Таким образом (рис. 8), если B лежит в точке B' , то A может лежать в точке A_1 или A_2 ; если B лежит в точке B'' , то точка A может лежать в точке A_3

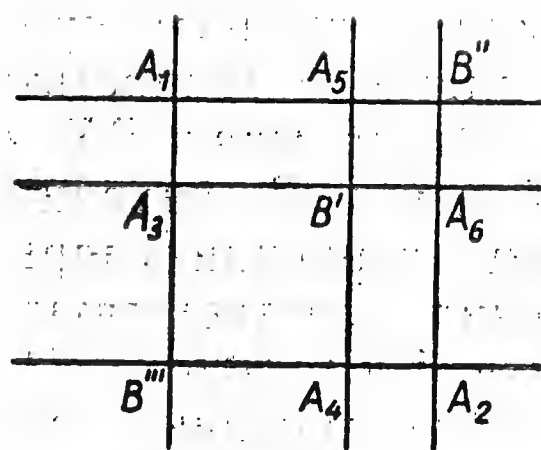


Рис. 8

или A_4 , если B лежит в точке B'' , то A может лежать в точке A_5 или A_6 .

Доказательство того, что вершина C квадрата $ABCD$ при таком построении тоже будет лежать на данной прямой, совершенно очевидно. Нужно вместе с отрезком BA повернуть все три вертикальные прямые вокруг B на 90° против часовой стрелки.

Тогда точка A перейдет в вершину C квадрата, а вертикальная прямая, которая проходила через A , перейдет в одну из трех данных горизонтальных прямых.

Таким образом, получаем шесть решений задачи, изображенных на рис. 9.

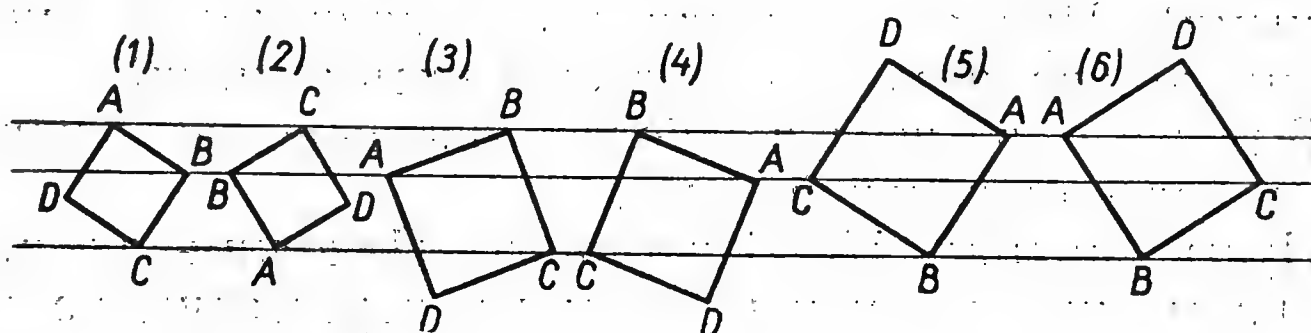


Рис. 9

12. Пусть эти уравнения имеют общий корень $x=x_0$, т. е. $x_0^3 + ax_0 + 1 = 0$ и $x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0$. Тогда $x_0^3 + ax_0 = -1$ и $x_0^4 + ax_0^2 = -1$. Отсюда

$$\frac{x_0^4 + ax_0^2}{x_0^3 + ax_0} = x_0 = 1.$$

Подставив $x_0=1$ в первое уравнение, получим $a=-2$. При этом значении a второе уравнение тоже имеет корень $x_0=1$.

Ответ. Уравнения имеют общий корень $x=1$ при $a=-2$.

13. Пусть D, E, F — середины сторон BC, AC, AB . Построим треугольник EDC до параллелограмма $EDCK$. Тогда нетрудно видеть, что $BDKE$ и $AFCK$ — тоже параллелограммы, поэтому стороны треугольника ADK равны (и параллельны) медианам треугольника ABC , т. е. треугольник ADK равен треугольнику $A_1B_1C_1$, упо-

минаемому в условии задачи. Пусть H — точка пересечения DK и EC ; AH — медиана треугольника ADK , поскольку $DH=HK$ ($EDCK$ — параллелограмм). Далее, $EH=HC=\frac{1}{2}EC=\frac{1}{2}AE$, следовательно, точка E

делит отрезок AH в отношении 2:1 и является точкой пересечения медиан треугольника ADK . Таким образом, отрезки DE, KE, AE составляют каждый $\frac{2}{3}$ соответствующей медианы треугольника ADK , т. е. треугольник $A_2B_2C_2$, о котором идет речь в условии, имеет стороны $\frac{3}{2}DE, \frac{3}{2}KE, \frac{3}{2}AE$. Но $DE=\frac{AB}{2}, KE=\frac{BC}{2}, AE=\frac{AC}{2}$.

Следовательно, стороны треугольника $A_2B_2C_2$ равны $\frac{3}{4}AB, \frac{3}{4}BC, \frac{3}{4}AC$. Таким образом, мы доказали, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC и коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$.

Мы доказали даже больше, а именно, что треугольник $A_1B_1C_1$ можно получить, параллельно сдвинув медианы треугольника ABC , а треугольник $A_2B_2C_2$ — параллельно сдвинув медианы треугольника $A_1B_1C_1$, и при этом стороны треугольника $A_2B_2C_2$ будут параллельны сторонам треугольника ABC .

З а м е ч а н и е. Эту задачу нетрудно решить и алгебраически, если знать формулу для вычисления медианы m_a треугольника по трем сторонам. Вот эта формула:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}.$$

Теперь задача сводится к очевидному тождеству:

$$\left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{2 \cdot \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + 2 \cdot \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}}{4}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все решения уравнения

$$x^2 - \sqrt{a-x} = a^2.$$

2. Найти все решения уравнения

$$x^2 - \sqrt{a-x} = a.$$

3. Найти уравнение (какой-нибудь степени) с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

4. Какая последняя цифра у числа 2^{1000} ?

5. Найти целое число a такое, что выражение $(x-a)(x-10)+1$ разлагается в произведение $(x+b)(x+c)$, где b и c — целые числа. Сколько таких чисел a ?

6. Известно, что $49=7^2$. Вставим в середину числа 49 число 48. Получится число 4489. В середину этого числа опять вставим 48, получится 444889. Докажите, что если в число 49 вставить таким образом 1000 раз число 48, то полученное число будет квадратом целого числа. Получится ли квадрат, если мы вставим 48 еще несколько раз?

7. Если уравнения с целыми коэффициентами

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0,$$

$$x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

имеют общий нецелый корень, то $p_1=p_2$ и $q_1=q_2$. Доказать.

8. Найти все числа, на которые сократима дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ при целом значении l .

9. Построить трапецию по параллельным сторонам и диагоналям.

10. Построить четырехугольник по двум сторонам, диагоналям и углу между ними.

11. Построить четырехугольник по двум углам, диагоналям и углу между ними.

12. Построить четырехугольник по стороне, углу, диагоналям и углу между ними.

13. Построить четырехугольник, если даны все его стороны и отрезок, соединяющий середины его диагоналей.

14. Доказать, что из конечного числа попарно различных равносторонних треугольников нельзя сложить выпуклую фигуру.

15. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC , не меньше этих сторон (соответственно). Найти углы треугольника.

16. Автор учебника, читая условие одной из задач, заметил опечатку в предложении: «Отложите 9 см на левой стороне угла в 60° и ... см на правой стороне угла. Чему равно расстояние между полученными таким образом точками?» Наборщик увеличил на 1 число сантиметров на месте поставленных нами точек. Конечно, наборщик и не подумал изменить ответ, напечатанный в конце учебника. Несмотря на это, опечатка не привела к ошибке. Какое число набрал наборщик в задаче?

17. Можно ли выложить в цепь, следуя правилам, все 28 костей домино так, чтобы на одном конце оказалась шестерка, а на другом пятерка? (Напишите ход ваших рассуждений.)

18. В компании из 6 человек некоторые знакомы друг с другом. Доказать, что в этой компании найдутся либо три незнакомых друг с другом человека, либо три попарно знакомых.

19. Двести учеников выстроены прямоугольником по 10 человек в каждом поперечном ряду и по 20 человек в каждом продольном ряду. В каждом поперечном ряду выбран самый высокий. Им оказался ученик Андреев. Затем в каждом продольном ряду выбран самый высокий ученик, а потом из 10 отобранных выбран самый

низенький. Им оказался ученик Петров. Кто выше: Андреев или Петров?

20. Ученик целый год решает для тренировки не менее одной задачи в день. При этом, чтобы не переутомиться, он решает не более 12 задач в неделю (календарную). Докажите, что можно найти несколько последовательных дней, в течение которых ученик решает ровно 20 задач.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Задачи вступительной контрольной работы в заочную математическую школу (1964 г.)	5
Задачи вступительной контрольной работы в заочную математическую школу (1965 г.)	6
Решения задач вступительной контрольной работы 1964 г.	9
Решения задач вступительной контрольной работы 1965 г.	18
Задачи для самостоятельного решения	28

Редактор *В. С. Капустина.*

Технический редактор *Е. В. Иванова.* Корректор *К. А. Иванова.*

Сдано в набор 16/VI 1965 г. Подписано к печати 14/VII 1965 г.
84×108¹/₃₂. Печ. л. 1. (1,68). Уч.-изд. л. 1,28. Тираж 15 000 экз.
Заказ № 550. Цена 3 коп.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Книжная фабрика № 1 Росглавполиграфпрома Государственного комитета Совета Министров РСФСР по печати, г. Электросталь Московской области, Школьная, 25.

Цена 3 коп.

К

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

**ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА ПРИ МГУ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА**

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск III

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

Москва • 1966

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Задачи вступительной контрольной работы в заочную математическую школу (1966 г.) . . .	4
Решения задач вступительной контрольной работы 1966 г.	5
Задачи вступительной контрольной работы в заочную математическую школу (1964 г.) . . .	17
Задачи вступительной контрольной работы в заочную математическую школу (1965 г.) . . .	19
Задачи для самостоятельного решения . . .	21

Редактор *В. С. Капустина*

Технический редактор *О. Н. Виноградова*

Корректор *Т. Н. Смирнова*

Сдано в набор 21/III 1966 г. Подписано к печати 8/IV 1966 г. 84×108¹/₃₂.
Печ. л. 0,75 (1,26). Уч.-изд. л. 0,92. Тираж 25 000 экз.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати

при Совете Министров РСФСР.

Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Типография № 1 Управления по печати исполкома Моссовета.

Москва, ул. Макаренко, 5/16. Заказ 299.

Цена 3 коп.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первом разделе этой брошюры помещены задачи, которые надо было решить для поступления в заочную математическую школу в 1966 г., и приведены их решения.

Во втором разделе помещены задачи вступительных контрольных работ 1964 и 1965 гг.

В третьем разделе даются задачи из разных разделов математики для самостоятельной работы.

Мы советуем вам прежде всего внимательно прочитать решения задач, которые вы посылали на конкурс, разобраться в них, проверить, не ошиблись ли вы в своих решениях.

Разобравшись в задачах конкурсной работы, попробуйте решить задачи второго и третьего разделов.

Среди этих задач есть как легкие, так и трудные. Поэтому не старайтесь решать задачи обязательно все подряд. Если какая-нибудь задача вас заинтересует, а решить сразу ее не удастся, то отложите ее на время и возьмитесь за другие, а потом опять вернитесь к отложенной. Как правило, самые интересные и полезные задачи — именно те, которые трудно решить сразу.

Эта брошюра посылается всем принявшим участие в конкурсе для поступления в ЗМШ. Мы надеемся, что даже те, кому не удалось поступить в заочную школу, будут с интересом решать эти задачи.

Первое задание для учащихся, принятых в ЗМШ

Мы обращаемся только к тем, кто зачислен в заочную математическую школу. Ваше первое задание как учеников ЗМШ состоит в следующем: вы должны прислать решения любых пяти задач (на ваш выбор) из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Старайтесь излагать свои мысли точно и по возможности кратко. Все утверждения, которые вы делаете при решении задачи, должны быть строго доказаны. Конечно, каждую задачу можно решить разными способами. Постарайтесь найти самое простое и красивое решение.

Срок присылки первого задания — 10 сентября.

Заочная математическая школа

**ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
В ЗАОЧНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ШКОЛУ
(1966 г.)**

1. В каком-то году некоторое число ни в одном месяце не было воскресеньем. Что это за число?

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.

3. Решите следующее уравнение:

$$x^4 + a^4 - 3ax^3 + 3a^3x = 0 \quad (a - \text{некоторое число}).$$

4. Два города A и B расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из A в B и обратно за один час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

5. Сколько среди целых чисел от 1 до миллиона существует таких, которые не делятся ни на одно из чисел от 2 до 5?

6. В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны. Докажите, что $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

7. Человек обычно приезжал на станцию одним и тем же поездом. К этому времени за ним приходила машина и отвозила его домой. Однажды он приехал на час раньше. Он пошел пешком, встретил по дороге машину и вернулся домой на 20 мин. раньше обычного. Сколько времени он шел пешком?

8. Докажите, что если

$$\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0,$$

то

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

9. 1966 ребят стоят по кругу. Им нужно выбрать водящего, и ребята считаются следующим образом: первый остается в круге, следующий за ним по часовой стрелке — второй — выходит из круга, следующий за ним — третий — остается, четвертый выходит и так далее через одного по кругу. Круг все время сужается до тех пор, пока в нем не останется только один человек. Определите, кто именно останется (на каком месте он стоял в первоначальном кругу, считая от первого по часовой стрелке).

10. m и n — целые положительные числа. Известно, что из следующих четырех утверждений:

1°. $m+1$ делится на n ;

2°. m равно $2n+5$;

3°. $m+n$ делится на 3;

4°. $m+7n$ — простое число —

три верных, а одно неверное. Найдите все возможные пары m, n .

11. Площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь большая диагональ этой трапеции?

12. а) Докажите, что при $a > 0$ $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

б) Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$.

13. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $90 + 0,4 v^2$ руб. в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость одного километра пути была наименьшей?

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ
РАБОТЫ 1966 г.**

1. Ответ. 31-е.

Докажем, что для любого k от 1 до 30 k -е число в течение года обязательно бывает любым из семи дней недели. Составим такой календарь:

Месяц	Число дней в этом месяце	Между k -м числом этого и следующего месяца проходит 4 полные недели и еще
Январь Февраль	31 28 или 29	3 дня 0 или 1 день

Продолжение

Месяц	Число дней в этом месяце	Между k -м числом этого и следующего месяца проходит 4 полные недели и еще
Март	31	3 дня
Апрель	30	2 »
Май	31	3 »
Июнь	30	2 »
Июль	31	3 »
Август	31	3 »
Сентябрь	30	2 »
Октябрь	31	3 »
Ноябрь	30	2 »
Декабрь	31	3 »

За движением дней недели удобно следить по такому кругу (рис. 1). Чтобы не путаться с февралем и с високосными годами, начнем сразу с марта. Предположим, что k -е марта — суббота.

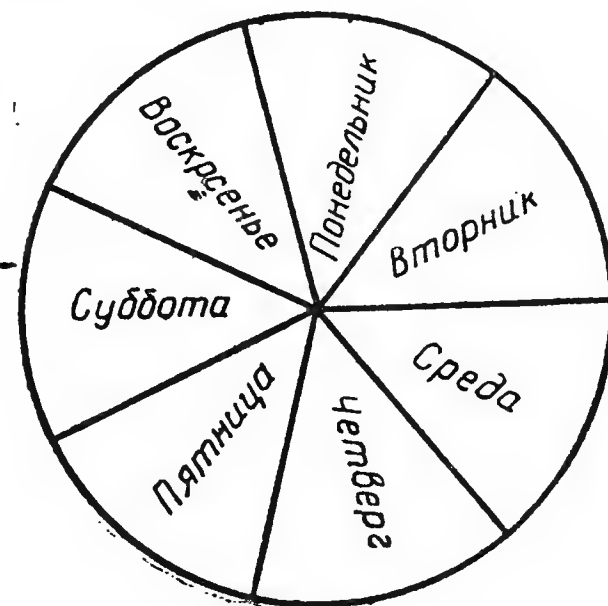


Рис. 1

Тогда, пользуясь последним столбцом нашего календаря и нарисованным кругом, нетрудно подсчитать, что

k -е апреля — вторник,
 k -е мая — четверг,
 k -е июня — воскресенье,
 k -е июля — вторник,
 k -е августа — пятница,
 k -е сентября — понедельник,
 k -е октября — среда.

На этом можно кончить: уже с марта по октябрь k -е число побывало любым днем недели. Если бы k -е марта было каким-нибудь другим днем недели, а не субботой, то все дни, приходящиеся на k -е числа, просто сдвинулись бы по кругу на один и тот же угол и по-прежнему с марта по октябрь среди k -х чисел встретились бы все дни недели.

Нужно еще привести пример, показывающий, что 31-е число может не быть воскресеньем ни в одном ме-

сяце. Это нетрудно сделать с помощью нашего календаря.

Если 1-е января — понедельник, а год не високосный, то

31 января — среда,
 31 марта — суббота,
 31 мая — четверг,
 31 июля — вторник,
 31 августа — пятница,
 31 октября — среда,
 31 декабря — понедельник.

2. Ответ. $72^\circ, 72^\circ, 36^\circ$ или $\frac{360^\circ}{7}, \frac{360^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7}$.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник ($AB=BC$) и AD — биссектриса угла BAC . Обозначим $\angle BAC = \angle BCA$ через 2α ; тогда $\angle ABC = 180^\circ - 4\alpha$; $\angle BAD = \angle DAC = \alpha$.

Надо рассмотреть два случая.

1) $AD=AC$ (рис. 2а). Тогда треугольник ADC равнобедренный, $\angle ADC = \angle ACD = 2\alpha$; следовательно, сумма углов в треугольнике ADC равна $5\alpha = 180^\circ$ и $\alpha = 36^\circ$.

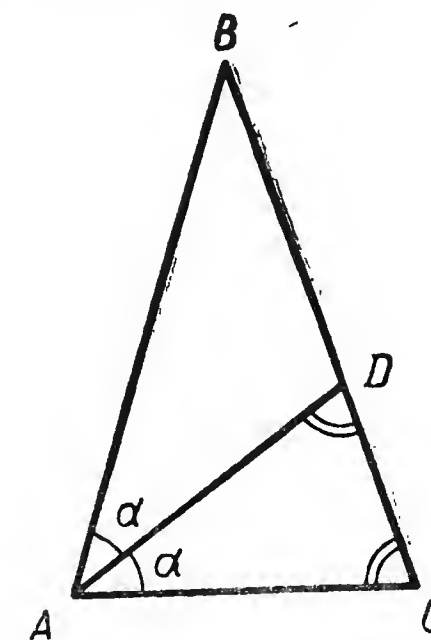


Рис. 2а

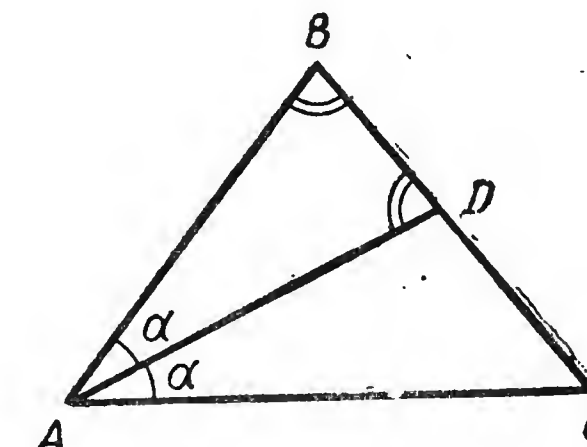


Рис. 2б

2) $AD=AB$ (рис. 2б). Тогда треугольник ADB равнобедренный,

$$\angle ADB = \angle ABD = 180^\circ - 4\alpha$$

и сумма углов треугольника ADB равна $360^\circ - 7\alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$.

3. Ответ. $x_{1,2} = a \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $x_{3,4} = a(1 \pm \sqrt{2})$.

I решение. Заметим, что левая часть уравнения

$$x^4 + a^4 + 3a^3x - 3ax^3 = 0$$

разлагается на множители:

$$x^4 + a^4 + 3a^3x - 3ax^3 = (x^2 - a^2 - ax)(x^2 - a^2 - 2ax).$$

Таким образом, остается решить два квадратных уравнения, из которых находятся четыре корня уравнения.

Возникает вопрос: как можно было придумать такое разложение на множители? Чтобы ответить на этот вопрос, мы приведем другое, более подробное и естественное решение той же задачи.

II решение. Сгруппируем члены нашего уравнения таким образом:

$$(x^2 - a^2)^2 - 3ax(x^2 - a^2) + 2a^2x^2 = 0.$$

Разделим теперь обе части уравнения на a^2x^2 (это можно сделать при $a \neq 0$, так как $x=0$ не является при этом решением уравнения, т. е. $ax \neq 0$):

$$\left(\frac{x^2 - a^2}{xa}\right)^2 - 3\left(\frac{x^2 - a^2}{xa}\right) + 2 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно $\frac{x^2 - a^2}{xa}$. Его корни: 1 и 2. Итак, остается решить два квадратных уравнения:

$$\frac{x^2 - a^2}{xa} = 1 \text{ и } \frac{x^2 - a^2}{xa} = 2.$$

4. Ответ. Меньше.

Пусть v — скорость парохода относительно воды, u — скорость течения.

Время, за которое пароход пройдет по реке путь туда и обратно, равно

$$\frac{10}{v+u} + \frac{10}{v-u} = \frac{20v}{v^2 - u^2}.$$

Время, за которое пароход пройдет 20 км по озеру, равно $\frac{20}{v}$. Поскольку $v^2 - u^2 < v^2$, то $\frac{v}{v^2 - u^2} > \frac{v}{v^2} = \frac{1}{v}$.

5. Ответ. 266 666.

Заметим, что нам нужно выбрать числа, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5 (они заведомо не будут делиться на 4).

I решение. Среди чисел от 1 до 30 таких чисел 8: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Число $m + 30n$ будет делиться или не делиться на 2 (на 3 или на 5) в зависимости от того, делится ли m на 2 (соответственно на 3 или на 5). Поэтому среди каждых следующих 30 чисел: от 31 до 60, от 61 до 90 и т. д. — будет ровно 8 таких, которые не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5. Поэтому от 1 до $999\,990 = 30 \cdot 33\,333$ будет $8 \cdot 33\,333 = 266\,664$ нужных нам числа. Среди чисел от $999\,991$ до $1\,000\,000$ (как всегда, в первом десятке следующих 30 чисел) будет еще два нужных нам числа: $999\,991$ и $999\,997$.

II решение. Подсчитаем, сколько существует чисел от 1 до $1\,000\,000$, делящихся хотя бы на одно из чисел 2, 3 или 5. Очевидно, что количество чисел, меньших $1\,000\,000$ и делящихся на n , равно «целой части» числа $\frac{1\,000\,000}{n}$.

Мы будем обозначать целую часть числа x так: $[x]$.

Таким образом, среди чисел от 1 до $1\,000\,000$ существует:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1\,000\,000}{2} \right] & \text{ чисел, делящихся на 2;} \\ \left[\frac{1\,000\,000}{3} \right] & \text{ чисел, делящихся на 3;} \\ \left[\frac{1\,000\,000}{5} \right] & \text{ чисел, делящихся на 5.} \end{aligned}$$

Чтобы узнать, сколько существует чисел от 1 до миллиона, делящихся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, нужно сложить эти три квадратные скобки. Но при этом некоторые числа будут считаться два раза. А именно, это будут:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1\,000\,000}{2 \cdot 3} \right] & \text{ чисел, делящихся на 2 и на 3;} \\ \left[\frac{1\,000\,000}{3 \cdot 5} \right] & \text{ чисел, делящихся на 3 и на 5,} \\ \left[\frac{1\,000\,000}{2 \cdot 5} \right] & \text{ чисел, делящихся на 5 и на 2.} \end{aligned}$$

Если вычесть из суммы первых трех квадратных скобок три последние, то числа, которые делятся и на 2, и на 3, и на 5, будут три раза считаться «с плюсом» и три раза — «с минусом», таким образом, мы должны еще учесть $\left[\frac{1\,000\,000}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right]$ чисел, делящихся на 2, на 3 и на 5.

Итак, количество чисел, делящихся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5, равно

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1\,000\,000}{2} \right] + \left[\frac{1\,000\,000}{3} \right] + \left[\frac{1\,000\,000}{5} \right] - \\ & - \left[\frac{1\,000\,000}{6} \right] - \left[\frac{1\,000\,000}{15} \right] - \left[\frac{1\,000\,000}{10} \right] + \\ & + \left[\frac{1\,000\,000}{30} \right] = 500\,000 + 333\,333 + 200\,000 - \\ & - 166\,666 - 66\,666 - 100\,000 + 33\,333 = 733\,334. \end{aligned}$$

Нас интересуют все остальные числа: те, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5. Их количество равно $1\,000\,000 - 733\,334$.

6. В рассматриваемом шестиугольнике все углы составляют по 120° и поэтому противоположные стороны параллельны. Пусть $AB > DE$ (рис. 3).

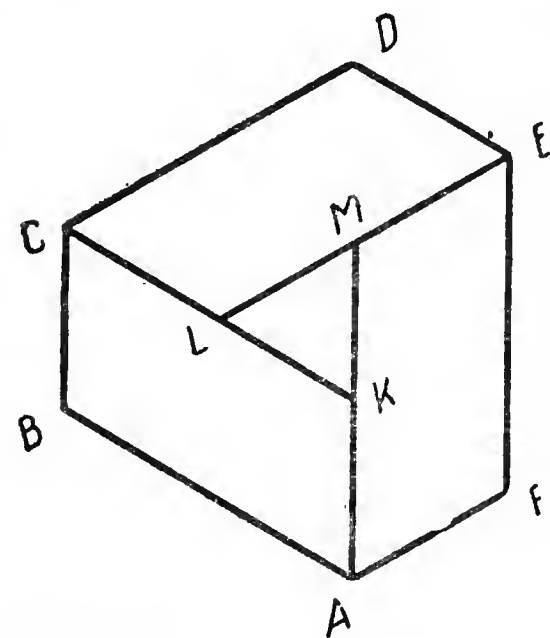


Рис. 3

Построим параллелограммы $ABCK$, $CDEL$ и $EFAM$. Тогда треугольник KLM , образовавшийся в центре, равносторонний (все углы по 60°), поэтому его стороны:

$$\begin{aligned} KL &= CK - CL = AB - DE, \\ KM &= AM - AK = EF - BC, \\ ML &= EL - EM = CD - FA - \end{aligned}$$

равны.

7. Ответ. 50 мин.

Машина приехала домой на 20 мин. раньше обычного, следовательно, путь от места встречи до станции и обратно она прошла бы за 20 мин. Поэтому в момент встречи машине оставалось ехать до станции еще 10 мин. Обычно машина приезжала на станцию одновременно с человеком, а в этот раз человек приехал на 60 мин. раньше. Таким образом, он шел до встречи $60 - 10 = 50$ мин.

8. Утверждение задачи вытекает из такого тождества:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = \\ & = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать это тождество, достаточно сложить следующие три очевидные тождества:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b-c} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{ab-ac}{(b-c)(c-a)(a-b)}; \\ & \frac{b}{c-a} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{bc-ba}{(b-c)(c-a)(a-b)}; \\ & \frac{c}{a-b} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = \frac{c}{(a-b)^2} + \frac{ca-cb}{(b-c)(c-a)(a-b)}. \end{aligned}$$

Вторые слагаемые в правых частях этих трех тождеств в сумме дают 0.

9. Ответ. 1885-й.

1 решение. Будем считать, что в кругу n ребят и они занумерованы по порядку (по часовой стрелке): № 1, № 2, № 3, ... Будем идти по кругу, выводя из него ребят через одного, и остановимся рядом с № 1 в тот момент, когда мы пройдем один полный круг. Выясним следующие вопросы: 1) сколько человек осталось в кругу? 2) Кто будет первым (по номеру) из оставшихся на следующем — втором — витке?

Если n четно, то в кругу осталось $\frac{n}{2}$ человек, причем № 1 останется в кругу и будет, конечно, первым из оставшихся на втором витке.

Если n нечетно, то № 1 должен будет выйти из круга; после этого в кругу останется $\frac{n-1}{2}$ ребят, и второй виток

будет начинаться с № 3.

Теперь будем последовательно, начиная с $n=1966$, разматывать один виток за другим. Результаты будем записывать в такую таблицу:

Виток	Число ребят, оставшихся к этому витку	Номера нескольких первых на этом витке (подчеркиваем номер того, кто будет первым на следующем витке)			Разность номеров двух соседних ребят, оставшихся к этому витку
1	1966	№ 1	№ 2	№ 3	1
2	983	№ 1	№ 3	№ 5	2
3	491	№ 5	№ 9	№ 13	4
4	245	№ 13	№ 21	№ 29	8
5	122	№ 29	№ 45	№ 61	16
6	61	№ 29	№ 61	№ 93	32
7	30	№ 93	№ 157	№ 221	64
8	15	№ 93	№ 221	№ 349	128
9	7	№ 349	№ 605	№ 861	256
10	3	№ 861	№ 1373	№ 1885	512
11	1	№ 1885			

II решение. Докажем сначала, что если первоначальное число людей в кругу n равно степени 2, т. е. $n=2^k$, то № 1 — тот, с кого начинается счет, — останется в кругу до самого конца. Действительно, после первого обхода по кругу останется 2^{k-1} ребят, причем второй виток снова будет начинаться с № 1; после второго витка останется 2^{k-2} и на следующем витке № 1 снова останется в кругу и т. д. Через k витков № 1 останется в одиночестве.

Пусть теперь, согласно условию, в кругу стоит 1966 ребят. Будем идти по кругу, выводя их через одного, и остановимся в тот момент, когда из круга вышли 942 человека. В этот момент в кругу осталось $1966 - 942 = 1024 = 2^{10}$ ребят, и первый из оставшихся — тот, перед кем мы остановились, — имеет номер $2 \cdot 942 + 1 = 1885$. По доказанному ($1024 = 2^{10}$) он останется до самого конца.

З а м е ч а н и е. Точно так же можно решить эту задачу в общем случае, когда первоначально в кругу стоит n человек. Ответ будет такой: останется человек с номером $2(n - 2^k) + 1$, где k — наибольшее целое число, для которого $2^k \leq n$. Для тех, кто знаком с двоичной системой счисления, можно сформулировать ответ в более красивой форме: чтобы получить требуемый номер, нужно за-

писать n в двоичной системе и перенести первую цифру (это будет, конечно, 1) в конец. Например,

$$1966 = \overline{11110101110},$$

а

$$11101011101 = 1885$$

(черта сверху означает, что имеется в виду двоичная запись).

10. Ответ. $m=9, n=2; m=17, n=6$.

1) Одно из утверждений 2° и 3° неверно. Действительно, если $m=2n+5$, то $m+n=3n+5$ и заведомо не делится на 3.

2) Одно из утверждений 3° и 4° неверно. Действительно, если $m+n$ делится на 3, то и $m+7n=(m+n)+6n$ делится на 3. Поскольку это число, очевидно, больше 3, оно не может быть простым.

3) Таким образом, если 3° верно, то должны быть неверными два утверждения 2° и 4°, что противоречит условию задачи.

Таким образом, 3° неверно, следовательно, 1°, 2° и 4° верны.

4) Итак, $m=2n+5; m+1=kn$, где k — некоторое целое число. Отсюда $2n+5=kn-1; (k-2)n=6$, т. е. n — делитель числа 6; m определяется из равенства $m=2n+5$. Возможны следующие случаи:

$$n=1, m=7;$$

$$n=2, m=9;$$

$$n=3, m=11;$$

$$n=6, m=17.$$

Для этих пар m, n условия 1° и 2° выполнены, условие 3° — нет; осталось проверить условие 4°. Ему удовлетворяют только вторая и четвертая пары.

11. Ответ. $\sqrt{2}$.

В частном случае, когда трапеция равнобокая и сумма ее оснований равна 2, а высота 1, ее диагонали равны $\sqrt{2}$. Докажем, что в остальных случаях большая диагональ d_1 больше $\sqrt{2}$.

Обозначим диагонали трапеции через d_1 и d_2 ($d_1 \geq d_2$), их проекции на основании трапеции — через p_1 и p_2 (соответственно $p_1 \geq p_2$), основания трапеции — через a и b , высоту трапеции — через h .

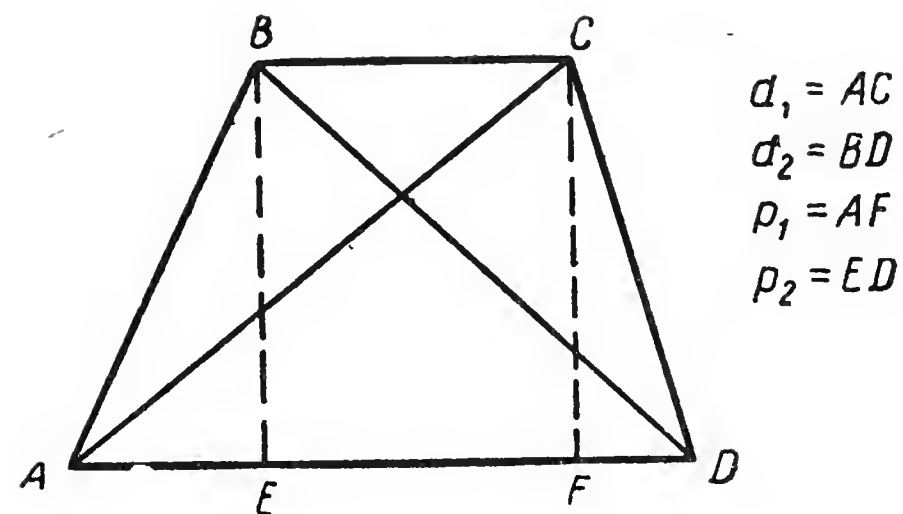


Рис. 4

Из чертежа нетрудно видеть, что $p_1 + p_2 = a + b$ (рис. 4). Поскольку $p_1 \geq p_2$, $p_1 \geq \frac{a+b}{2}$.

По условию, площадь трапеции равна 1:

$$\frac{a+b}{2} \cdot h = 1, \text{ т. е. } \frac{a+b}{2} = \frac{1}{h}.$$

Таким образом, $d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{h^2} + h^2$, но эта величина всегда больше или равна 2 (см. задачу 12, а).

Итак, мы доказали, что $d_1 \geq \sqrt{2}$. Равенство возможно только при $d_1 = d_2$, т. е. $p_1 = p_2 = \frac{a+b}{2}$ и $h = p_1$; тогда мы получаем равнобочную трапецию, у которой диагональ равна $\sqrt{2}$.

12. а) Запишем неравенство в таком виде:

$$a + \frac{1}{a} - 2 \geq 0.$$

Приведем левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geq 0, \text{ или } \frac{(a-1)^2}{a} \geq 0.$$

Полученное неравенство эквивалентно данному в задаче и, очевидно, выполняется при всех $a > 0$.

б) Проще всего начертить отдельно графики $y = x$ и $y = \frac{1}{x}$ (на рис. 5 они изображены пунктиром), а потом их «сложить» (т. е. для каждой точки K на оси Ox взять на перпендикуляре KL к оси Ox такую точку M , для ко-

торой $KM = KP + KQ$ с учетом знака). Можно строить график и «по точкам» (рис. 6).

Отметим самые существенные особенности графика:

1°. При положительных x , близких к 0, график неограниченно поднимается, «прижимаясь» к оси Oy .

2°. При больших положительных x график приближается к прямой $y = x$ (так как $\frac{1}{x}$ становится с ростом x все меньше и меньше, «стремится к нулю»).

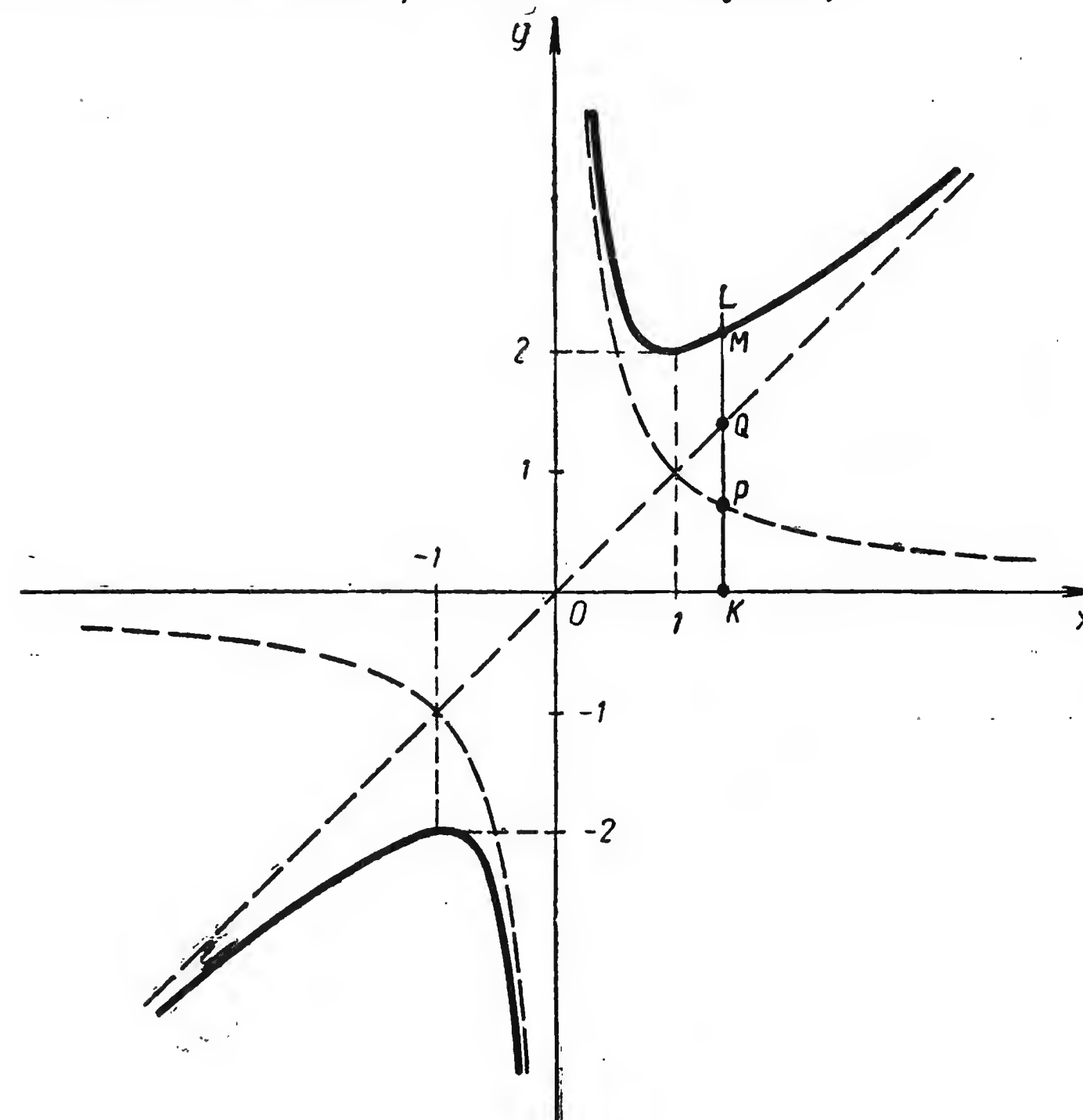


Рис. 5

x	0,1	0,2	0,5	1	2	3	5	...
y	10,1	5,2	2,5	2	2,5	3,33	5,2	...

x	-0,1	-0,2	-0,5	-1	-2	-3	-5	...
y	-10,1	-5,2	-2,5	-2	-2,5	-3,33	-5,2	...

Рис. 6

3°. Самая низкая точка графика при $x > 0$ имеет координаты: $x=1, y=2$. Действительно, согласно задаче 12, а при $x > 0, y = x + \frac{1}{x} \geq 2$.

4°. График получается в целом симметричным относительно начала координат.

Действительно, если $x > 0$ и $y = x + \frac{1}{x}$, т. е. точка (x, y) лежит на графике, то $-y = (-x) + \frac{1}{-x}$, т. е. точка с координатами $(-x, -y)$ тоже лежит на графике.

Из соображений симметрии получим, что при x , близком к 0 ($x < 0$), график неограниченно опускается вниз, при x очень большом по абсолютной величине ($x < 0$) график приближается снизу к прямой $y=x$, и наибольшее значение при $x < 0$ функция принимает в точке $x=-1$.

13. Ответ. 15 км/ч.

Катер, плывущий со скоростью v км/ч, расходует каждый час $90 + 0,4 v^2$ руб. и проплывает за час v км. Таким образом, на 1 км пути тратится

$$\frac{90 + 0,4 v^2}{v} = \frac{90}{v} + 0,4 v = 6 \left(\frac{15}{v} + \frac{v}{15} \right) \text{ (руб.)}.$$

Обозначим $\frac{v}{15}$ через x , тогда

$$6 \left(\frac{15}{v} + \frac{v}{15} \right) = 6 \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Из задачи 12, а вытекает, что это выражение принимает наименьшее значение при $x=1$, т. е. при $v=15$.

ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ В ЗАОЧНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ШКОЛУ (1964 г.)

1. Двое играют в такую игру: первый называет однозначное число (т. е. целое число от 1 до 9 включительно), второй прибавляет к нему еще какое-нибудь однозначное число и называет сумму, к этой сумме первый прибавляет еще какое-нибудь однозначное число и опять называет сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым назовет 66. Как нужно играть в такую игру, чтобы выиграть? Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

2. Разложить на множители:

а) $x^8 + x^4 + 1$ (на 3 множителя);

б) $x^5 + x + 1$ (на 2 множителя).

3. Из вершины B треугольника ABC проведены медиана и высота. Оказалось, что они делят угол ABC на три равные части. Определить углы треугольника ABC .

4. Четверо ребят — Алеша, Боря, Ваня и Гриша — соревновались в беге. После соревнований каждого из них спросили, какое место он занял. Алеша ответил: «Я не был ни первым, ни последним». Боря ответил: «Я не был последним». Ваня ответил: «Я был первым». Гриша ответил: «Я был последним». Три из этих ответов правильные, а один неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

5. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны?

6. Доказать, что в произвольном треугольнике:

а) сумма длин медиан меньше периметра;

б) сумма длин медиан больше трех четвертей периметра.

7. На столе лежат книги, которые нужно упаковать. Если их связывать по 4, по 5 или по 6 в пачку, то каждый раз остается одна лишняя книга, а если связывать по 7 книг в пачку, то лишних книг не остается. Сколько книг могло быть на столе?

8. Построить треугольник по двум сторонам a и b , если известно, что угол против одной из них в 3 раза больше угла против другой.

9. а) Найти все целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$x + y = xy.$$

б) Какие целые положительные числа могут удовлетворять уравнению

$$x + y + z = xyz?$$

10. Если некоторое четырехзначное число умножить на четырехзначное число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, то получается восьмизначное число, у которого последние три цифры — нули. Найти все такие четырехзначные числа.

11. а) Построить окружность, которая касается данной окружности в данной точке и данной прямой.

б) Построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в данной точке.

12. а) Сколько корней имеет уравнение

$$x^2 - 3|x| + 1 = 0?$$

б) Нарисуйте график

$$y = x^2 - 3|x| + 1.$$

Примечание. Через $|x|$ обозначается абсолютная величина числа x .

**ЗАДАЧИ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
В ЗАОЧНУЮ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ШКОЛУ
(1965 г.)**

1. Доказать, что число N^5 оканчивается на ту же цифру, что и число N .

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O . Доказать, что сумма углов AOB и COD равна 180° .

3. Решить уравнение

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4.$$

(Решить уравнение — это значит найти все числа, удовлетворяющие этому уравнению, и доказать, что других таких чисел не существует.)

4. В турнире участвовало 5 шахматистов. Определить результаты всех партий, если известно, что каждый сыграл с каждым по одной партии и все набрали разное число очков, причем:

а) занявший первое место не сделал ни одной ничьей;

б) занявший второе место не проиграл ни одной партии;

в) занявший четвертое место не выиграл ни одной партии.

(В шахматных турнирах выигравшему начисляется одно очко, проигравшему — нуль очков; если партия закончилась вничью, каждому из игравших начисляется по $\frac{1}{2}$ очка.)

5. Доказать, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей диагоналей. (У правильного восьмиугольника все стороны равны между собой и все углы равны между собой.)

6. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых встречается единица, или тех, в записи которых ее нет?

7. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O . Известно, что $OC=AB$. Найти угол при вершине C .

8. Числа x и y положительны, и $x+y=5$. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}?$$

9. Клетки шахматной доски занумерованы по порядку числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд — слева направо числами от 1 до 8, второй горизонтальный ряд — тоже слева направо числами от 9 до 16 и т. д. На доске расставлены восемь ладей так, что они не бьют друг друга. Какие значения может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи? (Ладья бьет все клетки, находящиеся с ней в одном горизонтальном или вертикальном ряду.)

10. Прохожий, идущий вдоль трамвайной линии, замечает, что его каждые 7 минут догоняет трамвай и каждые 5 минут проходит трамвай навстречу. Через какой интервал времени отправляются трамваи с конечного пункта? (Считается, что трамваи отправляются с конечного пункта через равные промежутки времени и движутся от одного конечного пункта до другого с постоянной скоростью и без остановок; прохожий тоже идет с постоянной скоростью.)

11. На плоскости даны три параллельные прямые. Построить квадрат так, чтобы три его вершины лежали на трех данных прямых.

12. Каким должно быть число a , чтобы уравнения

$$x^3 + ax + 1 = 0 \text{ и } x^4 + ax^2 + 1 = 0$$

имели общий корень?

13. Дан треугольник ABC . Из его медиан построен треугольник $A_1B_1C_1$, а из медиан этого треугольника построен треугольник $A_2B_2C_2$. Докажите, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ подобны, и найдите коэффициент подобия.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} = 0.$$

2. Существует ли треугольник, у которого:

а) все высоты меньше 1 см, а площадь больше 100 см²;

б) две высоты больше 100 см, площадь меньше 1 см²?

3. Доказать, что в произвольном треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенного в ту же вершину.

4. Построить треугольник, если дана прямая, на которой лежит его основание и две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

5. Разбить прямоугольник на пять попарно неподобных прямоугольных треугольников.

6. На необитаемом острове пират зарыл клад, руководствуясь следующими построениями. Пусть A и B — два камня, C_1 , C_2 и C_3 — три пальмы. Построим точку A_1 так: $A_1C_1 = AC_1$, $\angle AC_1A_1 = 90^\circ$ — и точку B_1 так: $B_1C_1 = BC_1$, $\angle BC_1B_1 = 90^\circ$. Построим точку пересечения отрезков A_1B и AB_1 и обозначим ее P_1 . В центре окружности, проведенной через P_1 , P_2 и P_3 (точки P_2 и P_3 строятся так же, как P_1 , только с использованием соответственно пальм C_2 и C_3), и был зарыт клад. Когда пират вернулся на остров, пальмы снесло штормом. Но все же он сумел найти клад. Как?

7. Доказать, что

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)} = 2^n.$$

8. Доказать, что если у каждого из данных многочленов сумма коэффициентов равна 1, то и у многочлена, являющегося их произведением, сумма коэффициентов равна 1.

9. Имеется несколько натуральных чисел, не больших n . При любом разбиении их на две группы сумма одной из них не больше n . Какую наибольшую сумму могут иметь все числа?

10. Доказать, что среди любых 99 последовательных натуральных чисел обязательно найдется такое, у которого сумма цифр делится на 14.

11. a и b — натуральные числа. Наименьшее положительное число вида $ax + by$, где x и y — целые, равно наибольшему общему делителю a и b . Доказать.

12. При каких целых a и b корни уравнения $x^2 - abx + a + b = 0$ целые?

13. Доказать, что если четырехугольник и вписанный и описанный, то его площадь равна квадрату корню из произведения сторон.

14. На окружности взяты произвольно четыре точки: A, B, C, D . Рассмотрим середины M, N, P, Q образовавшихся четырех дуг. Доказать, что среди отрезков, соединяющих точки M, N, P, Q , есть два перпендикулярных между собой.

15. Вершины произвольного выпуклого пятиугольника соединены через одну. Доказать, что сумма пяти углов при вершинах полученной пятиконечной звезды равна 180° .

16. В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

17. Сколько существует чисел, в десятичной записи которых нет нулей и сумма цифр равна 10?

18. Доказать, что можно раскрасить плоскость с помощью: а) девяти красок, б) семи красок — таким образом, что расстояние между любыми двумя точками одного цвета будет отлично от 1.

19. Сколько решений в целых числах имеет уравнение:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}?$$

20. По окружности расставлено несколько чисел, сумма которых положительна. Доказать, что можно выбрать такое из них, что оно само будет положительно, сумма

его со следующим по часовой стрелке положительна, сумма со следующими двумя положительна и т. д.

21. Даны 20 положительных целых чисел, таких, что

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{20} \leq 70.$$

Доказать, что среди разностей $a_j - a_k$ ($j > k$) найдутся по крайней мере четыре равные.

22. Площадь многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге с вершинами в узлах сетки, равна $j + \frac{r}{2} - 1$, где j — число узлов, лежащих внутри много-

угольника, r — число узлов, лежащих на его сторонах и в вершинах (сторона клетки принята за 1). Доказать.

23. Собралось n человек. Некоторые из них знакомы между собой, причем каждые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых, а у двух знакомых нет общих знакомых. Доказать, что каждый из них знаком с одинаковым числом человек.

24. Между зажимами A и B включено несколько сопротивлений. Каждое сопротивление имеет один входной и один выходной зажим. Какое наименьшее число сопротивлений необходимо иметь и какова должна быть схема их соединений, чтобы при порче любых девяти сопротивлений между зажимами A и B цепь осталась замкнутой, но не было короткого замыкания? (Порча сопротивления: короткое замыкание или обрыв.)

25. Из бумаги вырезан многоугольник. Две точки его границы соединяются отрезком, по которому многоугольник складывается. Доказать, что периметр многоугольника, получающегося после складывания, меньше периметра исходного.

26. На бесконечной шахматной доске стоит конь. На сколько различных полей он может попасть за n ходов?

Цена 3 коп.

К



Заочная математическая школа

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

*Участники семинара
преподавателей ВЗМШ VIII
Выпуск VIII
Горки Ленинские
февраль 1978 г.*



ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1971

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первом разделе мы публикуем решения задач вступительной контрольной работы. Разумеется, придуманные вами решения могут отличаться от этих и при этом быть верными: ведь даже одно и то же решение можно записать по-разному — подробно или кратко, наглядно или формально. Мы постарались изложить решения возможно более наглядно, чтобы их поняли даже те, кто не смог решить эти задачи сам. Впрочем, и тем, кто решил задачи, мы советуем разобраться в этих решениях, чтобы перенять, возможно, какие-то новые приемы и поучиться четкости в записи решений. Это относится, в частности, к решению задачи 5. Во многих присланных решениях перебор проведен нечетко, предположения, выделяющие тот или иной случай, не выписываются, разбираются не все случаи. В задаче 10 немногим пришлось в голову изобразить условие в виде чертежа или таблицы. Вообще четкая и в то же время простая запись решения составляет для многих камень преткновения, и над этим следует поработать.

Во втором разделе даются задачи из разных разделов математики для самостоятельной работы. Среди этих задач есть как легкие, так и трудные. Поэтому не старайтесь решать обязательно все задачи подряд. Если какая-нибудь задача Вас заинтересует, а решить ее не удастся, то отложите ее на время и возьмитесь за другие, а потом опять вернитесь к отложенной. Как правило, самые интересные и полезные задачи именно те, которые трудно решить сразу.

Контрольную работу составили Н. Васильев, В. Гутенмахер, Л. Евтушик, П. Кантор, П. Масарская, Ж. Раббот, А. Тоом. Решения контрольных задач написаны А. Тоомом. Сборник подготовили к печати П. Кантор и Ж. Раббот.

Методическая комиссия ЗМШ.

**ВСТУПИТЕЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
В ЗМШ 1971 ГОДА**

1. В полукруг диаметра 2 вписаны две окружности, которые касаются между собой. Каждая из них касается диаметра и дуги полукруга. Найти диаметр одной из них, если диаметр другой равен 1.

2. Найти наибольший общий делитель чисел 987654321 и 123456789.

3. Основания трапеции $ABCD$ равны: $AB=a$, $CD=b$. O — точка пересечения диагоналей. Определить отношение площади треугольника AOB к площади трапеции.

4. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда число $x^8 + \frac{1}{x^8}$ тоже целое.

5. О треугольнике ABC были сделаны 4 утверждения:

- 1) треугольник ABC прямоугольный;
- 2) $\angle A = 30^\circ$;
- 3) $AB = 2BC$;
- 4) $AC = 2BC$.

Известно, что два из этих утверждений верны, а два других — неверны. Найти периметр треугольника ABC , если $BC=1$.

6. Известно, что $a+b+c < 0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Определить, какой знак имеет число c .

7. Про точки A , B , C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM . Докажите, что точка M лежит на отрезке BC .

8. Сколько делителей имеет число 1971^{1971} ? (то есть, сколько существует различных целых положительных чисел, на которые это число делится?).

9. Можно ли завернуть кубик с ребром 1 в квадратный кусок бумаги со стороной 3?

10. Можно ли выписать девять чисел 1, 2, 3, ..., 9 по кругу в

таком порядке, чтобы сумма никаких двух соседних чисел не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?

11. Жители города Правдин всегда говорят правду, а жители города Лгунов всегда лгут.

В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор:

А (обращаясь к Б и В): «Я не был на матче. Скажите, кто выиграл?»

Б: «Г сказал мне, что их команда проиграла».

В: «Наша команда выиграла».

Г (сидя в автобусе, идущий в другой город и обращаясь к А): «Поедем вместе, А, ведь мы из одного города».

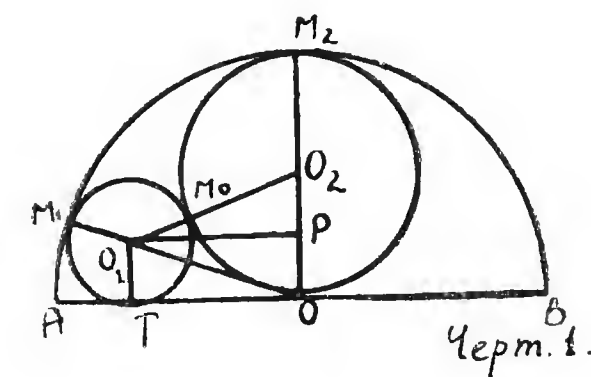
А: «Вы ошибаетесь, Г. Я живу здесь. Это В из вашего города». Определить, кто из какого города, где происходил футбольный матч и какая команда выиграла.

12. По шоссе в данном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошел по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошел 7 км, и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошел 17 км. Сколько автобусов при этом его обогнали? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью).

13. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности, которые касаются отрезка CE в точках K и H . Найти длину отрезка KH , если $AE=a$, $EB=b$.

**РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ
В ЗМШ 1971 ГОДА**

1. Пусть AB — диаметр полукруга, O — его центр, O_1 и O_2 — центры первой и второй окружностей, M_0 — точка их касания друг с другом, M_1 и M_2 — точки их касания с полукругом, T — точка касания первой окружности с диаметром (см. рис. 1).



Нам придется трижды использовать следующий очевидный факт: если две окружности касаются друг друга, то точка касания и центры этих окружностей лежат на одной прямой (для его доказательства достаточно заметить, что если бы окружности имели общую точку P , не лежащую на прямой l , проходящей через их центры, то они имели бы еще одну общую точку — а именно, точку P' , симметричную точке P относительно прямой l).

В частности, точки O , O_2 и M_2 лежат на одной прямой. Поскольку $OM_2 = 1$, точка O должна лежать на окружности диаметра 1 (OM_2 — диаметр этой окружности). По условию эта окружность касается прямой AB . Таким образом, она касается AB в точке O и $M_2O \perp AB$. Теперь обозначим радиус первой окружности через r и составим уравнение.

Поскольку точка O_1 лежит на отрезке OM_1 , то

$$OO_1 = OM_1 - O_1M_1 = 1 - r,$$

$$OT^2 = OO_1^2 - O_1T^2 = (1 - r)^2 - r^2.$$

Опустим из O_1 перпендикуляр O_1P на OO_2 . Тогда O_1POT — прямоугольник и

$$O_2P = O_2O - PO = O_2O - O_1T = 1/2 - r.$$

Поскольку точки O_1 , M_0 и O_2 лежат на одной прямой, то

$$O_1O_2 = \frac{1}{2} + r \quad \text{и} \quad PO_1^2 = O_2O_1^2 - O_2P^2 = \left(\frac{1}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - r\right)^2.$$

Приравняв PO_1^2 и OT^2 , получаем

$$\left(\frac{1}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - r\right)^2 = (1 - r)^2 - r^2,$$

откуда находим, что $r = 1/4$.

2. Обозначим наибольший общий делитель двух данных чисел буквой x . Тот факт, что эти числа делятся на x , можно записать следующим образом:

$$987654321 = kx,$$

$$123456789 = lx,$$

где k, l — целые числа. Ясно, что, если мы умножим второе, меньшее число на какое-либо целое число m и вычтем из первого, то разность $987654321 - m \cdot 123456789 = kx - m \cdot lx = (k - ml)x$ будет делиться на x .

Разделив 987654321 на 123456789 с остатком, получим:

$$987654321 = 8 \cdot 123456789 + 9$$

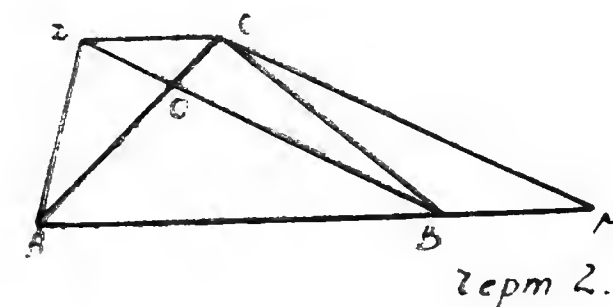
(проверьте, что $8 \cdot 123456789 = 987654312$), так что при $m = 8$ написанная выше разность $987654321 - m \cdot 123456789 = (k - ml)x$ будет равна 9. Итак, 9 делится на x . Значит, $x \leq 9$. Оказывается, что оба данных числа делятся на 9 (хотя бы потому, что суммы их

цифр делятся на 9. Поэтому 9 — их общий делитель. А поскольку $x \leq 9$, то 9 — наибольший общий делитель.

3. Проведем через точку C прямую, параллельную BD (см. рис. 2). Пусть она пересечет прямую AB в точке M . Поскольку

$$AM = AB + DC, \quad \text{то} \quad S_{\triangle ACM} = \frac{AB + DC}{2} \cdot H,$$

где H — высота трапеции, т. е. площадь треугольника ACM равна площади трапеции $ABCD$. Будем искать отношение площадей тре-



угольников ACM и AOB . Они подобны. Значит, их площади относятся как квадраты сходственных сторон

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ACM}} = \left(\frac{AB}{AM}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

Ответ:

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

4. Поскольку

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2, \quad \text{то} \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad (1).$$

Из этого тождества следует, что, если $x + \frac{1}{x}$ — целое число, то и

$x^2 + \frac{1}{x^2}$ тоже целое.

Подставив в (1) x^2 вместо x , мы получим новое тождество:

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2, \quad (2)$$

из которого следует, что, если $x^2 + \frac{1}{x^2}$ — целое, то и $x^4 + \frac{1}{x^4}$ — целое.

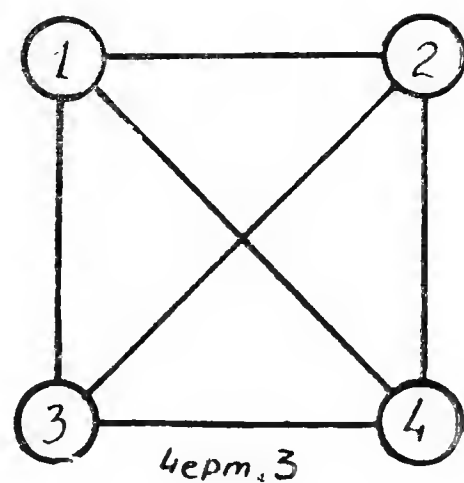
Объединив этот вывод с предыдущим, мы можем утверждать, что, если $x + \frac{1}{x}$ — целое, то и $x^4 + \frac{1}{x^4}$ — тоже целое.

Подставив в (2) x^2 вместо x , получим еще одно тождество:

$$x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2,$$

после чего можем утверждать, что, если $x^4 + \frac{1}{x^4}$ — целое, то и $x^8 + \frac{1}{x^8}$ — целое. Объединив это заключение с полученными выше, получаем, что, если $x + \frac{1}{x}$ — целое, и $x^8 + \frac{1}{x^8}$ — целое.

5. Нам сказано, что из четырех утверждений какие-то два верны, а другие два неверны, но не сказано, какие именно верны, а какие — нет. Поэтому рассмотрим несколько случаев. В каждом таком случае мы будем предполагать, что какие-то два определенных утверждения верны, а другие два неверны. Чтобы не пропустить какой-нибудь случай, сначала выясним, сколько их, пользуясь схемой на черт. 3. На этой схеме каждые две из четырех цифр 1, 2, 3, 4 соединены.



Ясно, что случаев ровно столько, сколько отрезков, соединяющих цифр, то есть шесть. Рассмотрим их все по порядку.

Чтобы указать, какой случай мы рассматриваем, мы будем называть только номера верных утверждений. Например, «случай 1.2» здесь означает: случай, в котором предполагается, что утверждения 1 и 2 верны (а 3 и 4 — неверные).

Случай 1.2. Поскольку $\angle A = 30^\circ$, то прямой угол — либо B , либо C . Если $\angle B$ — прямой, то $AC = 2BC$, чего не должно быть, так как утверждение 4 в этом случае неверно. Если $\angle C$ — прямой, то $AB = 2BC$, что также противоречит условию. Итак, случай 1.2 невозможен.

Случай 1.3. Угол A не может быть прямым, так как против него лежит не наибольшая сторона. Если $\angle C = 90^\circ$, то $\angle A = 30^\circ$, чего

не может быть в этом случае. Значит, $\angle B = 90^\circ$. Тогда утверждения 2 и 4 неверны. Значит, такой случай возможен. Тогда, по теореме Пифагора, $AC = \sqrt{5}$, а периметр равен $3 + \sqrt{5}$.

Случай 1.4. Разбирается аналогично случаю 1.3. Возможен, если $\angle C = 90^\circ$. Периметр равен $3 + \sqrt{5}$.

Случай 2.3. Если $\angle A = 30^\circ$ и $AB = 2BC$, то $\angle C = 90^\circ$, что противоречит условию.

Случай 2.4. Аналогично случаю 2.3, невозможен.

Случай 3.4. Утверждения 1, 2 неверны. Значит, этот случай возможен. Периметр равен 5.

Ответ: а) $3 + \sqrt{5}$; б) 5.

6. Поскольку квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то $b^2 - 4ac < 0$, откуда $ac > \frac{b^2}{4}$. Докажем, что $c(a + b + c) > 0$.

Действительно:

$$c(a + b + c) = ac + bc + c^2 > \frac{b^2}{4} + bc + c^2 = \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 \geq 0.$$

Поскольку в положительном произведении $c(a + b + c)$ один множитель, $a + b + c$, отрицателен, то и другой, c , отрицателен. Итак, $c < 0$. Второе решение. Известно, что, если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ ни при каком x не равен нулю, то его знак — один и тот же при всех x . Заметим, что число $a + b + c$ — это значение нашего трехчлена при $x = 1$, а число c — это его значение при $x = 0$. Значит, эти два числа имеют один и тот же знак. Поскольку $a + b + c < 0$, то и $c < 0$.

7. Предположим, что точка A не лежит на отрезке BC , и покажем, что тогда не выполняется условие задачи: «для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM », т. е. покажем, что тогда существует по крайней мере одна точка M , для которой отрезок AM не меньше каждого из отрезков BM и CM . Рассмотрим два случая.

а) Точка A лежит на прямой BC , но вне отрезка BC . Расположим точку M на прямой BC так, чтобы отрезок BC лежал внутри отрезка AM . Тогда, очевидно, будут выполняться неравенства: $AM > BM$, $AM > CM$, что противоречит условию.

б) Точка A не лежит на прямой BC . Тогда можно построить треугольник ABC и описать около него окружность. Поместим точку M в центр этой окружности. Тогда $AM = BM$, $AM = CM$, что противоречит условию.

8. Разложим сначала 1971 на простые множители: $1971 = 3^3 \cdot 73$. Отсюда видно, что разложение числа 1971^{1971} на простые множители таково:

$$3^{3 \cdot 1971} \cdot 73^{1971} = 3^{5913} \cdot 73^{1971}.$$

Всякий делитель этого числа может содержать в себе простыми множителями только числа 3 и 73, причем троек может быть не больше 5913, а множителей, равных 73 — не больше 1971. Иными словами, всякий делитель данного числа имеет вид $3^k \cdot 73^l$, где k, l — целое и $0 \leq k \leq 5913$, $0 \leq l \leq 1971$. Можно представлять себе все эти делители расположенными в прямоугольную таблицу, в которой l — номер строки (начиная с нулевой строки), k — номер столбца (начиная с нулевого столбца):

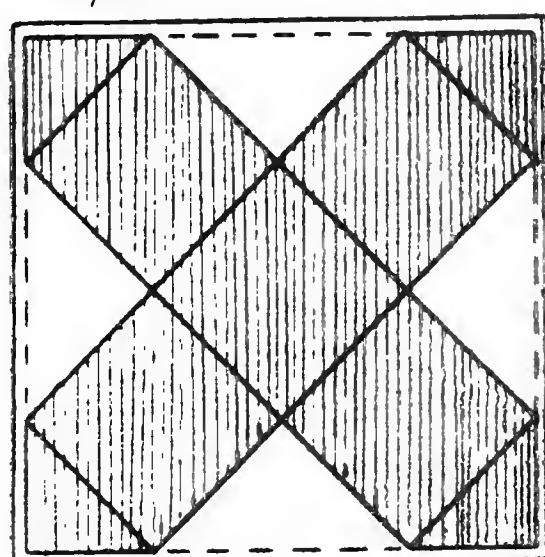
l	k			
	0	1	2	
0	$3^0 \cdot 73^0 = 1$	$3^1 \cdot 73^0 = 3$	$3^2 \cdot 73^0 = 9$	$3^{5913} \cdot 73^0$
1	$3^0 \cdot 73^1 = 73$	$3^1 \cdot 73^1 = 219$	$3^2 \cdot 73^1 =$	$3^{5913} \cdot 73^1$
2	$3^0 \cdot 73^2$	$3^1 \cdot 73^2$	$3^2 \cdot 73^2$	$3^{5913} \cdot 73^2$
1971	$3^0 \cdot 73^{1971}$	$3^1 \cdot 73^{1971}$	$3^2 \cdot 73^{1971}$	$3^{5913} \cdot 73^{1971}$

После такого расположения множителей ясно, что их число равно произведению числа строк таблицы на число ее столбцов

$$5914 \cdot 1972 = 11662408.$$

9. Ответ: можно. Опишем, как это сделать.

Черт 4.

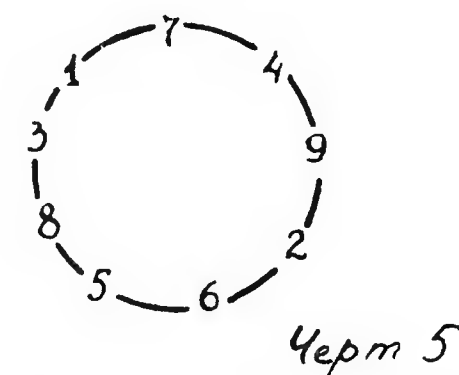


На рис. 4 заштрихована фигура, состоящая из пяти квадратиков 1×1 и четырех треугольников, получающихся от разрезания такого же квадратика по диагоналям. Эта фигура — выкройка куба

с ребром 1. Это значит, что, согнув ее по начерченным линиям, можно получить такой куб. Вместе с четырьмя прилегающими треугольниками, ограниченными пунктиром, она образует квадрат со стороной $2\sqrt{2}$.

Поскольку $2\sqrt{2} < 3$, то такую фигуру можно поместить внутри квадрата 3×3 , что и сделано на чертеже. Сгибая теперь весь квадрат и как угодно приминая лишние, незаштрихованные части, мы обернем куб.

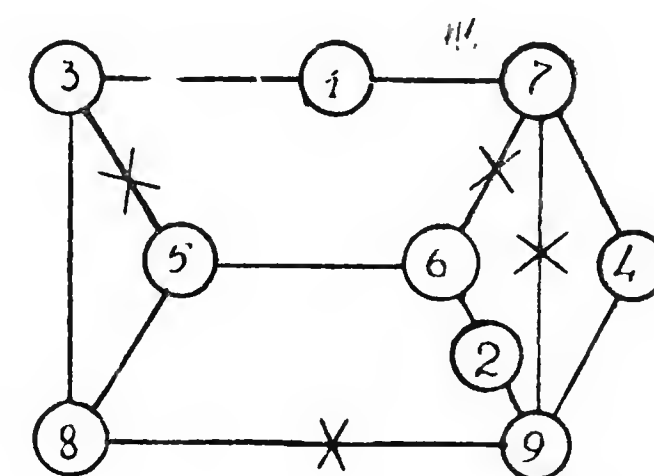
10. Ответ: можно. Как это сделать, показано на рис. 5.



На этом решение можно было бы и закончить, но мы объясним, как мы его получили и попутно докажем, что ответ в этой задаче единственный. Постараемся наглядно зафиксировать на бумаге, какие цифры могут стоять рядом, а какие — нет. Это можно сделать двумя способами. Можно составить такую таблицу:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+	-	+	-	-	-	+	-	-
2	-	+	-	-	-	+	-	-	+
3	+	-	+	-	+	-	-	+	-
4	-	-	-	+	-	-	+	-	+
5	-	-	+	-	+	-	+	-	-
6	-	+	-	-	+	+	-	-	-
7	+	-	-	+	-	+	+	-	+
8	-	-	+	-	+	-	-	+	+
9	-	+	-	+	-	-	+	+	+

черт. 6.



черт. 7.

В этой таблице строки и столбцы пронумерованы цифрами от 1 до 9. Если две цифры могут стоять рядом, то на пересечении строки и столбца с этими номерами стоит плюс, а если не могут, то минус. Можно поступить иначе. Нарисуем девять кружков и расставим в них цифры от 1 до 9. Соединим линией всякие два кружка, цифры в которых могут стоять рядом. Если две цифры не могут быть соседними, то мы их соединять не будем.

Полученную схему перерисуем, чтобы по возможности «распутать» ее. Результат изображен на черт. 7. Раз такой чертеж построен, вопрос задачи можно сформулировать так: можно ли, идя только по линиям, обойти все кружки этой фигуры по одному разу

и вернуться на прежнее место? Будем решать задачу, глядя на этот чертеж, хотя точно так же можно было бы пользоваться и таблицей. Поскольку 4 связано только с 7 и 9, то, значит, 7 и 9 и есть ее соседи по расположению на окружности. Аналогично, соседи 2 — цифры 6 и 9. Значит, 2 и 4 — соседи 9, а 7 и 8 — заведомо не соседи 9. Значит, связи 9 с 7 и 8 можно зачеркнуть (что и сделано на чертеже). Аналогично, 1 имеет соседями 3 и 7. Значит, соседи 7 — цифры 1 и 4, а связь 7 с 6 можно зачеркнуть. Теперь 8 связано только с 3 и 5, значит связь между 3 и 5 можно зачеркнуть. Оставшиеся линии образуют замкнутый путь, который и составляет единственное решение задачи.

11. Составим табличку:

А из Правдина?	
Б из Правдина?	
В из Правдина?	
Г из Правдина?	
Матч происходил в Правдине?	
Выиграла команда Правдина?	

Решить задачу — значит заполнить пустые графы этой таблички словами «да» или «нет» так, чтобы не вступить в противоречие с условием. Точнее, надо найти все такие способы заполнения, так как их может быть больше одного. На худой конец, можно перебрать все возможные способы заполнения (их всего 64) и для каждого проверить, противоречит он условию или нет. Но это, конечно, некрасивый способ решения. Будем решать иначе.

1) Из заявления В следует, что выиграла команда Правдина. Докажем это. Если В из Правдина, то сказанное им правда, и выиграла команда Правдина. Если В из Лгунова, то сказанное им неправда, и выиграла опять-таки команда Правдина.

2) Из заявления Б следует, что Б из Лгунова, так как это заявление заведомо неверно. Докажем это. Мы уже знаем, что выиграла команда Правдина. Если Г из Правдина, то он не мог сказать, что их команда проиграла, так как это была бы ложь. Если Г из Лгунова, то он тоже не мог сказать, так как это была бы правда.

3) Из заявления Г следует, что А из Правдина. Докажем это. Если Г из Правдина, то А действительно с ним из одного города,

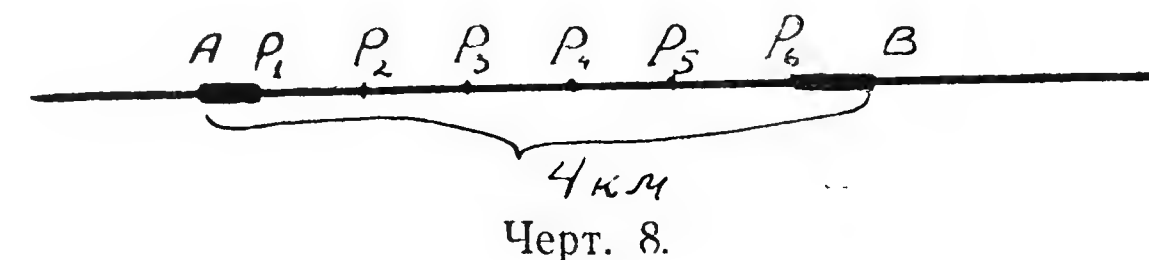
то есть из Правдина. Если Г из Лгунова, то А с ним не из одного города, то есть А снова из Правдина.

4) Теперь легко ответить на все вопросы. Из последнего заявления А следует, что дело происходит в Правдине, В и Г — из Лгунова. Ответ: А — из Правдина, Б, В, Г — из Лгунова, матч происходил в Правдине, выиграла команда Правдина.

12. Ясно, что автобусы обгоняют человека через равные промежутки времени (всякий такой промежуток равен

$$\frac{v_1 t}{v_1 - v_2},$$

где t — интервал времени между автобусами, v_1 — скорость автобусов, v_2 — скорость человека. Впрочем, мы этой формулой пользоваться не будем). Поэтому между теми моментами, когда его обгоняют автобусы, человек успевает пройти всякий раз одинаковое расстояние. Обозначим это расстояние через x .



На черт. 8 отрезок AB , отмеченный фигурной скобкой, изображает те 4 км, которые человек прошел в первый раз. Отметим на нем те 6 точек $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, в которых его обогнали автобусы. Промежутков между ними 5, и длина каждого равна x . Остаются два куса-пути по концам AP_1 и P_6B , которые человек прошел до того, как его обогнал первый автобус, и после того, как его обогнал последний автобус (на чертеже проведены жирной линией). Длина каждого из этих отрезков меньше x . Докажем это. Допустим, например, что $P_6B \geq x$. Тогда на отрезке P_6B поместится еще одна точка P_7 такая, что $P_6P_7 = x$. В этой точке человека, конечно, тоже обгонит автобус, а всего на этих 4 км человека обгонит более шести автобусов, что противоречит условию. Тот факт, что $AP_1 < x$, доказывается аналогично. Учитывая все это, мы можем написать

$$5x \leq 4 < 7x. \quad (1)$$

Аналогично, поскольку на отрезке в 7 км расположатся 8 точек, отстоящих на x друг от друга, а концевые отрезки снова будут меньше x ; то

$$7x \leq 7 < 9x. \quad (2)$$

Из (1) мы получаем, что $x \leq 4/5$, а из (2) получаем, что $x > 7/9$.

Теперь мы должны определить, сколько точек, отстоящих друг от друга на x км, можно расположить на отрезке 17 км.

Поскольку

$$\frac{17}{4/5} \equiv 21^{1/4}, \text{ а } \frac{17}{7/9} = 21^{6/7},$$

то

$$21 \frac{1}{4} \leq \frac{17}{x} < 21 \frac{6}{7},$$

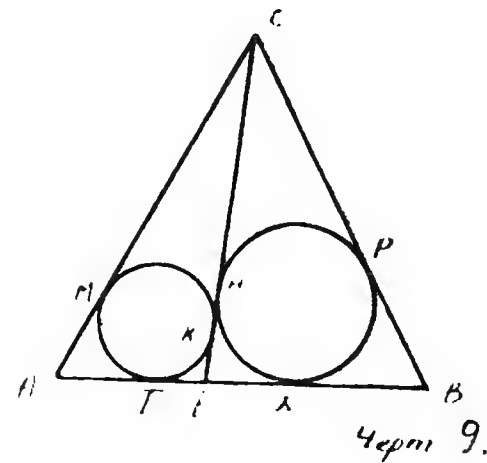
или

$$21^{1/4}x \leq 17 < 21^{6/7}x.$$

Докажем, что на отрезке в 17 км человека обогнал 21 или 22 автобуса. Действительно, если человека обогнали 20 автобусов (или меньше), то промежутков длины x между ними будет 19 (или меньше), и получим, что $17 > 21x$, что противоречит (3). Если человека обогнали 23 автобуса (или больше), то, аналогично рассуждая, получим, что $17 < 22x$, что тоже противоречит (3).

Ответ: 21 или 22 автобуса.

13. Обозначим точки касания окружностей с боковыми сторонами M и P , а с основанием — T и X (см. рис. 9).



Так как касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то $AM=AT$, $CM=CK$, $ET=EK$, $BX=BP$, $CP=CH$, $EX=EH$. Тогда периметр треугольника ACE равен $AT+AM+ET+EK+CM+CK=2AT+2TE+2CK=2a+2CK$. Аналогично, периметр треугольника BCE равен $2b+2CH$. Это можно записать так:

$$a+AC+CE=2a+2CK,$$

$$b+BC+CE=2b+2CH.$$

Вычтем из верхнего равенства нижнее и учтем, что $AC=BC$ по условию.

Получим:

$$a-b=2(a-b)+2(CK-CH),$$

$$CK-CH=\frac{b-a}{2}.$$

Длина отрезка KH , которую нам надо найти, равна $CK-CH$, если $CK \geq CH$, и $CH-CK$, если $CH \geq CK$.

Значит, если $b \geq a$, то ответ

$$\frac{b-a}{2};$$

если $b \leq a$, то ответ

$$\frac{a-b}{2}.$$

Тот, кто знаком с понятием модуля, может записать ответ одной формулой

$$\frac{|b-a|}{2}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Делится ли число 1234567891011...979899100 на 18?
2. Докажите, что не существует целых чисел x и y , удовлетворяющих уравнению

$$5x^2 - 7y^2 = 9.$$

3. В папке лежало несколько листов бумаги (не больше восьми). Некоторые из них разрезали на 7 кусков. Затем некоторые из полученных кусков снова разрезали на 7 кусков, и так повторили несколько раз. В результате получился 1971 кусок. Сколько листов бумаги было вначале в папке?

4. Найти общий наибольший делитель чисел 11111111 и 1111...111 (сто цифр, равных единице).

5. Найти все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. Можно раскрасить либо все грани куба в белый цвет, либо все в черный цвет, либо часть в белый цвет, а часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы ни переворачивать).

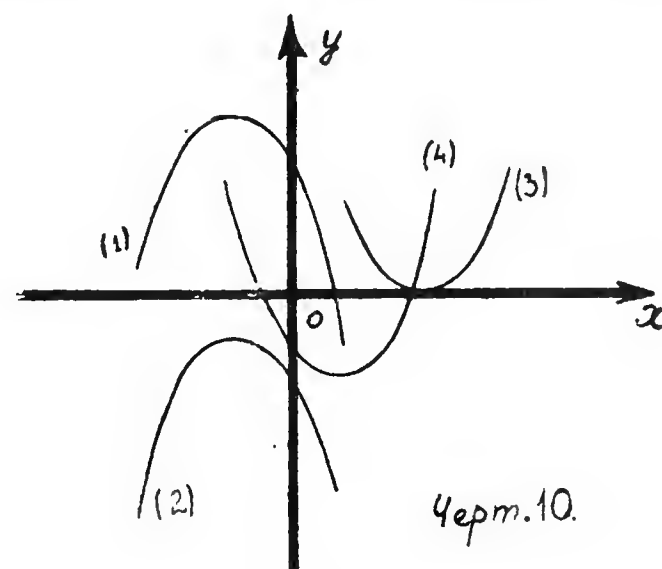
7. Сколько делителей имеет число $2^{10} \cdot 3^{15} \cdot 5^{20}$?

8. Найти все значения a , при которых уравнение $x^2+ax+1=0$ имеет два (вещественных) корня, причем один из них больше 3, а другой — меньше 3.

9. Пусть квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ имеет один из графиков, нарисованных на рис. 10.

Чертеж приблизительный, масштаб не указан. Что можно сказать о знаках a , b , c в случаях (1), (2), (3), (4)?

10. Два велосипедиста выехали в 8 ч одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . Доезжая до конца, каждый из них немедленно поворачивал назад. Их первая встреча произошла в 9 ч в 40 км от A , вторая — в 10 ч 12 мин в 22 км от A . На каком



расстоянии от A произошла их третья встреча, если считать, что каждый из них двигался с постоянной скоростью?

11. Найти все решения уравнения

$$x^2 - \sqrt{a-x} = a.$$

12. Известно, что $a+b+c > 0$, $a > 0$, $c > 0$. Может ли уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ иметь корни?

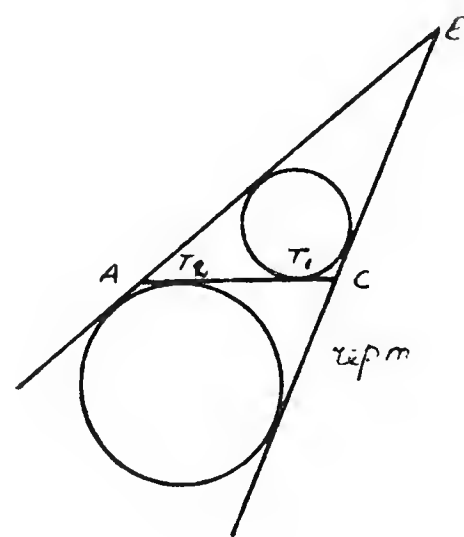
13. Найти все числа, на которые сократима дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ при целых значениях l .

14. Решить уравнения:

а) $x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$,

б) $x^4 - 2x^2 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

15. В треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны AC в точке T_1 , а внеписанная окружность касается стороны AC в точке T_2 (см. рис. 11). Доказать, что $AT_2 = T_1C$.



Черт. 11.

16. Пять последовательных сторон описанного около окружности шестиугольника равны a, b, c, d, e . Найти его шестую сторону.

17. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

а) Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами.

б) Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что справедливо утверждение:

в) Не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

18. На плоскости даны точки A, B, C . Где находятся все такие точки M , что из трех расстояний MA, MB, MC расстояние MB — не наибольшее и не наименьшее?

19. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

20. Существует ли треугольник, у которого:

а) все высоты меньше 1 см, а площадь больше 100 см²;

б) две высоты больше 100 см, а площадь меньше 1 см²?

21. Пусть три угла и две стороны одного треугольника равны трем углам и двум сторонам другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

22. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC , не меньше этих сторон (соответственно). Найти углы треугольника.

23. Автор учебника, читая условие одной из задач, заметил опечатку в предложении: «Отложите 9 см на левой стороне угла в 60° и 1 см на правой стороне угла. Чему равно расстояние между полученными таким образом точками?» Наборщик увеличил на 1 число сантиметров на месте поставленных нами точек. Конечно, наборщик и не подумал изменить ответ, напечатанный в конце учебника. Несмотря на это, опечатка не привела к ошибке. Какое число набрал наборщик в задаче?

24. Доказать, что сумма расстояний от любой точки O внутри равностороннего треугольника до его сторон равна высоте этого треугольника.

25. Сколько может быть различных автомобильных номеров из трех букв и четырех цифр?

26. Сколько существует различных 6-значных чисел, все цифры которых нечетны?

27. Рассматриваются всевозможные семизначные числа с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записанными в произвольном порядке. Доказать, что ни одно из этих чисел не делится ни на какое другое из них.

28. Улитка ползет из точки A , поворачивая на 90° через каждые 15 мин. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов (скорость улитки считается постоянной).

29. В углах шахматной доски 3×3 стоят 4 коня: в двух соседних углах — 2 белых коня, в двух других углах — 2 черных коня.

а) Можно ли за несколько ходов поменять местами черных и белых? (Кони ходят по обычным правилам.)

б) Кони пронумерованы по часовой стрелке: 1, 2, 3, 4. Можно ли за несколько ходов поменять местами 1 и 2 так, чтобы 3 и 4 оказались на прежних местах?

30. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найти углы этого треугольника.

31. Известно, что $49 = 7^2$. Вставим в середину числа 49 число 48. Получится число 4489. В середину этого числа опять вставим 48, получится 444889. Докажите, что если в число 49 вставить таким образом 1000 раз число 48, то полученное число будет квадратом целого числа. Получится ли квадрат, если мы вставим 48 еще несколько раз?

32. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении делится каждая из диагоналей точкой их пересечения?

33. Доказать, что в любом треугольнике произведение двух сторон равно произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр описанного круга.

34. Одна сторона треугольника равна полусумме двух других его сторон. Доказать, что биссектриса среднего по величине угла делит противоположную сторону на части, каждая из которых равна половине прилежащей стороны.

35. Диагонали четырехугольника, площадь которого равна 1, делятся точкой пересечения в отношении 2:3 и 4:5. Найти площади четырех треугольников, на которые диагонали разбивают четырехугольник.

36. Если медиана треугольника совпадает с его биссектрисой, то треугольник равнобедренный. Доказать.

37. Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники с равной площадью. Доказать, что этот четырехугольник — параллелограмм.

38. Рассечь данную трапецию прямой так, чтобы получилось два подобных четырехугольника. Обязательно ли прямая параллельна основаниям трапеции?

39. В треугольник вписана окружность. Одна из его сторон разделена точкой касания в отношении 2:3, другая — в отношении 4:5. В каком отношении разделена третья сторона?

40. Имеется 1000 образцов руды. Один из них радиоактивен. Имеется камера определения радиоактивности. Она работает так: если в нее загружено какое-то количество образцов (а можно загрузить хоть все 1000), то она покажет, есть ли среди них радиоактивный. Можно ли определить, какой образец радиоактивный, используя камеру а) 100, б) 10 раз?

41. Какую наименьшую сторону может иметь квадрат, если известно, что из него можно вырезать полукруг диаметра 1?

42. P и T — середины сторон AB и BC треугольника ABC . Доказать, что для любой точки M на стороне AC из условия $MP < PA$ следует, что $MT > TC$.

43. В бесконечную таблицу (см. рис.) вписаны числа, причем каждое равно

$$\frac{(n+k)^2 - 3n - k + 2}{3},$$

где n — номер строки, а k — номер столбца. Встретится ли в этой таблице число 1971?

$n \backslash k$	1	2	3	
1	1	3	6	
2	2	5		
3	4			
4	7			

зепт 12

44. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что тогда

$x^5 + \frac{1}{x^5}$ — тоже целое число и вообще $x^n + \frac{1}{x^n}$ — целое число при

любом целом n .

45. Три купчихи: Олимпиада, Сосипатра и Поликсена пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько Сосипатра и Поликсена вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько Олимпиада и Поликсена вместе. Их отчества: Титовна, Уваровна и Карповна. Определить, сколько каждая выпила чашек и у какой какое отчество, если известно, что Титовна выпила число чашек, кратное трем, а Карповна выпила 11 чашек.

Сдано в набор 31/XII 1970 г.	Подписано к печати 11/II 1971 г.
Л-115058	Физ. печ. л. 1,25
Заказ 89	Тираж 15 000 экз. Цена 3 коп.

Издательство Московского университета. Москва, К-9, улица Герцена, 5/7
Типография Изд-ва МГУ (ф.). Москва, проспект Маркса, 20

Цена 4 коп.



Заочная математическая школа

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВЫПУСК IX

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1972

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первом — третьем разделах мы публикуем условия и решения задач вступительных контрольных работ. Разумеется, придуманные вами решения могут отличаться от этих и при этом быть верными: ведь даже одно и то же решение можно записать по-разному — подробно или кратко, наглядно или формально. Мы постарались изложить решения возможно более наглядно, чтобы их поняли даже те, кто не смог решить эти задачи сам. Впрочем и тем, кто решил задачи, мы советуем разобраться в этих решениях, чтобы перенять, возможно, какие-то новые приемы и научиться четкости в записи решений. Это относится, в частности, к решению задачи 4. Во многих присланных решениях перебор проведен нечетко, предположения, выделяющие тот или иной случай, не выписываются, разбираются не все случаи. В задаче 9 немногим пришло в голову изобразить условие в виде таблицы. Вообще четкая и в то же время простая запись решения составляет для многих камень преткновения, и над этим следует поработать.

В четвертом разделе даются задачи из разных разделов математики для самостоятельной работы. Среди этих задач есть как легкие, так и трудные. Поэтому не старайтесь решать все задачи подряд. Если какая-нибудь задача Вас заинтересует, а решение ее не удастся, то отложите ее на время и возьмитесь за другие, а потом опять вернитесь к отложенной. Как правило, самые интересные и полезные задачи именно те, которые трудно решить сразу.

Контрольную работу составили Н. Васильев, В. Гутенмахер, Л. Евтушик, П. Кантор, Ж. Раббот, А. Тоом. Решения контрольных задач написаны А. Тоомом. Сборник подготовили к печати В. Гутенмахер и Ж. Раббот.

Методическая комиссия ЗМШ

І. ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ 1972 г.

Для учащихся 7-х классов

1. Какое наибольшее число суббот может быть в году?
2. В четырехугольнике $ABCD$ известны две стороны $AB=4$ и $CD=5$. Найдите периметр четырехугольника $KPHM$, где K — середина стороны BC , H — середина стороны AD , P — середина диагонали AC , M — середина диагонали BD .
3. Какие две цифры нужно проставить на место звездочек, чтобы пятизначное число $517**$ делилось на 6, на 7 и на 9?
4. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку написано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть, если вначале написано: а) 7 минусов; б) 8 минусов; в) k минусов?
5. Какое из чисел больше

$$\frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1} \text{ или } \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} ?$$

6. Решите уравнение $(x^2 - 1)^2 = 4x + 1$.
7. Картонный треугольник с углами 40° , 60° и 80° выкрасили с одной стороны черной краской, с другой — красной краской, положили на плоский лист бумаги черной стороной вверх и обвели карандашом. Требуется разрезать треугольник на несколько частей так, чтобы, перевернув эти части красной стороной вверх, можно было покрыть ими тот же треугольник, обведенный карандашом. Как это сделать?
8. Пять яблок, пять груш и один апельсин стоят 78 коп. Одно яблоко, пять груш и пять апельсинов — 1 р. 18 к. Сколько стоит одна груша? (все апельсины одинаковые, все груши и яблоки — тоже).
9. Один из трех братьев поставил на скатерть кляксу. «Кто испачкал скатерть?» — спросила бабушка. Они ответили так.
Алеша: 1) Витя не ставил кляксу; 2) Это сделал Боря.
Боря: 1) Алеша не пачкал скатерть; 2) Витя поставил кляксу.

Витя: 1) Боря не мог этого сделать; 2) Я сегодня не готовил уроки.

Двое из них оба раза сказали правду, а один — оба раза солгал. Кто поставил кляксу на скатерть?

10. Найдите угол A в треугольнике ABC , если известно, что он в три раза меньше угла BOC , где O — центр круга, вписанного в треугольник ABC .

11. Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.

12. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена высота, из другой — медиана, из третьей — биссектриса. При их пересечении внутри образуется новый треугольник. Докажите, что он не может оказаться правильным.

Для учащихся 8-х классов

1. На кольцевой дороге проводится эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете, если длина кольцевой дороги 330 км, а длина каждого этапа 75 км? (движение по дороге одностороннее).

2. В треугольнике центры вписанной и описанной окружностей симметричны относительно одной из сторон. Найдите углы треугольника.

3. Пусть числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + ax + bc = 0$, а числа x_2 и x_3 — корни уравнения $x^2 + bx + ac = 0$. Докажите, что x_1 и x_3 — корни уравнения $x^2 + cx + ab = 0$, если $ac \neq bc$.

4. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге в цепочку написано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер, и как ему надо для этого играть, если вначале написано: а) 7 минусов; б) 8 минусов, в) k минусов?

5. В треугольнике ABC проводятся биссектриса AK и медиана AM . Чему может равняться отношение сторон AB и AC , если известно, что один из отрезков BM , MK , KC равен полусумме двух других?

6. В каком году родился Матвей, если в 1972 году ему исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения?

7. Существует ли хотя бы одно число a такое, что оба числа

$$a + \sqrt{15} \text{ и } a - \frac{1}{\sqrt{15}} \text{ целые?}$$

8. AC и BD — две взаимно перпендикулярные хорды круга. Перпендикуляр, опущенный на прямую CD из точки A , пересе-

кает прямую BD в точке M , а перпендикуляр, опущенный на прямую CD из точки B , пересекает прямую AC в точке K . Докажите, что $ABKM$ — ромб.

9. Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал: «Это или Витя, или Толя». Витя сказал: «Это сделал не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба говорите неправду». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой — нет». Юра сказал: «Нет, Дима ты неправ». Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил окно?

10. Среди всех треугольников, у которых сумма медиан равна 3 см, найти треугольник с самой большой суммой высот.

11. Придумайте четыре тройки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от 1 до 81 можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой тройки.

12. Дан равносторонний треугольник ABC . Про точку M известно, что $\angle AMC = 30^\circ$, $\angle BMA = 40^\circ$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABM > 90^\circ$.

II. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЛЯ СЕМИКЛАССНИКОВ

1. Из каждых семи последовательных дней всегда ровно один — суббота. В частности, во всяком году:

из дней с 1 по 7 января ровно один — суббота,

из дней с 8 по 14 января ровно один — суббота и т. д.

Разобьем дни в году на семерки.

Поскольку $365 = 52 \cdot 7 + 1$, $366 = 52 \cdot 7 + 2$, то получатся 52 семерки и еще остаток в 1 или 2 дня. В каждой семерке ровно одна суб-

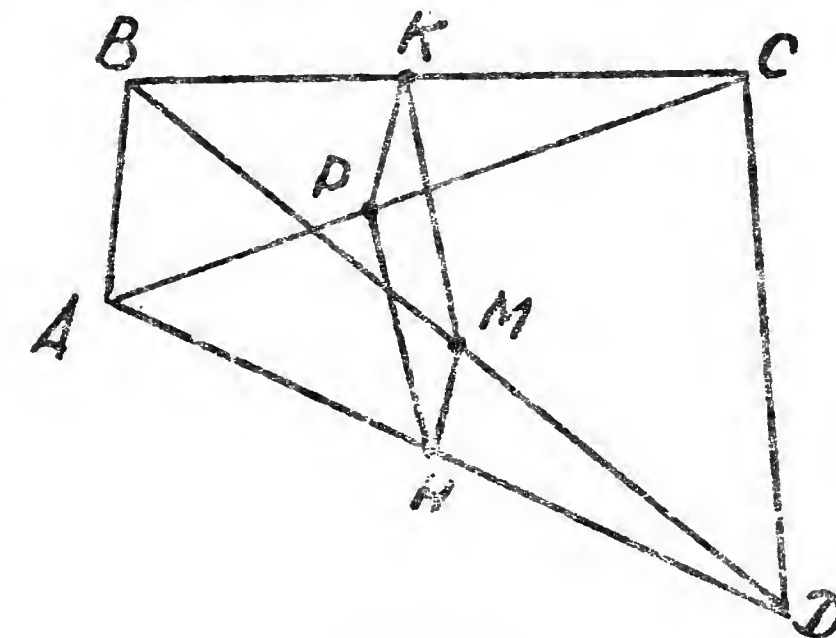


Рис. 1

бота, в остатке — одна или ни одной. Всего получается не более 53 суббот. Их будет столько в високосном году, если 1 или 2 января — суббота, а в невисокосном — если 1 января — суббота. Таков, например, 1972 год. Ответ: 53.

2. Очевидно, PN — средняя линия треугольника ACD (см. рис. 1). Поэтому

$$PH = \frac{1}{2} CD = \frac{5}{2}.$$

Аналогично этому,

$$KM = \frac{1}{2} CD = \frac{5}{2}, KP = \frac{1}{2} AB = 2, MH = \frac{1}{2} AB = 2.$$

Периметр $KPHM$ равен

$$KP + PH + HM + MK = 2 + \frac{5}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 9.$$

3. Число 126 — наименьшее из чисел, которые делятся на 6, на 7 и на 9 (это их наименьшее общее кратное). Поэтому, если какое-то число делится на 126, то оно делится и на 6, и на 7, и на 9.

Заменяя звездочки цифрами, мы получим число, не большее 51799. Разделим его на 126 с остатком:

$$\begin{array}{r} 51799 \overline{) 126} \\ \underline{504} \\ 139 \\ \underline{126} \\ 139 \\ \underline{126} \\ 13 \end{array}$$

Вычтя из 51799 остаток 13, получим число, делящееся на 126. Значит, нужно заменить звездочки на 86.

4. Выигрывает начинающий. Опишем, как он может играть, чтобы наверняка выиграть. Первый ход надо сделать в середине,

$$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & + & + & - & - \\ & & & K=8 & & & \\ - & - & - & + & - & - & - \\ & & & K=7 & & & \end{array}$$

Рис. 2

чтобы оставшиеся минусы образовали два отдельных «куска» равной длины (на рис. 2 изображена позиция после первого хода для $k=7$ и $k=8$).

После этого надо переправлять минусы, симметричные тем, которые переправлял второй. Так, если второй переправил n -й

(или n -й и $n+1$ -й) минус справа, то надо переправить n -й (или n -й и $(n+1)$ -й) минус слева. Тогда после каждого хода первого будет получаться симметричная позиция. Второй будет вынужден каждым ходом нарушать симметрию и не сможет получить после своего хода позицию «все плюсы», так как она симметрична.

5. Вычтем из первого числа второе:

$$\begin{aligned} & \frac{13^{15} + 1}{13^{16} + 1} - \frac{13^{16} + 1}{13^{17} + 1} = \\ & \frac{(13^{32} + 13^{17} + 13^{15} + 1) - (13^{32} + 2 \cdot 13^{16} + 1)}{(13^{16} + 1)(13^{17} + 1)} = \\ & = \frac{13^{17} - 2 \cdot 13^{16} + 13^{15}}{(13^{16} + 1)(13^{17} + 1)} = \\ & = \frac{13^{15}(13^2 - 2 \cdot 13 + 1)}{(13^{16} + 1)(13^{17} + 1)} = \\ & = \frac{13^{15}(13 - 1)^2}{(13^{16} + 1)(13^{17} + 1)}. \end{aligned}$$

Разность оказалась положительной. Значит, первое число больше второго.

6. Есть много способов решения. Разберем один из них. Раскроем скобки: $x^4 - 2x^2 + 1 = 4x + 1$ и прибавим к обеим частям равенства $4x^2$:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 4x + 1.$$

Справа и слева получились квадраты сумм:

$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 1)^2,$$

то есть

$$(x^2 + 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0,$$

откуда

$$[(x^2 + 1) - (2x + 1)] \cdot [(x^2 + 1) + (2x + 1)] = 0,$$

поэтому

$$(x^2 - 2x)(x^2 + 2x + 2) = 0;$$

окончательно

$$x(x - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0.$$

Какой-то из сомножителей должен равняться нулю. Приравнявая первые два нулю, получаем

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Пусть теперь

$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Тогда

$$(x+1)^2 + 1 = 0,$$

откуда

$$(x+1)^2 = -1.$$

Это невозможно: квадрат числа не бывает отрицательным. Значит, других корней нет. Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

7. Достаточно разрезать наш треугольник на равнобедренные треугольники. Тогда можно будет перевернуть каждый из них и положить на прежнее место, т. е. задача будет решена.

На рис. 3 данный треугольник разбит на два равнобедренных. В нем $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$. Из вершины B проведен отрезок BD к стороне AC такой, что $\angle ABD = 40^\circ$. Легко сосчитать, что $\angle ABD = \angle BAD$, $\angle BDC = 80^\circ = \angle BCD$. Значит, $AD = BD$, $BD = BC$, что и требовалось.

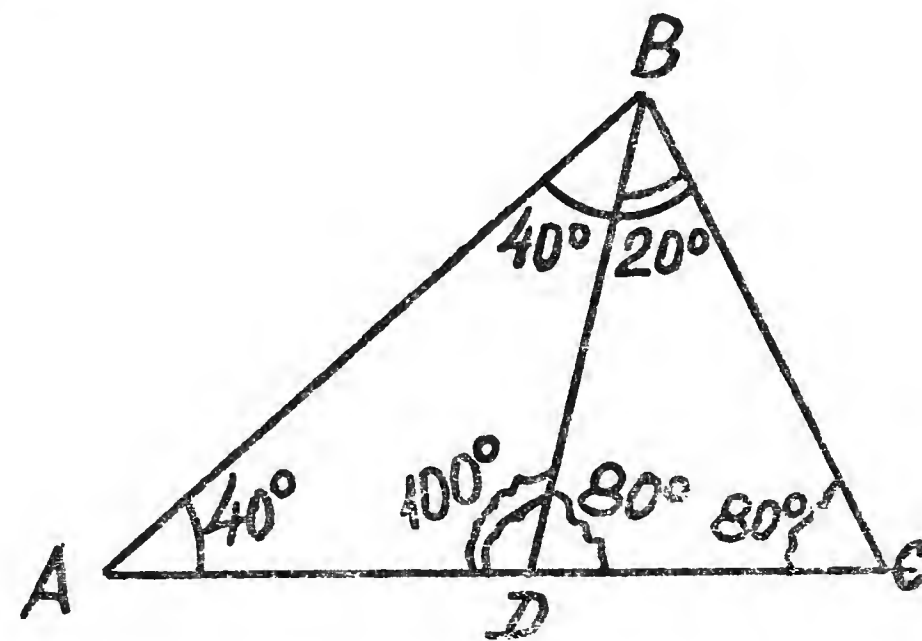


Рис. 3

8. Пусть одно яблоко стоит x коп., одна груша стоит y коп., один апельсин стоит z коп. По условию

$$5x + 5y + z = 78,$$

$$x + 5y + 5z = 118.$$

Вычтя из второго равенства первое, получим

$$4z - 4x = 40,$$

откуда $z = x + 10$. Подставим $z = x + 10$ в первое равенство:

$$6x + 5y = 68,$$

$$y = \frac{68 - 6x}{5}.$$

Очевидно, x, y — целые положительные. Начнем перебирать все целые значения x , начиная с единицы. Для каждого вычислим y . При значениях x от 1 до 11 только два раза получается целое значение y :

если $x = 3$, то $y = 10$,

если $x = 8$, то $y = 4$,

если $x > 11$, то y получается отрицательным.

Ответ: 10 коп. или 4 коп.

9. Мы знаем, что двое из братьев говорили только правду. Это не могут быть Алеша и Боря, так как они противоречат друг другу: Боря говорит, что Витя поставил кляксу, а Алеша это отрицает. По той же причине это не могут быть Алеша и Витя. Значит, это Боря и Витя, а солгал оба раза Алеша. Значит, поставил кляксу Витя, как сказал Боря.

10. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$ (рис. 4). Тогда $\angle A = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Как известно, BO и CO — биссектрисы углов B и C .

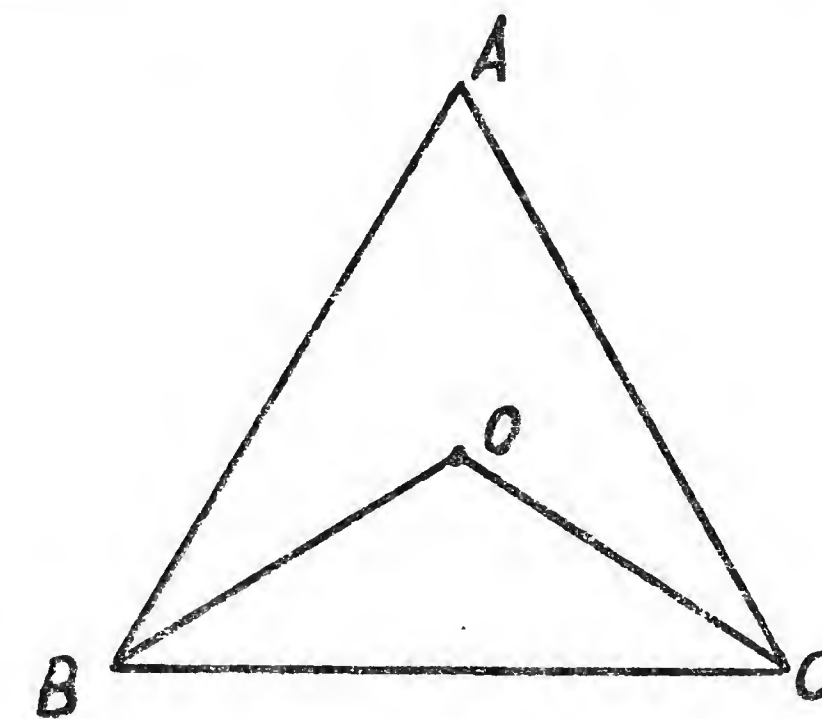


Рис. 4

Поэтому

$$\angle OBC = \frac{\beta}{2}, \quad \angle OCB = \frac{\gamma}{2}.$$

Тогда

$$\angle BOC = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right).$$

По условию

$$3[180^\circ - (\beta + \gamma)] = 180^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right),$$

откуда

$$3 \cdot 180^\circ - 3(\beta + \gamma) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

поэтому

$$\frac{5}{2}(\beta + \gamma) = 360^\circ,$$

то есть

$$\beta + \gamma = 144^\circ,$$

тогда

$$\Rightarrow A = 36^\circ.$$

11. Годаются такие четыре тройки:

1, 2, 3
0, 3, 6
0, 9, 18
0, 27, 54

Объясним, почему это так. Числа первой тройки идут подряд: каждое следующее на 1 больше предыдущего. Числа второй тройки подобраны так, что если прибавлять их к числам первой тройки, то три полученные тройки чисел составят 9 последовательных чисел:

$$(1+0, 2+0, 3+0), (1+3, 2+3, 3+3), (1+6, 2+6, 3+6),$$

то есть (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9).

Числа третьей тройки подобраны так, что если прибавлять их к этим девяти последовательным числам, то получатся 27 последовательных чисел:

$$(1+0, 2+0, \dots, 9+0), (1+9, 2+9, \dots, 9+9), (1+18, 2+18, \dots, 9+18),$$

то есть 1, 2, ..., 27.

Числа четвертой тройки подобраны так, что если прибавлять их к этим 27 последовательным числам, то полученные три группы составят 81 последовательное число:

$$(1+0, 2+0, \dots, 27+0), (1+27, 2+27, \dots, 27+27), (1+54, 2+54, \dots, 27+54),$$

то есть 1, 2, ..., 81.

Лучше всего Вы поймете решение, если сумеете так подобрать числа пятой тройки, что если прибавлять их к этим 81 последовательным числам, то полученные три группы по 81 числу составят 243 последовательных числа.

12. Допустим, что этот треугольник оказался правильным. Пусть в треугольнике ABC (рис. 5) AH — высота, BM — медиана, CK — биссектриса, P — точка пересечения AH и CK . Медиана BM может пройти как слева, так и справа от P , что отражено на чертеже. Наше решение от этого не зависит. Во всяком случае $\angle HPC = 60^\circ$.

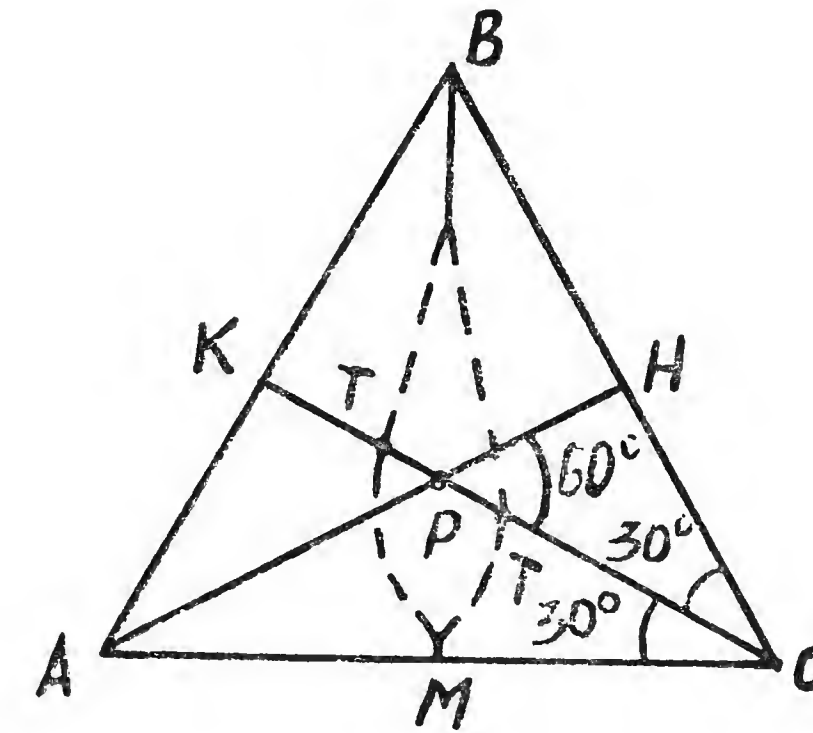


Рис. 5

Поскольку $AH \perp BC$, то $\angle HCP = 30^\circ$. Поскольку CK — биссектриса, то $\angle ACK = 30^\circ$. Обозначим через T точку пересечения BM и CK . В любом случае $\angle MTC = 60^\circ$. Тогда в треугольнике MTC мы знаем два угла и можем вычислить третий: $\angle BMC = 90^\circ$. Значит, медиана BM — высота. Тогда $\triangle ABM = \triangle CBM$ и $\angle BAC = \angle BCA = 2 \angle PCH = 60^\circ$.

Значит, $\triangle ABC$ — равносторонний. Тогда AH , BM , CK — и медианы, и высоты, и биссектрисы, проходят через одну точку и не образуют треугольника. Получено противоречие. Значит, предположение, что образовался правильный треугольник, неверно.

III. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ДЛЯ ВОСЬМИКЛАССНИКОВ

1. Пусть в эстафете b этапов. Тогда общая длина эстафеты $75b$ км (такое расстояние «проходит» эстафетная палочка, которую передают мотоциклисты).

По условию задачи это расстояние составляет целое число кругов. Значит, $75b$ делится на 330. Итак, общая длина эстафеты делится на 75 и на 330. Наименьшее натуральное число, обладающее этими свойствами, называется наименьшим общим кратным чисел 75 и 330. Найдём его.

Разложим 75 и 330 на простые множители:

$$75 = 3 \cdot 5^2, \quad 330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Наименьшее общее кратное равно $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$. Тогда число b равно

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11}{3 \cdot 5^2} = 2 \cdot 11 = 22.$$

Ответ: 22 этапа.

2. Обозначим концы той стороны, относительно которой симметричны центры, через A и C , а третью вершину — через B (см. рис. 6). Пусть O и P — центры соответственно вписанной и

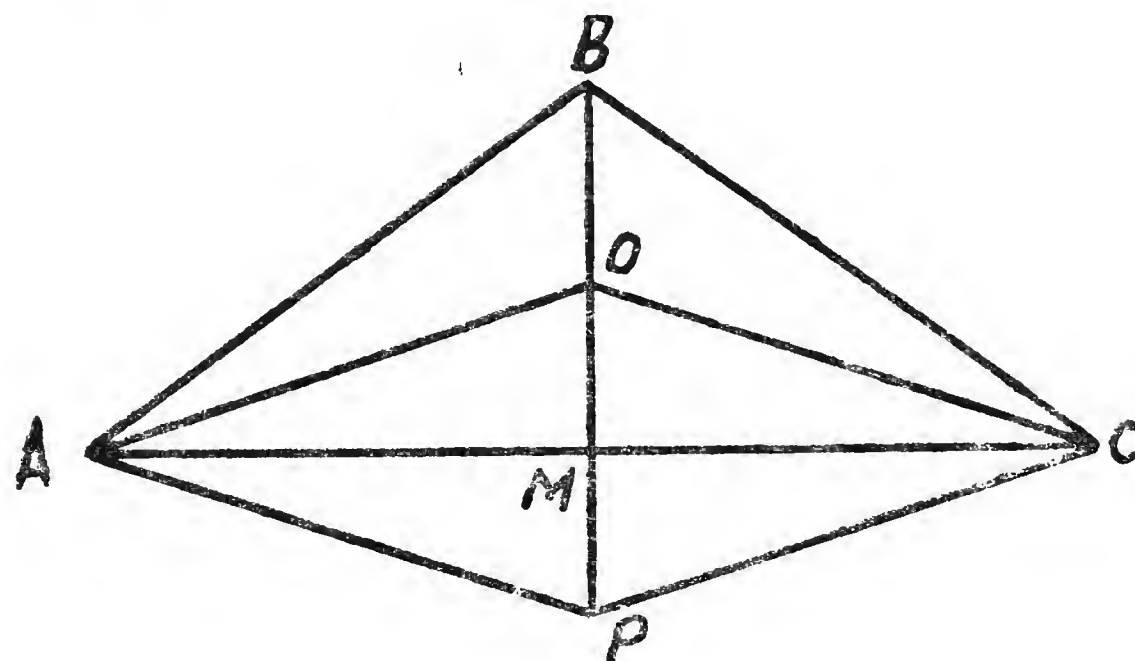


Рис. 6

описанной окружностей. Если опустить из них перпендикуляры на AC , то они упадут в одну точку M и будет $OM=PM$ (это и означает, что O и P симметричны относительно AC). Нам надо найти углы треугольника: $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$.

Докажем сначала, что $\alpha = \gamma$. Действительно: $AP = PC$ (как радиусы), поэтому $AM = MC$, откуда $\triangle AMO = \triangle CMO$, следовательно $\angle OAM = \angle OCM$. Но $\angle OAM = \frac{\alpha}{2}$, $\angle OCM = \frac{\gamma}{2}$ (центр ок-

ружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения его биссектрис), поэтому $\alpha = \gamma$.

Отсюда следует, что $AB = BC$, тогда медиана BM одновременно и высота, значит, O лежит на BM .

Поэтому точки B , O , M и P лежат на одной прямой, а так как $BP = AP$ (как радиусы), то $\angle BAP = \angle ABP = \frac{\beta}{2}$.

С другой стороны, $\triangle AOM = \triangle APM$. Поэтому

$$\angle MAP = \angle MAO = \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$\angle BAP = \angle BAM + \angle MAP = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}.$$

Итак,

$$\frac{\beta}{2} = \frac{3\alpha}{2},$$

$$\beta = 3\alpha.$$

Тогда сумма углов треугольника ABC равна 5α , откуда $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 108^\circ$.

Ответ: $36^\circ, 108^\circ, 36^\circ$.

3. I способ. Вычтем из равенства $x_2^2 + ax_2 + bc = 0$ равенство $x_2^2 + bx_2 + ac = 0$. Получим:

$$(a-b)x_2 = (a-b)c,$$

откуда $x_2 = c$ (поскольку $a-b \neq 0$). Теперь эти же равенства показывают, что

$$c^2 + ac + bc = 0,$$

откуда

$$a + b + c = 0 \text{ (поскольку } c \neq 0 \text{)}.$$

Подставим $(-b-c)$ вместо a в первое уравнение

$$x^2 - (b+c)x + bc = 0$$

и разложим результат на множители

$$(x-b)(x-c) = 0.$$

Поскольку $x_2 = c$, то $x_1 = b$.

Аналогично этому, подставим $(-a-c)$ вместо b во второе уравнение

$$x^2 - (a+c)x + ac = 0$$

и разложим его

$$(x-a)(x-c) = 0.$$

Откуда

$$x_3 = a, \text{ так как } x_2 = c.$$

Числа $x_1 = b$ и $x_3 = a$ являются корнями третьего уравнения. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в третье уравнение $(-a-b)$ вместо c :

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

II способ. По теореме Виета, из условия следует:

$$(1) \quad \begin{cases} a = -(x_1 + x_2); \\ b = -(x_2 + x_3); \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} bc = x_1 \cdot x_2 \\ ac = x_2 \cdot x_3 \end{cases}$$

Подставим a, b из (1) в (2):

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 + c(x_2 + x_3) = 0 \\ x_2 \cdot x_3 + c(x_1 + x_2) = 0 \end{cases}$$

Вычтем из первого из равенств (3) второе и разложим на множители:

$$(x_2 - c)(x_1 - x_3) = 0,$$

откуда следует, что либо $x_2 = c$; либо $x_1 = x_3$. Если $x_1 = x_3$, то $a = b$ (см. (1)), что исключено условием. Значит, $x_2 = c \neq 0$ (4). Подставим x_2 вместо c в (3) и сократим на него:

$$(5) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Чтобы доказать, что x_1, x_3 — корни третьего уравнения, достаточно доказать, что

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -c, \\ x_1 \cdot x_3 = ab. \end{cases}$$

Первое из этих равенств следует из (5), если учесть (4), второе получается, если перемножить равенства (2) и сократить результат на $x_2^2 = c^2 \neq 0$.

4. См. решение задачи № 4 для 7 класса.

5. Пусть $BM = MC = a$, $KM = m$. Очевидно, $a > m > 0$. Как известно,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{KB}{KC}.$$

Рассмотрим два случая.

I. Точка K ближе к B , чем точка M (см. рис. 7). Тогда $BM = a$, $MK = m$, $KC = a + m$, $KB = a - m$. Внутри этого случая нам придется рассмотреть три случая.

$$a) \quad BM = \frac{MK + KC}{2},$$

тогда

$$a = \frac{m + (a + m)}{2},$$

откуда

$$a = 2m.$$

Следовательно,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{KB}{KC} = \frac{a - m}{a + m} = \frac{2m - m}{2m + m} = \frac{1}{3}.$$

$$б) \quad MK = \frac{BM + KC}{2},$$

тогда

$$m = \frac{a + (a + m)}{2},$$

откуда

$$m = 2a,$$

что, очевидно, невозможно.

$$в) \quad KC = \frac{BM + MK}{2},$$

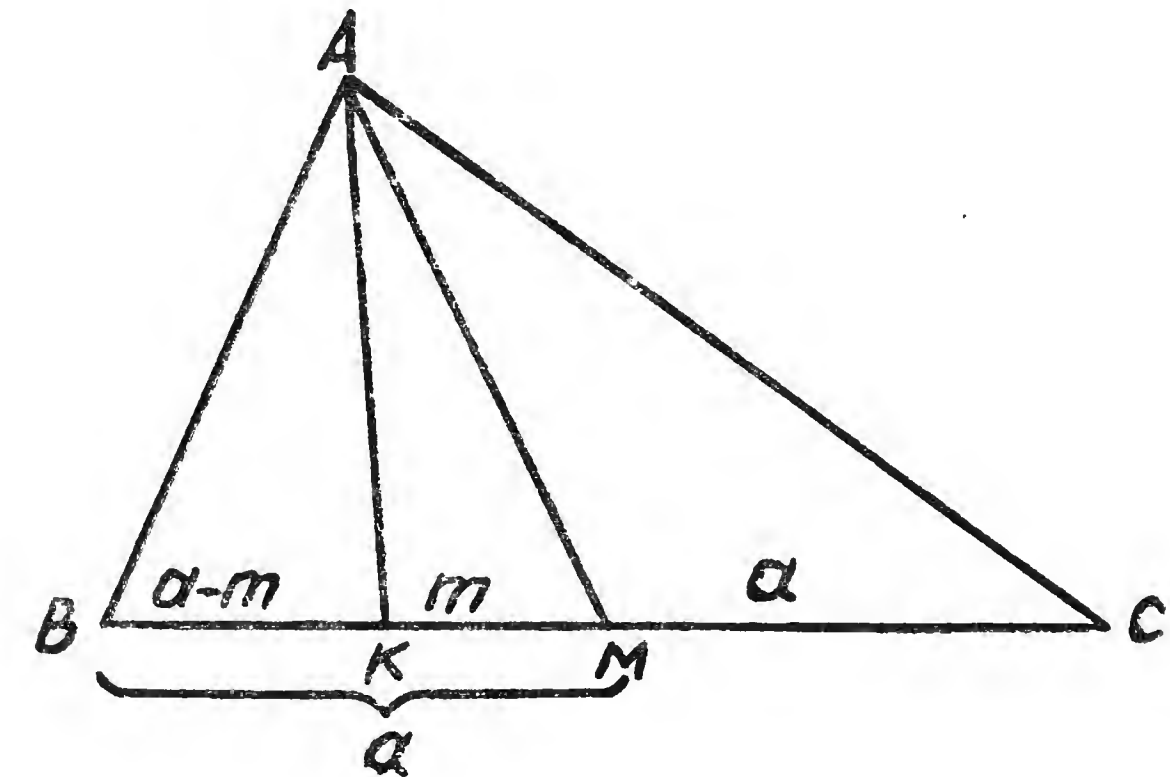


Рис. 7

тогда

$$a + m = \frac{a + m}{2},$$

т. е.

$$a + m = 0.$$

Так быть не может.

II. Пусть теперь точка M ближе к B , чем точка K (рис. 8). Тогда $BM=a$, $MK=m$, $KC=a-m$, $KB=a+m$. Снова рассмотрим три случая.

$$a) \quad BM = \frac{MK + KC}{2},$$

тогда

$$a = \frac{m + (a - m)}{2},$$

откуда

$$a = 0.$$

Так быть не может.

$$б) \quad MK = \frac{BM + KC}{2},$$

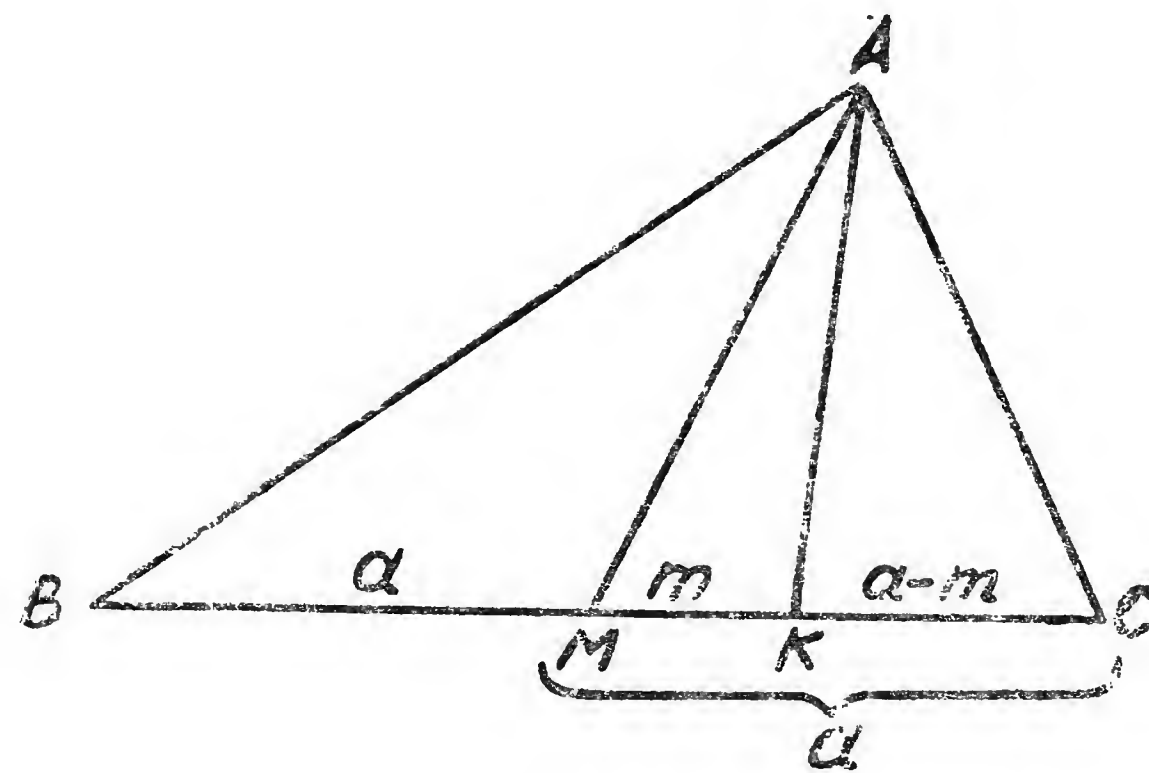


Рис. 8

тогда

$$m = \frac{a + (a - m)}{2},$$

т. е.

$$a = \frac{3}{2}m.$$

В этом случае

$$\frac{AB}{AC} = \frac{KB}{KC} = \frac{a + m}{a - m} = \frac{\frac{3}{2}m + m}{\frac{3}{2}m - m} = 5.$$

$$в) \quad KC = \frac{BM + MK}{2},$$

тогда

$$a - m = \frac{a + m}{2},$$

откуда

$$a = 3m.$$

Поэтому

$$\frac{AB}{AC} = \frac{KB}{KC} = \frac{a + m}{a - m} = \frac{3m + m}{3m - m} = 2.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; 5; 2.

6. Многие, решая эту задачу, явно или неявно предполагали, что Матвей родился не слишком давно: скажем, не раньше XIX века. Мы считали такие решения верными. Однако формулировка задачи по математике — только словесная оболочка какого-то чисто математического условия, и если ограничение не указано явно в условии, то лучше не пользоваться им.

Мы решим задачу лишь в предположении, что Матвей родился в году N , где N — целое положительное. Очевидно, $N \leq 1972$. Тогда сумма цифр числа N не более $4 \cdot 9 = 36$, поэтому $N \geq 1972 - 36 = 1936$. Значит, N можно записать в виде

$$N = \overline{19xy} = 1900 + 10x + y$$

(x, y — цифры десятков и единиц, черта вверху означает, что это не $19 \cdot x \cdot y$). По условию,

$$1900 + 10x + y + 1 + 9 + x + y = 1972,$$

откуда

$$11x + 2y = 62,$$

$$y = 31 - \frac{11 \cdot x}{2}.$$

Очевидно, x четно, $x \geq 3$ (так как $N \geq 1936$), $x < 6$ (при $x \geq 6$ получается отрицательный y). Такое число только одно: 4. Тогда $y = 9$.

Ответ: 1949.

7. Пусть

$$a + \sqrt{15} = m, \quad \frac{1}{a} - \sqrt{15} = n.$$

Выразим a из первого равенства и подставим во второе:

$$\frac{1}{m - \sqrt{15}} - \sqrt{15} = n.$$

Преобразуем:

$$16 - mn = (m - n) \sqrt{15}.$$

Для выполнения этого равенства достаточно, чтобы было:

$$\begin{cases} 16 - mn = 0, \\ m - n = 0. \end{cases}$$

(В действительности это и необходимо, раз m, n — целые, но это можно и не знать: ведь нам достаточно найти хоть одно значение a .)

Полученная система легко решается:

$$m_1 = n_1 = 4 \quad m_2 = n_2 = -4.$$

Ответ: такое a существует: например, $4 - \sqrt{15}$. (В действительности таких чисел всего два, но это указывать необязательно.)

8. Расположение точек, показанное на рис. 9 — не единственно возможное, но наше решение от него не зависит.

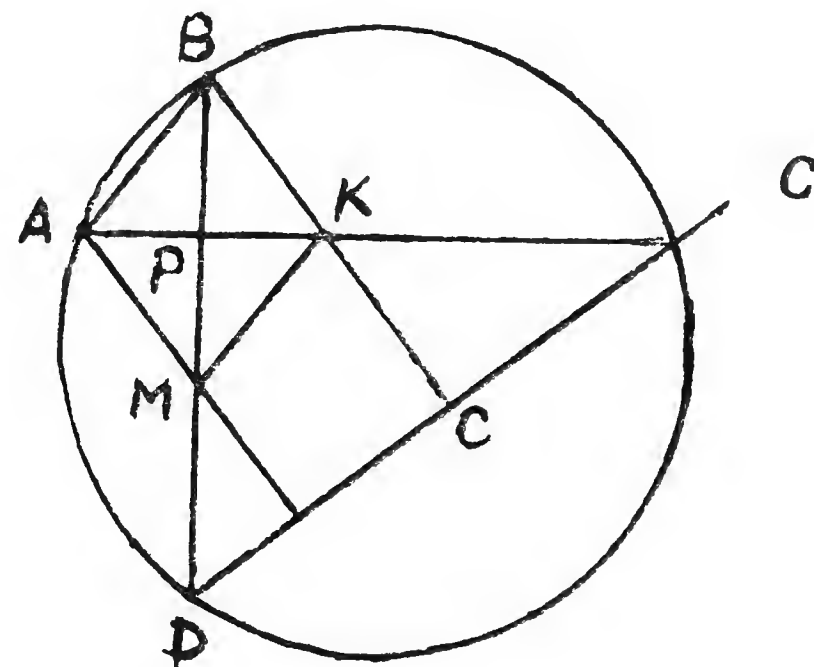


Рис. 9

Очевидно, $BK \parallel AM$. Чтобы задача была решена, достаточно еще доказать следующие равенства:

$$BK = AB \quad \text{и} \quad AM = AB.$$

Они следуют из равенств:

$$\angle ABP = \angle KBP \quad \text{и} \quad \angle MAP = \angle BAP.$$

Докажем первое.

Поскольку $\angle P = 90^\circ$, то сумма дуг AD и BC равна 180° *, а так как углы ABD и BDC измеряются их половинами, то

* Мы пользуемся здесь теоремой о том, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключенных между сторонами угла и сторонами вертикального с ним. Этот факт легко доказать. Сделайте это сами (см. такие задачи в учебнике Никитина «Гесметрия»).

$$\angle ABD + \angle BDC = 90^\circ.$$

Но $BK \perp DC$, поэтому $\angle KBD + \angle BDC = 90^\circ$, откуда

$$\angle ABD = \angle KBD,$$

что и требовалось. Второе равенство доказывается аналогично.

9. Составим таблицу из 5 строк и 5 столбцов, чтобы наглядно изобразить условие задачи (рис. 10). Заявлению каждого брата в ней будет соответствовать столбец под первой буквой его имени. В этом столбце расставим плюсы и минусы по следующему правилу: плюс, если высказывание допускает, что брат, по имени которого названа строка, разбил окно, и минус, если высказывание этого не допускает.

	А	В	Т	Д	Ю
А	-	+	-	+	-
В	+	-	-	+	-
Т	+	+	-	-	+
Д	-	+	-	+	-
Ю	-	-	+	-	+

Рис. 10

Поскольку Андрей объявляет виновником Витю или Толю, то в первом столбце плюсы стоят только против букв В, Т. В столбце под буквой В минусы стоят только против букв В, Ю.

Чтобы понять, что сказал Толя, включим в его высказывание заявления Андрея и Вити:

«Неправда то, что это или Витя, или Толя, и неправда то, что это не Витя и не Юра».

Иначе это можно сказать так:

«Это не Витя и не Толя, и это либо Витя, либо Юра».

Заявление Толи свелось к такому:

«Это Юра»,

что и отражено в третьем столбце.

Что сказал Дима? Дима окажется прав только тогда, когда ровно один из первых двух братьев — Андрея и Вити — окажется прав. Значит в столбце Димы плюс стоит только в тех строках, у которых в первых двух столбцах стоит один минус и один плюс. Смотря на первые два столбца, заполняем столбец Димы: против одинаковых знаков ставим минус, против разных ставим плюс.

Юра просто отрицает то, что сказал Дима: где в столбце Димы плюс, там у него минус и наоборот. Таблица заполнена.

Кто-то из братьев разбил окно. Строка, названная по его имени, показывает, кто сказал правду, а кто — нет. Мы знаем, что не менее трех братьев сказали правду. Значит, надо искать строку, в которой не менее трех плюсов. Такая строка только одна — третья. Значит, окно разбил Толя.

Можно было решать задачу, не составляя таблицы: перебрать пять случаев: что разбил окно Андрей, Витя и т. д., и в каждом выяснить, сколько братьев сказали правду. Однако приведенный способ полезен тем, что он учит решать подобные задачи и тогда, когда перебор становится слишком громоздким.

10. Пусть h_a , m_a — высота и медиана, проведенные к стороне a треугольника. Очевидно $h_a \leq m_a$, причем равенство достигается только тогда, когда они совпадают, а это бывает, лишь когда треугольник с основанием a равнобедренный.

Поэтому сумма высот меньше или равна сумме медиан, причем равна только если треугольник равносторонний. Итак, ответом является только равносторонний треугольник с высотой 1 см.

11. Годаются такие четыре тройки:

1, 2, 3
0, 3, 6
0, 9, 18
0, 27, 54

Объясним, как они придуманы. Легче решать эту задачу в более общем виде: придумать k троек целых неотрицательных чисел таких, чтобы каждое число от 1 до 3^k можно было представить в виде суммы k чисел — по одному из каждой тройки.

При $k=1$ решение очевидно: одна тройка 1, 2, 3. Пусть задача для k троек решена. Как прибавить еще одну тройку, чтобы получить решение задачи для $k+1$?

Первое число надо взять равным нулю. Тогда, прибавляя его ко всем суммам k чисел, взятых по одному из первых k троек, получим те же числа от 1 до 3^k .

Второе число возьмем равным 3^k . Прибавляя его к числам от 1 до 3^k , получим все числа от 3^k+1 до $2 \cdot 3^k$.

Третье число возьмем равным $2 \cdot 3^k$. Прибавляя его к тем же числам, получим все числа от $2 \cdot 3^k+1$ до $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$.

Итак, задача решена и для $k+1$. Так построены четыре наши тройки. Доказано, что они годятся при каждом k , в том числе и при $k=4$.

12. Пусть дан отрезок KN и задан угол α (рис. 11). Множество точек M , таких, что $\angle KMN = \alpha$, представляет собой два равных сегмента, ограниченных точками K , N . Их центры O_1 , O_2 служат вершинами равнобедренных треугольников KO_1N , KO_2N , причем $\angle KO_1N = \angle KO_2N = 2\alpha$. (Под сегментом здесь и ниже мы понимаем дугу, его ограничивающую).

Мы видим, что M должна лежать: во-первых, на одном из двух сегментов (1), (2), проведенных (рис. 12) сплошными линиями, во-вторых, на одном из двух сегментов (3), (4), проведенных пунктиром.

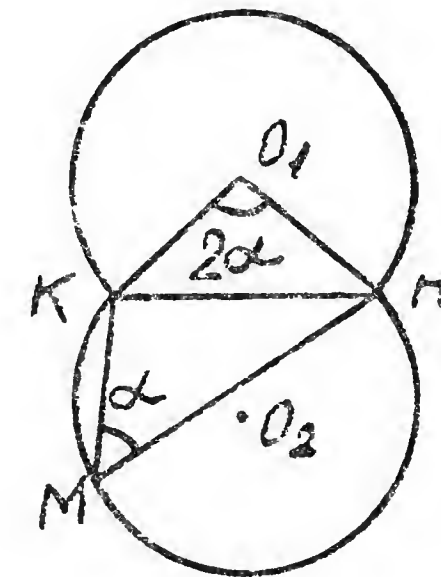


Рис. 11

Сегмент (1) пересекает (3) в точках A , M_1 .
Сегмент (2) пересекает (3) в точках A , M_2 .
Сегмент (2) пересекает (4) в точках A , M_3 .

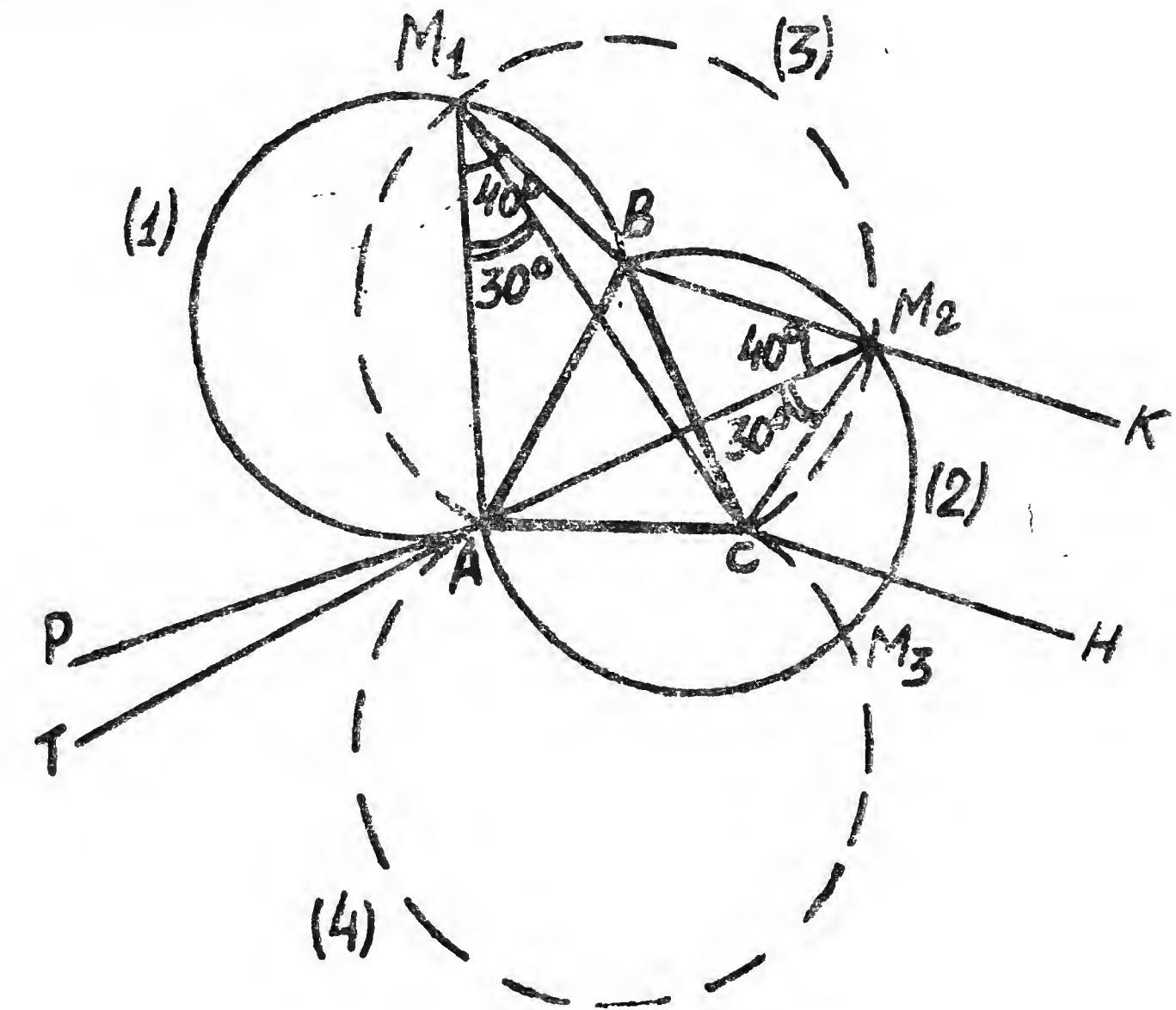


Рис. 12

Докажем, что сегмент (1) не имеет с (4) другой общей точки, кроме A . Проведем PA — касательную к (1) в точке A и TA — касательную к (4) в точке A .

По известным теоремам,

$$\angle PAB = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ;$$

$$\angle TAC = 130^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Сумма углов $\angle PAB + \angle BAC + \angle CAT = 350^\circ$ — меньше развернутого. Поэтому части плоскости, ограниченные углами PAB и TAC , не имеют общих точек, кроме A , а тем самым и сегменты (1) и (4), лежащие в этих частях.

Докажем, что $\angle ABM_3 < 90^\circ$.

Проведем CH — касательную к (4) в точке C .

$$\angle ACH = 150^\circ$$

Проведем $BK \parallel CH$. Легко сосчитать, что $\angle ABK = 90^\circ$. Очевидно, что точка M_3 лежит внутри угла ABK . Поэтому $\angle ABM_3 < 90^\circ$, и M_3 не удовлетворяет условию. Вычислим углы M_1BA и M_2BA . Заметим, что B — центр сегмента (3), так как $AB = BC$, $\angle ABC = 60^\circ$. Поэтому $M_1B = M_2B = AB$. Тогда

$$\angle M_1AB = \angle AM_1B = 40^\circ,$$

$$\angle M_2AB = \angle AM_2B = 40^\circ,$$

$$\angle M_1BA = \angle M_2BA = 100^\circ > 90^\circ.$$

Значит, M_1, M_2 удовлетворяют условию, а ответами будут углы M_1BC и M_2BC .

Они равны:

$$\angle M_2BC = \angle M_2BA - \angle CBA = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ;$$

$$\angle M_1BC = \angle M_1BA + \angle ABC = 100^\circ + 60^\circ = 160^\circ.$$

IV. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В каждом месяце может быть либо 4 субботы, либо 5 суббот. Сколько, самое большое, может быть месяцев в году с пятью субботами?

2. В четырехугольнике $ABCD$ обозначены середины K, L, M, N его сторон AB, BC, CD, DA . Докажите, что четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм и выясните, в каких случаях он будет квадратом.

3. Поставьте цифры вместо звездочек так, чтобы четырехзначное число 56^{**} делилось и на 6, и на 8, и на 15.

4. Двое играют в такую игру. Перед ними на бумаге по кругу нарисовано несколько минусов. Каждый по очереди переправляет один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто пере-

правит последний минус. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер и как ему надо для этого играть?

5. Какое из чисел больше:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}} \text{ или } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}?$$

6. а) Как разрезать треугольник с углами $15^\circ, 105^\circ, 60^\circ$ на равнобедренные треугольники?

б) Всякий ли треугольник можно разрезать на равнобедренные треугольники?

7. Найдите угол A в треугольнике ABC , если известно, что он в три раза меньше угла BOC , где O — точка пересечения высот.

8. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC , не меньше этих сторон (соответственно). Найдите углы треугольника.

9. В треугольнике точка пересечения медиан и центр описанной окружности симметричны относительно одной из сторон. Найдите медианы треугольника, если радиус описанной окружности равен 6 см.

10. Пусть квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ имеет один из графиков, нарисованных на рис. 13.

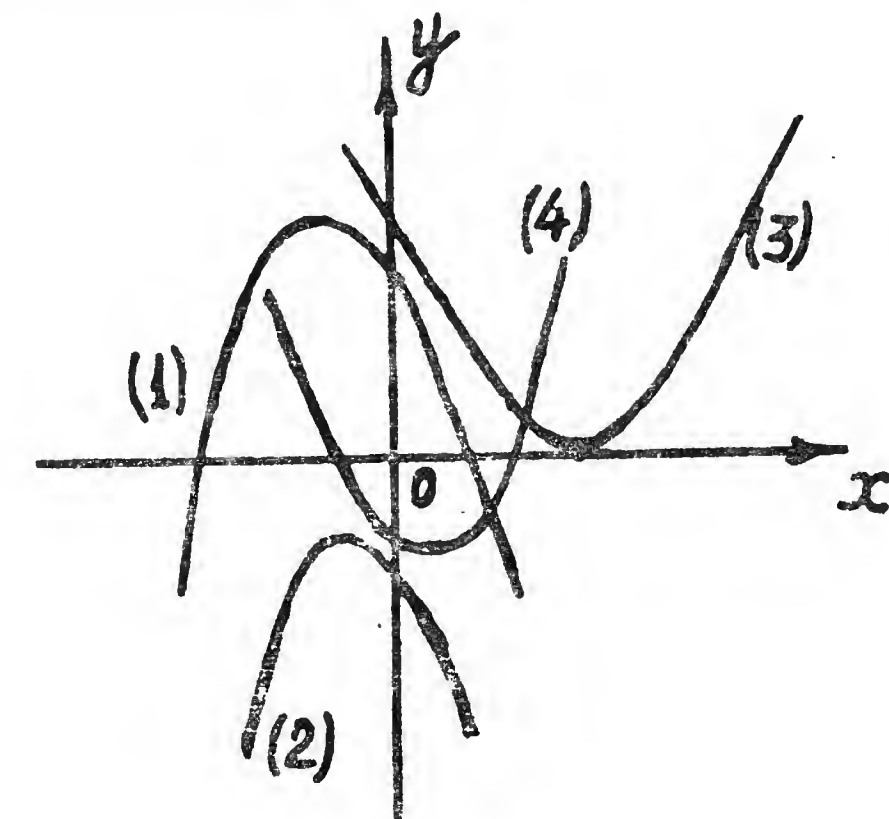


Рис. 13

Чертеж приблизительный, масштаб не указан. Что можно сказать о знаках a, b, c в случаях (1), (2), (3), (4)?

11. Одна сторона треугольника равна полусумме двух других его сторон. Докажите, что биссектриса среднего по величине угла делит противоположную сторону на части, каждая из которых равна половине прилежащей стороны.

12. Молочница принесла восьмилитровый бидон с молоком. Хозяйка хочет купить 4 л молока, но у нее имеются лишь одна трехлитровая и одна пятилитровая банки. Каким образом молоч-

ница сможет отлить хозяйке 4 л молока, пользуясь лишь своим бидоном и этими банками?

13. Найдите x , если известно, что $(x^2 - 3x)$ — целое отрицательное число, а $x + \frac{1}{x}$ — целое положительное число.

14. После окончания спектакля «Ревизор» на сцене Бобчинский и Добчинский начали препираться по поводу того, кто первый сказал «Э!».

Бобчинский: Это Вы, Петр Иванович, первый сказали «Э!». Вы сами раньше так говорили.

Добчинский: нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали «Э!». А у меня зуб во рту со свистом.

Бобчинский: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. Но все-таки это Вы первый сказали «Э!».

Выясните, кто первый сказал «Э!», если известно, что из 9 произнесенных в этом разговоре фраз нечетное число верных.

15. Три купчихи: Олимпиада, Сосипатра и Поликсена пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько Сосипатра и Поликсена вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько Олимпиада и Поликсена вместе. Их отчества: Титовна, Уваровна и Карповна. Определите, сколько каждая выпила чашек и у какой какое отчество, если известно, что Титовна выпила число чашек, кратное трем, а Карповна выпила 11 чашек.

16. В папке лежало несколько листов бумаги (не больше восьми). Некоторые из них разрезали на 7 кусков. Затем некоторые из полученных кусков снова разрезали на 7 кусков, и так повторили несколько раз. В результате получился 1971 кусок. Сколько листов бумаги было вначале в папке?

17. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

18. Два велосипедиста выехали в 8 ч одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . Доезжая до конца, каждый из них немедленно поворачивал назад. Их первая встреча произошла в 9 ч в 40 км от A , вторая — в 10 ч 12 мин в 22 км от A . На каком расстоянии от A произошла их третья встреча, если считать, что каждый из них двигался с постоянной скоростью?

19. Решите уравнения:

а) $x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$,

б) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

20. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E и в треугольники ACE и ECB вписаны окружности,

которые касаются отрезка CE в точках K и H . Найдите длину отрезка KH , если $AE = a$, $EB = b$.

21. Пять последовательных сторон описанного около окружности шестиугольника равны a, b, c, d, e . Найдите его шестую сторону.

22. Про точки A, B, C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM . Докажите, что точка A лежит на отрезке BC .

23. На плоскости даны точки A, B, C . Где находятся все такие точки M , что из трех расстояний MA, MB, MC расстояние MB — не наибольшее и не наименьшее?

24. Сумма нескольких чисел равна 1. Может ли сумма их квадратов быть меньше 0,01?

25. Автор учебника, читая условие одной из задач, заметил опечатку в предложении: «Отложите 9 см на левой стороне угла в 60° и ... см на правой стороне угла. Чему равно расстояние между полученными таким образом точками?». Наборщик увеличил на 1 число сантиметров на месте поставленных нами точек. Конечно, наборщик и не подумал изменить ответ, напечатанный в конце учебника. Несмотря на это, опечатка не привела к ошибке. Какое число набрал наборщик в задаче?

26. Улитка ползет от точки A , поворачивая на 90° через каждые 15 мин. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов (скорость улитки считается постоянной).

27. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.

28. Известно, что $49 = 7^2$. Вставим в середину числа 49 число 48. Получится число 4489. В середину этого числа опять вставим 48, получится 444889. Докажите, что если в число 49 вставить таким образом 1000 раз число 48, то полученное число будет квадратом целого числа. Получится ли квадрат, если мы вставим 48 еще несколько раз?

29. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и является биссектрисой одного из углов трапеции. В каком отношении делится каждая из диагоналей точкой их пересечения?

30. Докажите, что в любом треугольнике произведение двух сторон равно произведению высоты, проведенной к третьей стороне, на диаметр описанного круга.

31. В магазине было шесть разных ящиков с яблоками весом в 15 кг, 16 кг, 18 кг, 19 кг, 20 кг, 31 кг. Два покупателя взяли пять ящиков. Один из них взял по весу в два раза больше, чем другой. Какой ящик остался в магазине?

32. Даны две фигуры: прямоугольник, диагонали которого образуют угол в 30° , и квадрат со стороной, равной половине диагонали прямоугольника.

а) Докажите, что площади этих фигур равны.

б) Разрежьте этот прямоугольник на такие части, из которых, передвинув их, можно сложить квадрат.

33. На школьной химической олимпиаде присутствовали 21 человек, на физической — 26 человек, на математической — 29 человек. 14 человек участвовали и в химической, и в математической; 15 человек — и в физической, и в математической; 13 — и в физической, и в химической; 8 человек участвовали во всех трех олимпиадах. Сколько всего человек участвовали хотя бы в одной из трех олимпиад?

34. Придумайте четыре четверки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое число от 1 до 256 можно было представить в виде суммы четырех чисел — по одному из каждой четверки.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	2
I. Вступительные контрольные работы 1972 г.	
Для учащихся 7-х классов	3
Для учащихся 8-х классов	4
II. Решения задач вступительной контрольной работы для семиклассников	5
III. Решения задач вступительной контрольной работы для восьмиклассников	11
IV. Задачи для самостоятельного решения	22

Л-111326	Подписано к печати 30/III 1972 г.		
Уч.-изд. л. 1,33	Формат 60×90 ^{1/16}	Бумага тип. № 3	Физ. печ. л. 1,75
	Заказ 50	Тираж 20 050 экз.	Цена 4 коп.

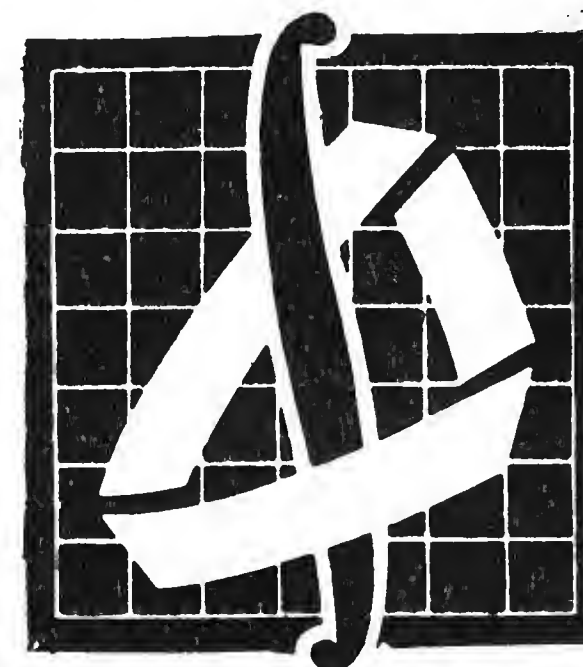
Издательство Московского университета. Москва, К-9, улица Герцена, 5/7.
Типография Издательства МГУ (ф.). Москва, проспект Маркса, 20.

Цена 3 коп.

N1.1K

Сентябрь 1974г., ВЗМШ (1974-75,
1-ое задание)

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА



1 курс ВЗМШ
(8-ой класс)

**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ**

Всесоюзная заочная математическая школа
Академии педагогических наук СССР при МГУ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск X1

Издательство Московского университета - 1974

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА



**МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ**

Всесоюзная заочная математическая школа
Академии педагогических наук СССР при МГУ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск XI

Издательство Московского университета - 1974

Оглавление

	стр.
Предисловие.....	3
I. Вступительная контрольная работа в ВЗМШ 1974 г.	4
II. Решения задач вступительной контрольной работы.....	5
III. Задачи для самостоятельного решения	II

Подписано к печати 8. II. 1974 г.

Л-50069

Формат 60 x 90 1/16 Объем I п. л. Тираж 6000 экз.

Заказ 1019

Цена 3 коп.

Отпечатано на ротационной машине Института механики МГУ

Предисловие

В первом разделе этой брошюры помещены задачи, которые надо было решить семиклассникам, изъявившим желание поступить во Всесоюзную заочную математическую школу при МГУ в 1974 году.

Во втором разделе публикуются решения этих задач. Разумеется, можно придумать и другие решения, ведь даже одно и то же решение можно записать по-разному — подробно или кратко, наглядно или формально. Мы постарались изложить решения возможно более наглядно, чтобы их поняли даже те, кто не смог решить эти задачи сам. Впрочем, и тем, кто решил задачи, мы советуем разобраться в этих решениях, чтобы перебрать, возможно, какие-то новые приемы и поучиться четкости в записи решений.

Во многих присланных нам решениях имеются существенные недостатки. Например, редко можно было встретить четкие рассуждения при решении задач № 1, 5, 10. В задаче 7 немногим пришлось в голову нарисовать схему из стрелок и цифр ("граф"). Вообще четкая и в то же время простая запись решения составляет для многих камень преткновения, и над этим следует поработать.

В третьем разделе брошюры даются задачи из разных разделов математики для самостоятельной работы. Среди этих задач есть как легкие, так и трудные. Поэтому не старайтесь решать обязательно все задачи подряд. Если какая-нибудь задача Вас заинтересует, а решить ее не удастся, то отложите ее на время и возьмитесь за другие, а потом опять вернитесь к отложенной. Как правило, самые интересные и полезные задачи именно те, которые трудно решить сразу.

Первые II задач третьего раздела составляют работу, аналогичную вступительной; в остальных задачи расположены в произвольном порядке: похожие задачи необязательно стоят рядом.

Контрольную работу составили: И. Берштейн, Н. Васильев, В. Гутенмахер, Ю. Ильяшенко, Б. Макаревич, Ж. Раббот, Л. Серебренникова, А. Тоом. Решения контрольных задач написаны А. Тоомом. Сборник подготовили к печати В. Гутенмахер, Н. Васильев, Л. Серебренникова, Ж. Раббот.

Методическая комиссия ВЗМШ

1. Задачи вступительной контрольной работы
в ВЗМШ 1974 года

1. Три друга сыграли несколько партий в шахматы, причем каждые двое сыграли друг с другом одинаковое количество партий. Потом стали решать, кто победитель. Первый сказал: "У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей". Второй сказал: "У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей". Но когда подсчитали очки, то оказалось, что больше всех очков набрал третий. (Выигрыш — 1 очко; ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0). Могло ли так быть? Если нет — доказите, если да — приведите пример.

2. Существуют ли три положительных целых числа a, b, c таких, что a меньше 1974, b на 1575 меньше c и $a^2 + b^2 = c^2$?

3. На дороге, соединяющей аулы A и B , нет ровных участков. Автобус в гору едет всегда со скоростью 15 км/час, под гору — 30 км/час. Найдите расстояние между A и B , если из A в B и обратно автобус едет 4 часа (без остановок).

4. Основания трапеции равны 15 см и 11 см, боковые стороны — 6 см и 9 см. Постройте такую трапецию и доказите, что ее можно разрезать на три конгруэнтных трапеции.

5. Дама сдает в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан весит больше, чем рюкзак. Саквояж и рюкзак вместе весят больше, чем две остальные вещи: корзина и чемодан, а корзина и саквояж вместе весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Какая из вещей самая тяжелая и какая — самая легкая?

6. Точка D лежит на биссектрисе угла ACB . На луче AC выбрали точки A_1 и A_2 , а на луче CB — точки B_1 и B_2 так, что четыре точки A_1, C, B_1, D лежат на одной окружности и четыре точки A_2, C, B_2, D тоже лежат на одной окружности. Докажите, что $A_1 A_2 = B_1 B_2$.

7. Подряд в строчку выписаны 1974 цифры. Каждое двузначное число, записываемое двумя соседними цифрами (в том порядке, в каком они написаны), делится на 17 или на 23.

а) Последняя цифра 1. Какова первая?

б) Первая цифра 9. Какова последняя?

8. Периметр выпуклого четырехугольника $ABCD$ равен 10, его стороны AB и CD параллельны. Найдите длины всех сторон, если известно, что биссектрисы углов A и B четырехугольника делят сторону CD на три равные части, а биссектрисы углов C и D делят сторону AB на три равные части.

9. а) Перечислите все возможные прямоугольники, у которых длины сторон больше 10 и которые можно разрезать на 28 прямоугольников размером 3 x 5.

б) Можно ли 28 брусками размером $3 \times 5 \times 10$ заполнить какую-нибудь прямоугольную коробку $a \times b \times c$, где $a \geq b \geq c \geq 10$?

10. Существует ли девятизначное число, записываемое цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, у которого нельзя вычеркнуть пять цифр так, чтобы оставшиеся четыре шли в порядке возрастания или в порядке убывания?

11. Можно ли указать внутри треугольника со сторонами 3, 4, 5 точку, расстояния от которой до каждой из сторон треугольника: а) меньше 2; б) меньше 1?

II. Решения задач вступительной контрольной работы

1. Да, так могло быть.

Вот пример, доказывающий это. Пусть каждые двое сыграли по 7 партий, причем из них:

первый выиграл у второго две партии;
второй выиграл у первого две партии;
первый выиграл у третьего три партии;
третий выиграл у первого четыре партии.

Остальные партии закончились вничью.

2. Да, такие числа существуют.

Можно было бы просто их выписать, но мы объясним, как найти их, и попутно покажем, что эта тройка чисел единственна.

По условию
$$\begin{cases} c^2 - b^2 = a^2, \\ c - b = 1575. \end{cases}$$

Поэтому $1575(c + b) = a^2$,
 $1575 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

откуда a^2 делится на

Очевидно, число a должно делиться на 3, на 5 и на 7, а тем самым и на их произведение 105. Это можно записать так: $a = 105k$.

Поскольку $a < 1974$, то $1 \leq k \leq 18$.

Теперь:
$$\begin{aligned} c + b &= 7k^2 \\ c - b &= 1575, \end{aligned}$$

откуда
$$c = \frac{7k^2 + 1575}{2}, \quad b = \frac{7k^2 - 1575}{2}.$$

Очевидно, должно быть $7k^2 > 1575$, откуда $k > 15$. Кроме того, k должно быть нечетным, так как иначе b и c не получатся целыми. Всем полученным для k условиям удовлетворяет только

$$K = 17. \text{ Тогда } a = 1785, \quad b = 224, \quad c = 1799.$$

Легко проверить, что все условия задачи для этих a, b, c выполняются.

3. Пусть на пути из А в В надо ехать x км в гору и y км под гору. Тогда на пути из В в А надо ехать y км в гору и x км под гору, поэтому $\frac{x}{15} + \frac{y}{30} + \frac{x}{30} + \frac{y}{15} = 4$,

откуда $x + y = 40$. Ответ: 40 км.

4. Способ построения несложен. Сначала строим треугольник ABK со сторонами $AB = 6, BK = 9, AK = 4$ (рис. 1)

Это возможно, так как числа 4, 6 и 9 удовлетворяют неравенствам треугольника ($6 + 4 > 9, 6 + 9 > 4, 4 + 9 > 6$). Теперь продолжим AK на отрезок $KD = 11$ и построим точку C так, чтобы четырехугольник $BCDK$ оказался параллелограммом. Легко доказать, что $ABCD$ — исконая трапеция. Покажем теперь, как разрезать ее на три конгруэнтные трапеции. Выберем на BC точки E, H , а на AD — точки M, P так, чтобы:

$$BE = 2\frac{1}{3}, \quad EH = 6\frac{1}{3}, \quad HC = 2\frac{1}{3}, \\ AM = 6\frac{1}{3}, \quad MP = 2\frac{1}{3}, \quad PD = 6\frac{1}{3}.$$

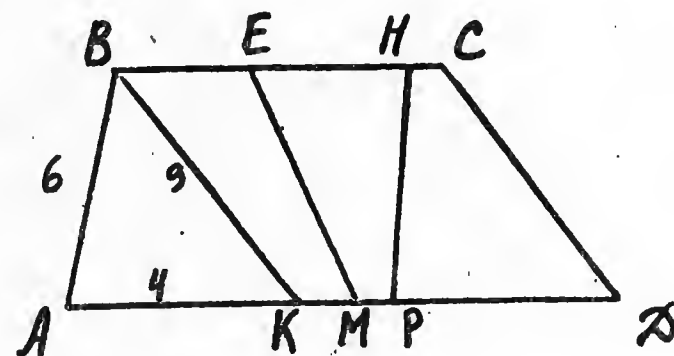


Рис. I

Очевидно, четырехугольники $ABEM, EMRH, RHCD$ — трапеции. Докажем, что трапеция $ABEM$ конгруэнтна $EMRH$ (конгруэнтность $EMRH$ и $RHCD$ доказывается аналогично). Заметим, что $\angle EHP = \angle MAB$. Пользуясь этим, передвинем $EMRH$ в новое положение $E'M'R'H'$ так, чтобы $\angle E'H'R'$ наложился на $\angle MAB$. Поскольку $EH = MA, HP = AB$, точка E' совпадет с M , точка P' совпадет с B . Далее, поскольку

$$\angle MEN = \angle EMA,$$

$E'M'$ пойдет по ME , и, конечно, M' совпадет с E . Итак, $E'M'R'H'$ совпала с $MEBA$, что и требовалось.

5. Обозначим веса предметов их начальными буквами: P (рюкзак), $Ч, С, К$. Данные условия можно записать так:

$$Ч > P \quad (1)$$

$$С + P > К + Ч \quad (2)$$

$$К + С = Ч + P \quad (3)$$

Сложив (2) и (3), получим: $С > Ч$. Вычтя (3) из (2), получим:

$$P > K.$$

Итак, мы выяснили, что $С > Ч > P > K$, то есть самый тяжелый — саквояж, потом — чемодан, потом — рюкзак, и самая легкая — корзина.

6. Введем обозначения: $CD = a, \angle ACD = \angle BCD = \alpha$.

Нам надо проделать два аналогичных построения. Чтобы не писать два раза почти одно и то же, введем переменную n ,

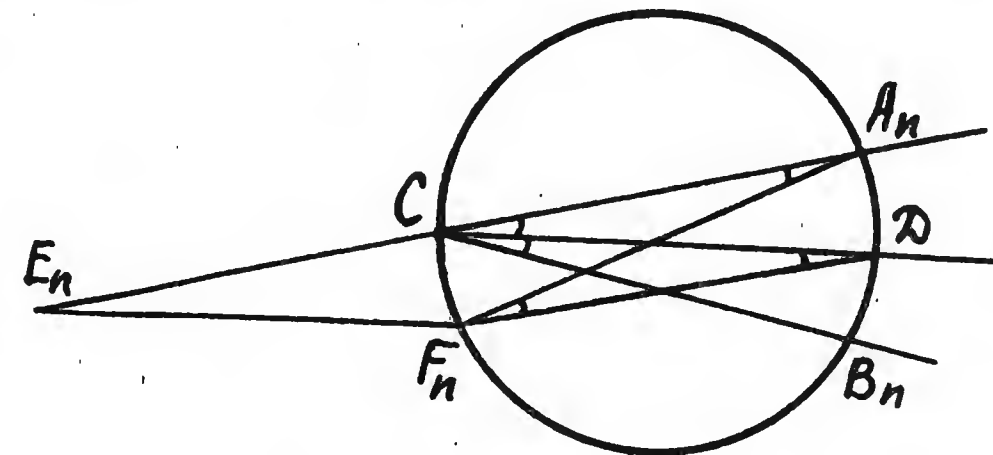


Рис. 2

принимаящую два значения: 1 и 2, и опишем построение один раз, употребляя переменную n (см. рис. 2). Продолжим AC за точку C на отрезок $CE_n = CB_n$.

Отложим на дуге $CB_n D$ дугу DF_n , равную дуге CB_n . Очевидно, $\angle CDF_n = \alpha$ и $DF_n = CB_n = CE_n$.

Поэтому $CDF_n E_n$ — параллелограмм и $E_n F_n = CD = a$.

Далее, поскольку $\angle CA_n F_n$ и $\angle CDF_n$ опираются на одну дугу, то они равны, и поэтому $\angle E_n A_n F_n = \alpha$.

Таким образом, в треугольнике $E_n F_n A_n$

$$E_n F_n = F_n A_n = a, \quad \angle E_n F_n A_n = 180^\circ - 2\alpha.$$

Поэтому треугольники $E_1 F_1 A_1$ и $E_2 F_2 A_2$ равны по первому признаку. Тогда

$$E_1 A_1 = E_2 A_2,$$

$$B_1 C + A_1 C = B_2 C + A_2 C,$$

$$B_1 C - B_2 C = A_2 C - A_1 C,$$

$$\text{откуда } B_1 B_2 = A_1 A_2,$$

что и требовалось.

7. Давайте подумаем, какая цифра может следовать за каждой из 9 цифр. Вот полный список двузначных чисел, делящихся на 17 или на 23:

17	23
34	46
51	69
68	92
85	

Удобно начертить "граф" - схему из стрелок, как на рис. 3. В нем стрелка из цифры x в цифру y

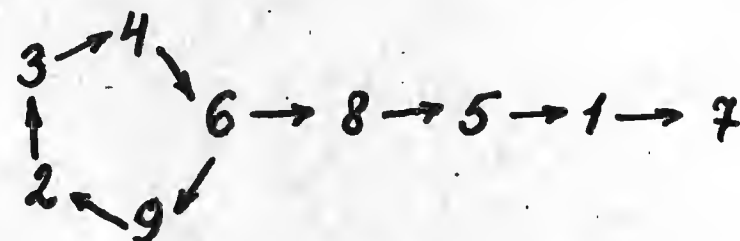


Рис. 3

означает, что y может следовать за x . Мы видим, что перед 1 может стоять только 5, перед 5 только 8 и так далее; каждая цифра однозначно определяет предыдущую. При этом, если мы идем по стрелкам назад от цифры 1, цифры, начиная с 6, повторяются с периодом 5. Поэтому, если 1974-я цифра 1, то 1971-я цифра 6, а так как дальше повторение с периодом 5, то первая тоже 6.

Пусть теперь первая цифра 9. Пойдем по стрелкам вперед от цифры 9. После 9 может стоять только 2, после 2 только 3, после 3 только 4, после 4 только 6, а вот после 6 может стоять и 9, и 8. Но после 8 должно стоять 5, 1, 7, а после 7 ничего стоять не может. Таким образом, 8 может появиться не раньше, чем на 1971-ом месте, а до тех пор после 6 может стоять только 9. Цифра 6 в первый раз появилась на 5-ом месте и будет повторяться с периодом 5. Значит, на 1970-м месте будет 6. На 1971-ом, как мы выяснили, может быть 9 или 8, а на 1974 месте может быть 4 или 7.

8. В этой задаче возможны четыре случая, схематически изображенные на рис. 4, 5, 6, 7. Рисунки не воспроизводят

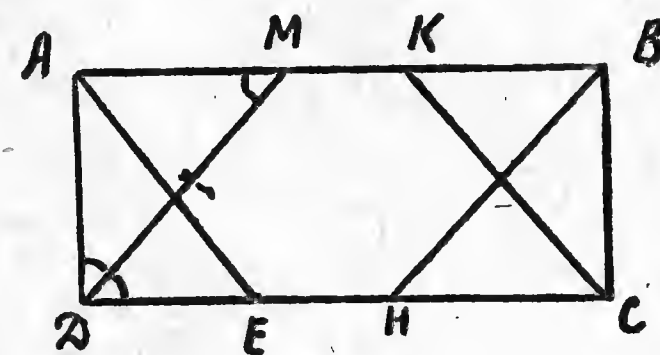


Рис. 4

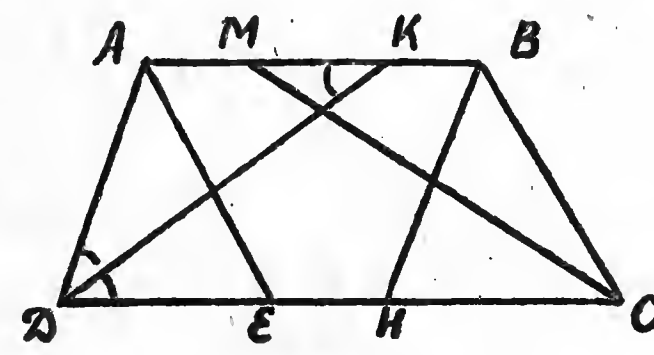


Рис. 5

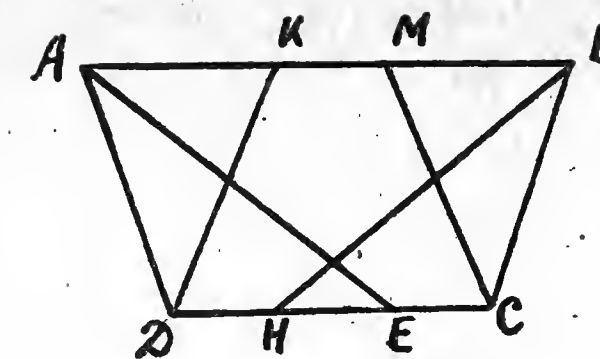


Рис. 6

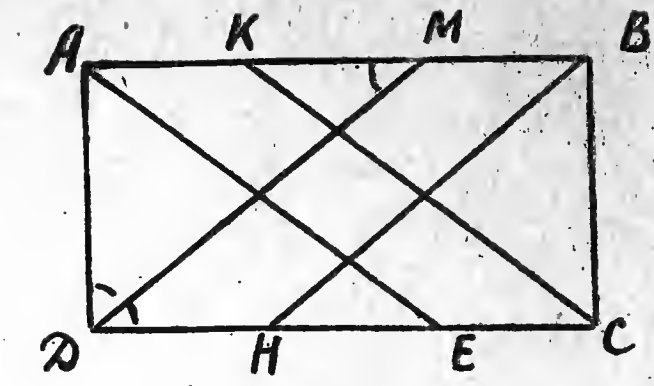


Рис. 7

действительные длины сторон или величины углов, а только порядок точек пересечения биссектрис AE , BH , CK , DM со сторонами.

I. случай (рис. 4). Пусть $AM = MK = KB = a$. Заметим, что $\angle AMD = \angle CDM = \angle ADM$ (I). Поэтому $AD = a$. По аналогичным причинам $BC = DE = EH = HC = a$. Тогда периметр равен $8a$, откуда $a = 5/4$. Ответ для этого и других случаев дан в таблице внизу.

II случай (рис. 5). Пусть $AK = KM = MB = a$. Равенства (I) снова верны, поэтому $AD = 2a$, аналогично $BC = DE = EH = HC = 2a$. Периметр равен $13a$, откуда $a = 10/13$.

III случай (рис. 6) аналогичен случаю II.

IV случай (рис. 7). Пусть $AK = KM = MB = a$. Используя те же равенства углов (I), получаем: $AD = BC = 2a$, $DE = HC = 2a$, откуда $DH = HE = EC = a$. Периметр равен $10a$, поэтому $a = 1$.

Ответы:

Случай	I	II	III	IV
Стороны				
AB	$15/4$	$30/13$	$60/13$	3
BC	$5/4$	$20/13$	$20/13$	2
CD	$15/4$	$60/13$	$30/13$	3
DH	$5/4$	$20/13$	$20/13$	2

9a. Очевидно, площадь такого прямоугольника равна $28 \cdot 3 \cdot 5 = 420$. Его стороны целые. Значит, надо разбить число $420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ на два целых множителя, каждый из которых больше 10. Рассмотрим тот множитель, который делится на 7. Он больше 10 и меньше 42 (иначе второй множитель меньше 10).

Получаем четыре случая:

1) 14×30 ; 2) 21×20 ; 3) 28×15 ; 4) 35×12 .

Мы выяснили, что никакой прямоугольник, кроме этих четырех, не годится. Подходят ли эти четыре?

Заметим, что если длина одной стороны прямоугольника делится на 3, а длина перпендикулярной к ней стороны делится на 5, то такой прямоугольник можно разрезать на прямоугольники 3×5 . Для этого ту сторону, что делится на 3, надо разделить на тройки, а ту, что делится на 5, — на пятерки, и через точки деления каждой стороны провести перпендикулярные разрезы.

Отсюда сразу следует, что прямоугольники 21×20 и 35×12 можно разрезать на прямоугольники 3×5 , значит они входят в ответ. Прямоугольник 14×30 разрежем сначала на два прямоугольника: 9×30 и 5×30 . Оба они, по тому же замечанию, могут быть разрезаны на прямоугольники 3×5 , значит 14×30 тоже входит в ответ. Прямоугольник 28×15 разрежем на прямоугольники 25×15 и 3×15 , которые можно разрезать аналогично. Значит, список четырех случаев, данный выше, и есть ответ.

9б. Да, можно. Приведем пример, доказывающий это. Пусть $a = 20$, $b = 15$, $c = 14$

Разрежем эту коробку $20 \times 15 \times 14$ на две:

$20 \times 15 \times 9$ и $20 \times 15 \times 5$

В каждой из двух полученных коробок одно измерение делится на 3, другое — на 5, третье — на 10. Поэтому каждую из них, конечно, можно заполнить брусками $3 \times 5 \times 10$.

Всего брусков получится

$$\frac{20 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 5 \cdot 10} = 28,$$

что и требовалось.

10. Да, существует. Докажем, например, что годится такая последовательность из 9 цифр:

321, 654, 987

Ясно, что если какие-то цифры из этих 9 стоят в убывающем порядке (та, которая меньше, стоит дальше от начала), то они обязательно — из одной тройки. Значит, нельзя выбрать больше трех цифр, стоящих в убывающем порядке, поскольку все эти цифры должны находиться в одной тройке.

Если же какие-то цифры из этих 9 стоят в возрастающем порядке, то они обязательно из разных троек. Поскольку троек всего три, то нельзя выбрать более трех цифр, стоящих в возрастающем порядке.

Существуют и другие примеры. Например, годится число 638 159 274,

но для него доказательство более громоздко.

II. Решим сначала вспомогательную задачу: вычислим радиус окружности, вписанной в этот треугольник. Пусть $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$. Пусть O — центр вписанной окружности, т.к. $3^2 + 4^2 = 5^2$, то $\angle ACB = 90^\circ$; E, H, K — точки ее

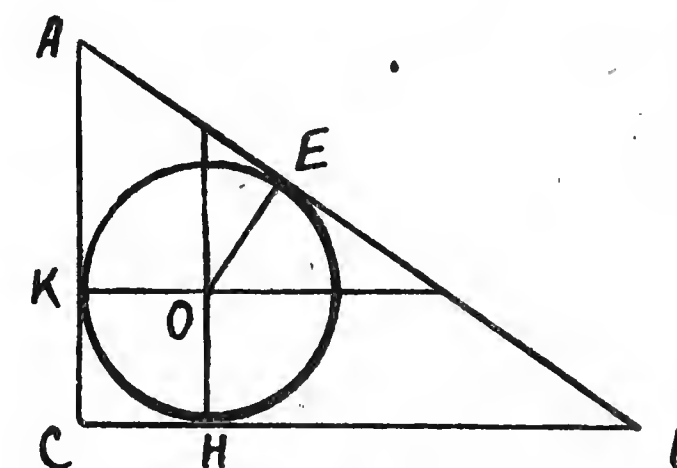


Рис.8

касания со сторонами AB , BC , AC соответственно (рис.8). Обозначим радиус через r . Очевидно, $CKOH$ — квадрат. Тогда

$AK = 3 - r$, $BH = 4 - r$. Но $AK = AE$, $BH = BE$

как касательные, проведенные из одной точки.

Тогда $(3 - r) + (4 - r) = 5$, откуда $r = 1$.

Тем самым мы получили ответ на вопрос а): да, можно. Расстояния от точки O до каждой из сторон равны 1, и поэтому меньше 2.

Ответ на вопрос б) отрицательный: нет, нельзя. Докажем это. Пусть точка M лежит внутри $\triangle ABC$. Если расстояние от M до AC меньше 1, то M левее прямой OH . Если расстояние от M до BC меньше 1, то M ниже прямой OK . Поэтому точка M попадает внутрь квадрата $CKOH$. Но тогда M дальше от AB , чем точка O , то есть расстояние от M до AB больше 1, что и требовалось доказать.

III. Задачи для самостоятельного решения

1. В шахматном турнире участвовало 2 ученика 7 класса и некоторое количество учеников 8 класса. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый восьмиклассник набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире (каждый участник турнира играет с каждым из остальных один раз, выигрыш — 1 очко, ничья — 1/2 очка, проигрыш — 0 очков)? Найдите все решения.

2. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющие уравнению: а) $x^2 - y^2 = 12$, б) $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

3. Два велосипедиста выехали в 8 час одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В. Доезжая до конца, каждый из них немедленно поворачивал назад. Их первая встреча произошла в 9 час в 40 км от А, вторая – в 10 час 12 мин в 22 км от А. На каком расстоянии от А произошла их третья встреча, если каждый из них все время двигался с постоянной скоростью?

4. Основания трапеции равны a и b . Докажите, что если $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$, то эту трапецию можно разрезать на три конгруэнтные трапеции.

5. Дама сдавала в багаж: диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них – больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

6. На отрезке AB выбрана произвольная точка C и на отрезках AB , AC и BC как на диаметрах построены окружности O_1 , O_2 , O_3 соответственно. Через точку C проводится произвольная прямая, пересекающая окружность O_1 в точках P и Q , а окружности O_2 и O_3 в точках M и N соответственно. Докажите, что $PM = QN$.

7. В строчку выписаны 1974 цифры, причем каждые две соседние цифры образуют двузначное число, разлагающееся ровно на 4 простых множителя. Какая цифра стоит на 1000-м месте?

8. Внутри отрезка AB взята точка C . По одну сторону от прямой AB построены равнобедренные треугольники ADC и CEB , причем $AD = DC = CE = EB$. Точка F находится на расстоянии, равном AD , от точек D и E и не совпадает с точкой C . Докажите, что $AF = FB$.

9. Разрежьте произвольный треугольник на части, из которых можно составить треугольник, зеркально симметричный данному.

10. Придумайте 4 четверки целых неотрицательных чисел такие, чтобы каждое целое число от 1 до 256 можно было представить в виде суммы четырех чисел – по одному из каждой четверки.

11. Дан равнобедренный треугольник с основанием 2 и высотой, опущенной на основание, равной 10. Можно ли указать внутри него точку, сумма квадратов расстояний от которой до всех трех сторон: а) меньше 10; б) меньше 2; в) меньше 1?

12. Найдите пары чисел (x, y) , для которых

$$x + y = xy + 1 = x^2 + y^2 - 2.$$

13. Вершина одного из двух равных квадратов со стороной 1 совпадает с центром другого. Найдите площадь их общей части.

14. На бесконечной клетчатой бумаге провели несколько прямых линий, никакие две из которых не параллельны. Они делят плоскость на несколько частей. Докажите, что каждая бесконечная часть содержит внутри себя целиком хотя бы одну клетку.

15. Шестизначное число делится на 7.

Докажите, что, если последнюю его цифру переставить в начало, то полученное число тоже будет делиться на 7.

16. Можно ли разрезать квадрат на 1974 квадрата (возможно неравных)?

17. Край листа бумаги представляет собой прямую линию ℓ . Выберем на нем точку O , согнем край ℓ в точке O и склеим одну часть этого края с другой. Лист бумаги свернется в конус с вершиной O . Какие значения может принимать сумма углов треугольника, начерченного на этом конусе?

18. Докажите, что сумма двух несократимых дробей с различными знаменателями не может быть целым числом.

19. Можно ли неравнобокую трапецию разрезать на две конгруэнтных части?

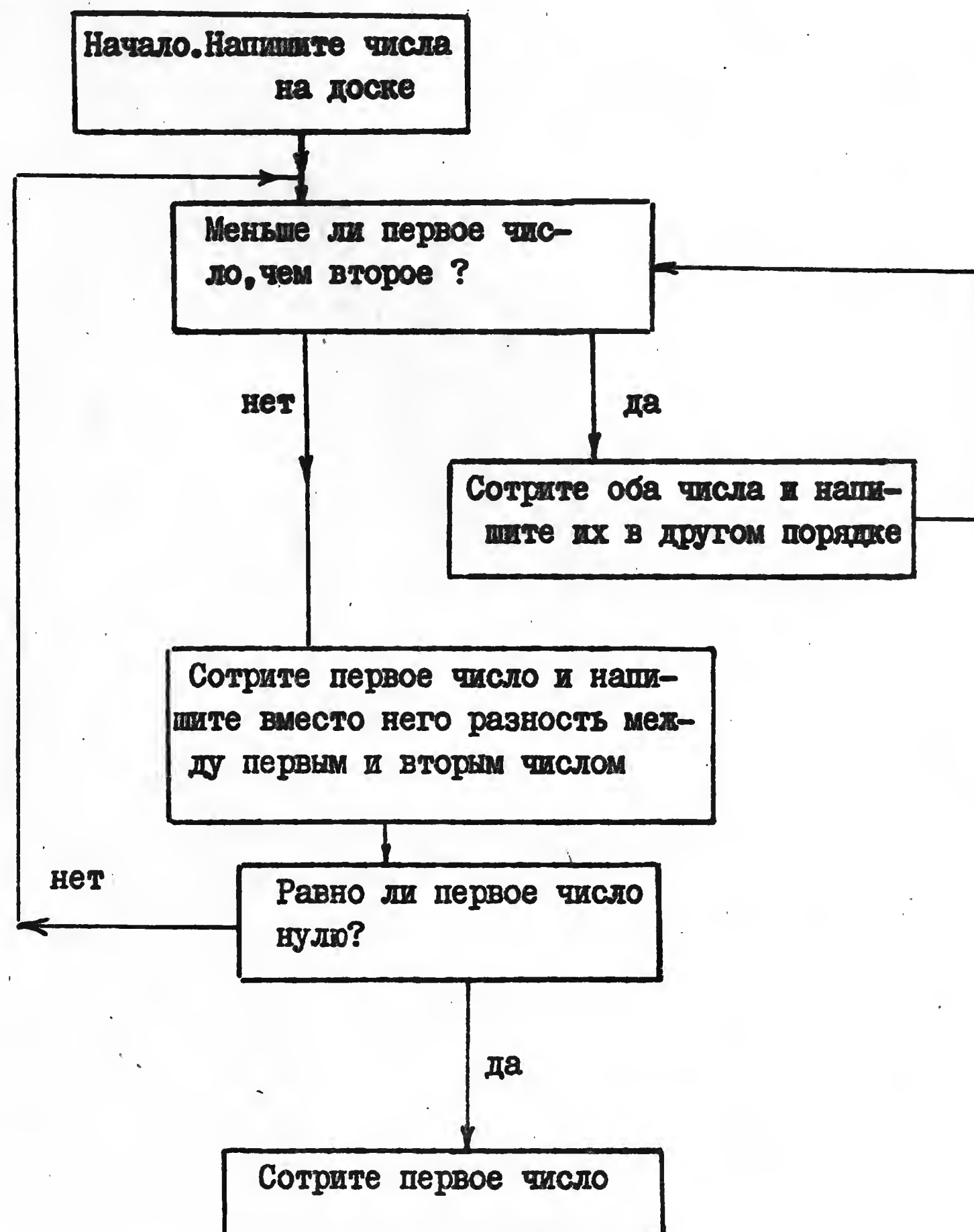
20. Может ли радиус описанной около треугольника окружности быть больше его периметра?

21. Найдите два наименьших целых положительных числа, каждое из которых дает остаток 2 при делении на 3, остаток 4 при делении на 5 и остаток 6 при делении на 7.

22. Существует ли непостоянная функция $f(x)$, такая что для любых x_1, x_2

$$x_1 f(x_2) + x_2 f(x_1) = (x_1 + x_2) f(x_1) f(x_2)$$

23. Пусть вам даны два числа M и N . Предположим, вы действуете по следующему алгоритму.



- а) Что получится, если $M = 17$, $N = 11$?
 б) Докажите, что, если M, N — целые положительные числа, то процесс закончится.
 в) Докажите, что, если $M = \sqrt{2}$, $N = 1$, то процесс никогда не закончится.

24. Найдите ошибку в решении:

$$\begin{aligned}
 x^2 + x + 1 &= 0 \\
 x(x+1) &= -1 \\
 -1 &= -x^3 \\
 x^3 &= 1 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

25. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена высота, из другой — медиана, из третьей — биссектриса. При пересечении внутри образуется треугольник. Докажите, что он не может оказаться правильным.

26. Пять яблок, пять груш и один апельсин стоят 78 копеек. Одно яблоко, пять груш и пять апельсинов — 1 руб. 18 коп. Сколько стоит одна груша? (Все апельсины одинаковые, все груши и яблоки — тоже).

27. Найдите угол A в треугольнике ABC , если известно, что он в три раза меньше угла BOC , где O — центр круга, вписанного в треугольник ABC .

28. На кольцевой дороге проводится эстафета мотоциклистов. Старт и финиш находятся в одном и том же месте. Какое наименьшее число этапов может быть в этой эстафете, если длина кольцевой дороги 330 км, а длина каждого этапа 75 км (движение по дороге одностороннее)?

29. Пользуясь только треугольником со сторонами 9, 12, 16 и карандашом, постройте отрезок длиной $1/4$.

30. Улитка ползет из точки A , поворачивая на 90° через каждые 15 мин. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов (скорость улитки постоянна).

31. Найдите наименьшее натуральное число, начинающееся с цифры 7 и уменьшающееся вчетверо от перестановки этой цифры в конец числа.

32. На плоскости даны точки A, B, C . Где находятся все такие точки M , что из трех расстояний: MA, MB, MC расстояние MB — не наибольшее и не наименьшее?

33. Пусть три угла и две стороны одного треугольника равны трем углам и двум сторонам другого треугольника. Можно ли утверждать, что эти треугольники равны?

34. Поставьте цифры вместо звездочек так, чтобы четырехзначное число $56**$ делилось и на 6, и на 8, и на 15.

35. После окончания спектакля "Ревизор" Бобчинский и Добчинский начали препираться на сцене по поводу того, кто первый сказал "3"!

Б о б ч и н с к и й: Это Вы, Петр Иванович, первый сказали "Э"!..Вы сами раньше так говорили.

Д о б ч и н с к и й: нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали "Э!". А у меня зуб во рту со свистом.

Б о б ч и н с к и й: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. Но все-таки это Вы первый сказали "Э!".

Выясните, кто первый сказал "Э!", если известно, что из 9 произнесенных в этом разговоре фраз нечетное число верных.

36. Пять последовательных сторон описанного около окружности шестиугольника равны a, b, c, d, e . Найдите его шестую сторону.

37. Известно, что $49 = 7^2$. Вставим в середину числа 49 число 48. Получится число 4489. В середину этого числа опять вставим 48, получится 444889. Докажите, что если в число 49 вставить таким образом 1000 раз число 48, то полученное число будет квадратом целого числа. Получится ли квадрат, если мы вставим 48 еще несколько раз?

38. Три купчихи: Олимпиада, Сосипатра и Поликсена пили чай. Если бы Олимпиада выпила на 5 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько Сосипатра и Поликсена вместе. Если бы Сосипатра выпила на 9 чашек больше, то она выпила бы столько, сколько Олимпиада и Поликсена вместе. Их отчества: Титовна, Уваровна и Карповна. Определите, сколько каждая выпила чашек и у какой какое отчество, если известно, что Титовна выпила число чашек, кратное трем, а Карповна выпила 11 чашек.

39. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость два выпуклых многоугольника?

40. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC , не меньше этих сторон (соответственно). Найдите углы треугольника.

41. На данной окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и третья точка C . Касательная, проведенная к окружности в точке A , и прямая BC пересекаются в точке M . Докажите, что касательная, проведенная к окружности в точке C , делит пополам отрезок AM .

42. На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются "узлами". "Звеном" мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилась не более трех звеньев?

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

ВСЕСОЮЗНАЯ ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР при МГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ВЗМШ

Избранные задачи по математике

Выпуск XIУ

Крибери оц

3 — 4 зад

4 — 6 зад

5 — 8 зад

Издательство Московского университета — 1977

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первом разделе этой брошюры помещены задачи для семиклассников, поступавших во Всесоюзную заочную математическую школу АПН СССР при МГУ в 1977г.

Во втором разделе публикуются решения этих задач. Конечно, эти решения — не единственно возможные, можно придумать и другие, ведь даже одно и то же решение можно записать по-разному: подробно или кратко, наглядно или формально. Мы постарались изложить их как можно подробнее. Более того, мы рекомендуем прочесть эти решения не только тем, кто не сумел их решить, но и тем, кто решил задачи, чтобы узнать, возможно, какие-то новые идеи и приемы, поучиться четкости в записи решений, а также увидеть, в чем были ошибки.

Среди самых распространенных ошибок отметим потерю части ответов в задаче № 5 и логические пробелы в решении задачи № 10, где далеко не все понимали необходимость четкого выделения двух этапов решения: пример того, что четырех машин может быть недостаточно, и доказательство возможности обойтись пятью машинами. Обе эти ошибки — свидетельство того, что многие школьники недостаточно внимание уделяют логическим вопросам.

Третий раздел — первое задание для тех, кто получил извещение о приеме в ВЗМШ. Они должны решить эти задачи, оформить решения в соответствии с присланной "Инструкцией" и прислать решения к 5 сентября 1977 года.

Задачи этого раздела аналогичны некоторым из задач I раздела. Так задачи № 1, 2, 3, 5, 8 аналогичны соответственно задачам № 4, 5, 6, 8, 10 из I раздела, а задачи № 6 и 7 — задаче № 9 из I раздела.

Наконец, в четвертом разделе мы даем задачи для самостоятельного решения в течение долгого времени. Эти задачи носят самый разнообразный характер: среди них есть и легкие, и трудные; похожие задачи не обязательно стоят рядом. Поэтому не старайтесь решать все задачи подряд. Если какая-нибудь задача Вас интересует, а решить её не удастся, отложите на время её решение, порешайте другие задачи, а затем вернитесь к отложенной. Как правило, самые интересные и полезные задачи именно те, которые трудно решить сразу. Мы надеемся, что каждый из Вас сможет найти в этом разделе задачи на свой вкус.

Вступительную контрольную работу составили: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Г.А.Гуревич, Б.О.Макаревич, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом.

Раздел II написали В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот.

В III и IV разделах использованы задачи, составленные в разное время членами Методической комиссии ВЗМШ, а также (№ I-3I из IV раздела) группой преподавателей под руководством чл.-корр. АН СССР И.М. Гельфанда.

Сборник подготовили к печати В.Л. Гутенмахер и Ж.М. Работ.

Методическая Комиссия ВЗМШ

I. ВСТУПИТЕЛЬНАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА В ВЗМШ 1977 года.

I. В равенстве двух дробей, числители и знаменатели которых - двузначные числа, цифры заменены буквами: одинаковые - одинаковыми, разные - разными:

$$\frac{KY}{PE} = \frac{KA}{KY}$$

Какую цифру означает каждая из букв (достаточно привести все возможные ответы)?

2. Дан прямоугольник ABCD. Найдите множество точек M, для которых

$$|MA| + |MB| = |MC| + |MD|.$$

3. Дополнить табличку 4 x 4 (см. рисунок I) буквами В, З, М, Ш, обвести их рамками четырех типов (квадрат, ромб, круг, треугольник) и раскрасить их в четыре цвета - так, чтобы выполнялись следующие условия: I) в каждой строке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, цвета и типы рамок; 2) каждая буква должна быть раскрашена по разу каждым цветом; 3) рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет (достаточно нарисовать правильную картинку).

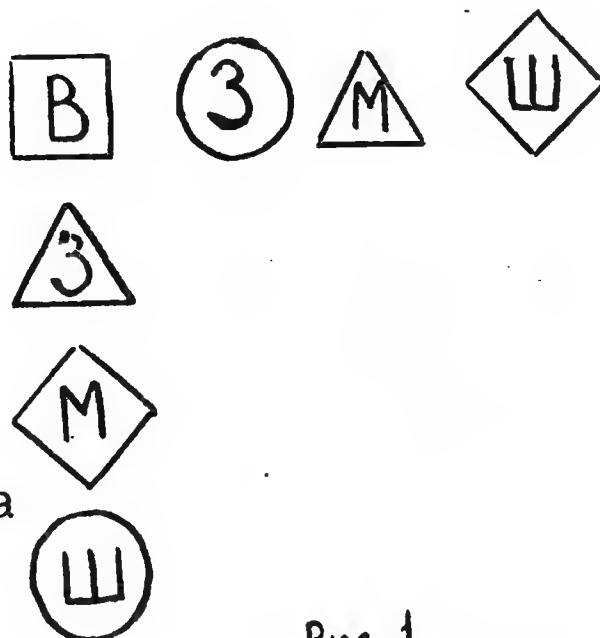


Рис. 1

4. В прямоугольном треугольнике a и b - длины его катетов, c - длина гипотенузы, h - длина высоты, опущенной на гипотенузу. Докажите, что $c+h$ больше $a+b$.

5. Найдите все решения системы уравнений: $x^2 = y^2 + z^2$, $y^2 = x^2 + z^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.

В журнале "Квант" № I за 1977 год вместе третьего уравнения этой системы было опубликовано также: $z^2 = x^2 + y^2$. При проверке вступительных работ допускались оба варианта этой задачи.

6. Даны две непересекающиеся окружности. Существует ли вне окружностей такая точка, что всякая прямая, проходящая через неё, пересекает хотя бы одну из окружностей?

7. Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из A в B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю оставалась треть пути до B. Автомобиль, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: автомобиль в A или велосипедист - в B?

8. Известно, что числа 2077 и 100 при делении на натуральное число a дают одинаковые остатки. Найдите число a .

9. Большой прямоугольник разбит на клетки 1 см x 1 см. Внутри каждой клетки написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строке равна 1, а в каждом вертикальном столбике - равна 2. Может ли площадь прямоугольника быть равна 1976 см²?

10. Несколько одинаковых ящиков весят вместе 10 тонн, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

II. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВСТУПИТЕЛЬНОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

I. Ответ: 1) $\frac{20}{16} = \frac{25}{20}$; $K=2, Y=0, A=5, P=1, E=6$;
2) $\frac{30}{25} = \frac{36}{30}$; $K=3, Y=0, A=6, P=2, E=5$;
3) $\frac{42}{36} = \frac{49}{42}$; $K=4, Y=2, A=9, P=3, E=6$;

Решение: Перепишем данное равенство в виде

$$(KY)^2 = KA \cdot PE \quad (I)$$

Решать эту задачу можно по-разному, но в любом случае решение сводится к некоторому перебору. Перебирать все двузначные числа довольно длинная (хотя и возможная) процедура, поэтому мы постараемся облегчить себе задачу несколькими соображениями.

I) Покажем, что число KY не может делиться на простое число P , больше 10. Действительно, в противном случае (если $KY = a \cdot P$, где $P > 10$ - простое число) число $KA \cdot PE$ делилось бы на число $P^2 > 100$. Тогда (легко следует из равенства (I)) число KA должно было бы делиться на P , то есть $KA = b \cdot P$, но в этом случае $|KY - KA| = |a - b| \cdot P > 10$, что невозможно, так как числа KY и KA - из одного десятка.

2) Покажем, что равенство $KY = P^k$, где P - простое число, невозможно, то есть что число KY не может быть степенью

простого числа P . Действительно, в противном случае, как следует из равенства (1), и число KA должно быть степенью P^m того же простого числа P , что невозможно, так как числа KY и KA — из одного десятка (а при нашем предположении получается, что большее из чисел KA и KY равно меньшему, умноженному на P^{k-m}).

3) нам осталось выписать все двузначные числа, которые из всех простых чисел делятся только на числа 2, 3, 5, 7 и не являются степенями только одного из них. Это числа 12, 14, 15, 16, 20, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 56, 60, 63, 70. Как мы видим, кандидатов осталось немного. Среди них уже легко провести перебор.

2. Ответ: искомое множество — прямая ℓ , проходящая через середины сторон BC и AD данного прямоугольника.

Решение: Из теоремы п. 21 § 3 учебника "Геометрия 6" следует, что если M — точка прямой ℓ , то

$$|MB| = |MC|; |MA| = |MD|;$$

поэтому $|MB| + |MA| = |MC| + |MD|$.

Таким образом, все точки прямой ℓ принадлежат искомому множеству.

Покажем теперь, что на плоскости нет других точек, удовлетворяющих условию.

Прямая ℓ делит плоскость на две полуплоскости. Рассмотрим ту из них, которая содержит точки ℓ и D (см. рис. 2). Тогда,

если $M \notin \ell$, согласно той же теореме,
 $|MB| > |MC|$ и $|MA| > |MD|$,

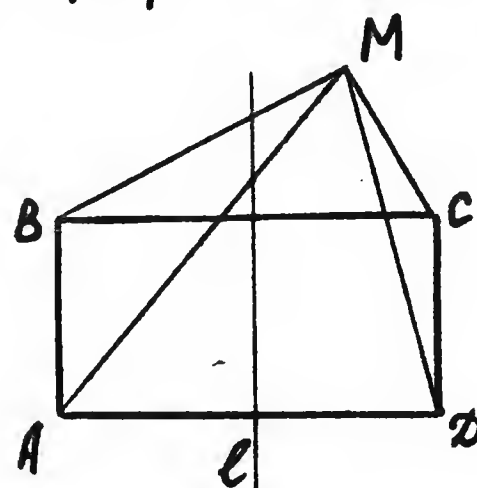


Рис. 2

поэтому $|MD| + |MC| \neq |MB| + |MA|$.

В силу симметрии точки другой открытой полуплоскости также не удовлетворяют условию.

3. Ответ: см. рис. 3; разные цвета, которые мы не можем изобразить, показаны на этом рисунке разной штриховкой клеточек.

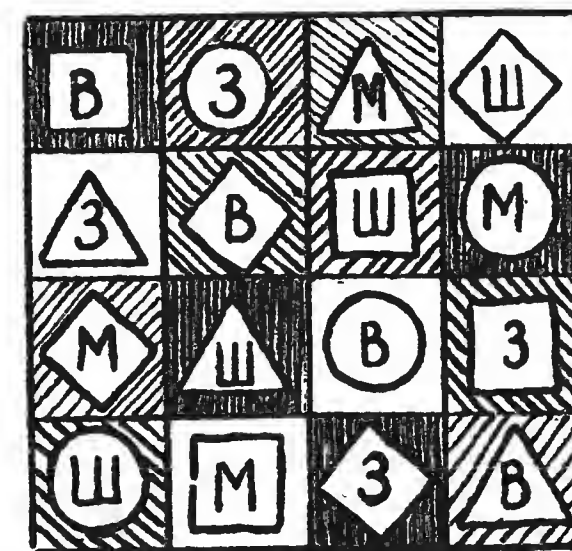


Рис. 3

4. Доказательство. Проведем ряд эквивалентных преобразований, учитывая, что $hc = a \cdot b = 2S$, где S — площадь данного треугольника:

$$c+h > a+b \Leftrightarrow c(c+h-a-b) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 + ab - ac - bc > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c-a)(c-b) > 0,$$

что верно, так как длина гипотенузы больше длин каждого из катетов.

5. Учитывая, что эта задача давалась в двух вариантах (см. сноску на стр. 4), рассмотрим оба случая.

5-1. Пусть
$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ y^2 = x^2 + z^2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0; 0); (1; 1; 0); (0; -1; 1);$

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, складывая первое и третье уравнения и оставляя второе уравнение без изменений, получаем систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+1) = 0, \\ (y+z)(y-z-1) = 0, \\ y^2 = z+x. \end{cases}$$

Из первого уравнения новой системы следует, что либо $x-y=0$, либо $x+y+1=0$. Поэтому рассмотрим два случая:

1)
$$\begin{cases} x-y=0, \\ (y+z)(y-z-1)=0, \\ y^2 = z+x; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ (y+z)(y-z-1)=0, \\ y^2 = z+x. \end{cases}$$

В первом случае:
$$\begin{cases} x=y, \\ y+z=0 \\ y^2 = z+x \end{cases}$$

либо
$$\begin{cases} x=y, \\ y-z-1=0, \\ y^2 = z+x, \end{cases}$$

откуда
$$\begin{cases} x=y=-z, \\ z^2=0. \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} x=y=z+1, \\ z^2=0, \end{cases}$$

и мы получаем два решения: $(0; 0; 0)$ и $(1; 1; 0)$.

Во втором случае аналогично

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ y+z=0, \\ y^2=z+x; \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} y = -z, \\ x = z-1, \\ (z-1)^2 = 0; \end{cases}$$

а так как $(z+1)^2 + 2 > 0$
(0; -1; 1)

5-2. Пусть

$$\begin{cases} x^2 = y+z, \\ y^2 = z+x, \\ z^2 = x^2+y^2. \end{cases}$$

Ответ: (0; 0; 0); (0; -1; 1); (-1; 0; 1); $(1+\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$;
 $(1-\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2})$;

Решение: Вычитая из первого уравнения второе, складывая второе и третье уравнения и сохраняя третье уравнение, получим следующую систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} (x-y)(x+y+1) = 0, \\ (x+z)(z-x-1) = 0, \\ x^2 = x^2+y^2. \end{cases}$$

Рассуждая аналогично случаю 5-1, сведем задачу к рассмотрению четырех возможностей.

1) $\begin{cases} x-y=0, \\ z+x=0, \\ x^2 = x^2+y^2; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y=x, \\ z=-x, \\ x^2 = x^2+x^2; \end{cases}$

что дает решение (0; 0; 0).

2) $\begin{cases} x-y=0, \\ z-x-1=0, \\ z^2 = x^2+y^2; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y=x, \\ z=x+1, \\ x^2-2x-1=0, \end{cases}$

что дает решения $(1 \pm \sqrt{2}; 1 \pm \sqrt{2}; 2 \pm \sqrt{2})$.

3) $\begin{cases} x+y+1=0, \\ z+x=0, \\ z^2 = x^2+y^2; \end{cases}$ откуда $\begin{cases} y = -x-1, \\ z = -x, \\ (x+1)^2 = 0; \end{cases}$ то есть $\begin{cases} y = -x-1, \\ z = -x, \\ x = 1, \end{cases}$

либо $\begin{cases} x+y+1=0, \\ y = z+1, \\ y^2 = z+x; \end{cases}$

либо $\begin{cases} y = z+1, \\ x = -z-2, \\ (z+1)^2 + 2 = 0; \end{cases}$

, то мы получаем еще одно решение

что дает решение (-1; 0; 1).

4) $\begin{cases} x+y+1=0, \\ z-x-1=0, \\ z^2 = x^2+y^2; \end{cases}$

откуда

$$\begin{cases} y = -x-1, \\ z = x+1, \\ x = 0, \end{cases}$$

что дает решение (0; -1; 1).

6. Ответ: существует.

Решение. Проведем общие внешние и внутренние касательные двух данных окружностей. Из кусков, на которые эти прямые разбили плоскость, выберем такие четыре "треугольника", у каждого из которых одна "сторона" - дуга окружности, вторая - отрезок внешней касательной, третья - отрезок внутренней касательной

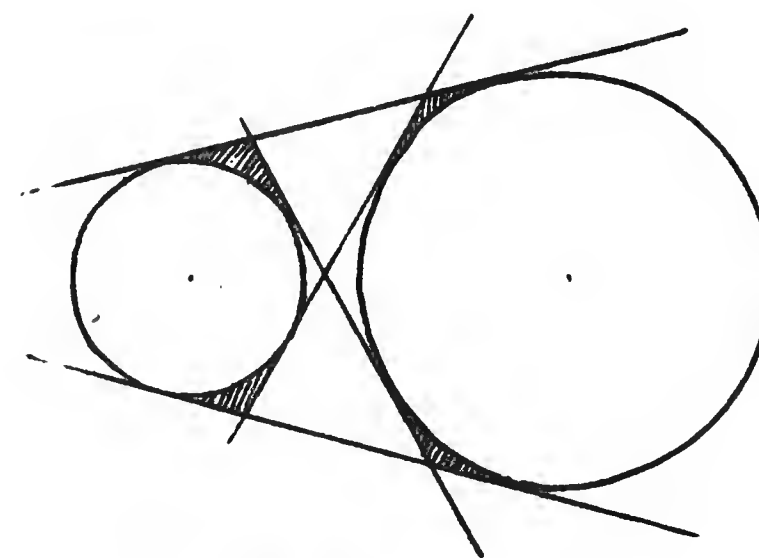


Рис. 4

(на рис. 4 эти "треугольники" закрашены). Все точки внутри этих "треугольников" удовлетворяют условию, так как если прямая пересекает одну сторону "треугольника", то она должна пересечь и другую.

7. Ответ: велосипедист приедет раньше.

Решение. Так как велосипедист проехал $\frac{1}{3}$ пути быстрее, чем автомобиль $\frac{2}{3}$ пути, то велосипедист проедет оставшиеся ему $\frac{2}{3}$ пути быстрее, чем автомобиль $\frac{4}{3}$ пути.

8. Ответ: $a = 3$ или $a = 659$.

Решение. По условию, $2077 = am + 2$ и $100 = an + 2$, где $0 \leq 2 < a$. Следовательно, $2077 - 100 = a(m - n)$, то есть 1977 делится на a . Поскольку $1977 = 3 \cdot 659$, причем 659 - простое число, то a равно либо 3, либо 659.

Действительно,

$$2077 = 3 \cdot 659 + 100 \text{ и } 100 = 0 \cdot 659 + 100;$$

$$2077 = 659 \cdot 3 + 1 \text{ и } 100 = 33 \cdot 3 + 1.$$

9. Ответ: не может.

Доказательство. Пусть размеры прямоугольника $m(\text{см}) \times n(\text{см})$. Очевидно, что m и n - целые числа, так как его можно разбить на клетки 1 см \times 1 см.

Подсчитаем сумму P всех чисел, написанных в клетках, двумя способами: по строкам и по столбцам.

Поскольку сумма чисел в каждой строчке равна 1, а всего строчек — m штук, то $P = m$.

Так как сумма чисел в каждом столбце равна 2, а всего столбцов — n штук, то $P = 2n$.

Итак, $m = 2n$, поэтому площадь прямоугольника равна $m \cdot n = 2n^2$, где n — натуральное число. Но $1976 \neq 2n^2$, так как $988 \neq n^2$ ни при каком натуральном n .

10. Ответ: 5 трехтонок.

Решение. Покажем сначала, что 4-х трехтонок может не хватить. Так будет, если, например, имеется 13 одинаковых ящиков весом по $\frac{10}{13}$ тонны. Тогда в одну трехтонку мы не можем поместить больше трех ящиков.

Докажем теперь, что 5-ти трехтонок всегда хватает. Действительно, в каждую трехтонку мы всегда можем загрузить не меньше двух тонн груза (если загрузить меньше двух тонн, то поскольку до полной загрузки одной машины осталось больше тонны, а каждый ящик по условию весит не больше тонны, мы сможем добавить еще ящик с грузом). Тогда в 5-ть трехтонок можно загрузить не меньше 10 тонн груза.

III. ЗАДАНИЕ № 1 ДЛЯ ПРИНЯТЫХ В ВЗМШ

1. Пусть c — длина стороны тупоугольного треугольника, лежащей против тупого угла, h — длина высоты, опущенной на эту сторону, a и b — длины двух других сторон. Докажите, что $c + h > a + b$.

Указание. Воспользуйтесь результатом задачи № 4 из I раздела.

2. Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3(x + y), \\ x^3 - y^3 = 7(x - y). \end{cases}$$

Указание. Внимательно просмотрите решение задачи № 5 из I раздела. Следите за тем, чтобы не потерять решения! В ответе должно быть 9 решений.

3. Пусть O — центр правильного треугольника ABC . Найдите множество точек M плоскости этого треугольника, удовлетворяющих такому условию: всякая прямая, проходящая через точку M , пересекает хотя бы один из отрезков AB и CO .

Указание. Просмотрите решения задач № 2 и 6 из I раздела.

4. Трех рабочим поручили выкопать канаву. Сначала первый работал столько времени, сколько понадобилось бы второму и третьему, чтобы вдвоем выкопать половину канавы, затем второй работал столько времени, сколько понадобилось бы первому и третьему, чтобы выкопать половину канавы, потом третий рабочий закончил работу за время, за которое первый и второй выкопали бы вместе половину канавы. Во сколько раз быстрее они выкопали бы эту канаву, работая вместе?

5. Было 6 кусков бумаги. Некоторые из них разрезали на 6 кусков каждый. Затем некоторые из получившихся кусков снова разрезали на 6 кусков; и так сделали несколько раз. Могло ли в результате получиться 1977 кусков?

Указание. Как возрастает число кусков, когда один из них разрезают на 6?

6. Большой прямоугольный параллелепипед разбит на кубики $1 \text{ см} \times 1 \text{ см} \times 1 \text{ см}$. Внутри каждого кубика написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждом вертикальном столбце равна 1, а в каждом горизонтальном столбце — равна 2. Может ли площадь прямоугольника, лежащего в основании параллелепипеда, быть равна 10^{1977} см^2 ?

Указание. См. решение задачи № 9 из I раздела.

7. Имеется много одинаковых правильных треугольников. Вершины каждого занумерованы в произвольном порядке числами 1, 2 и 3 (разные вершины — разными числами). Треугольники сложены произвольным образом в треугольную стопку и нашли суммы номеров вершин, попавших в каждый из трех углов стопки. Может ли сумма номеров в каждом углу стопки равняться: а) 25; б) 50?

Указание. См. решение задачи № 9 из I раздела.

8. Можно ли увезти 50 камней, веса которых равны 370 кг, 372 кг, 374 кг., 376 кг., ..., 468 кг, на семи трехтонках?

IV. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

А. Задачи на построение.

В задачах № 1–9 требуется построить треугольники по указанным данным. Для сокращения углы его обозначены через A, B, C , противолежащие стороны — через a, b, c ; проведенные к этим сторонам высоты — через h_a, h_b, h_c ; медианы — через m_a, m_b, m_c , биссектрисы — через $\beta_a, \beta_b, \beta_c$; периметр — через P .

1. a, b, m_a .
2. b, c, h_a .
3. a, h_a, m_a .
4. h_a, β_a, A .
5. $a, b+c, A$.
6. B, c, P .
7. $a, c-b, B$.
8. $a, c-b, c$.
9. $b, c, c-B$.

Б. Разные задачи.

10. а) Сколько есть положительных чисел, меньших 100, цифры которых расположены в возрастающем порядке?

Примечание: числа, меньшие 10, записываются с 0 впереди. Например, 9 записывается 09.

б) Сколько есть положительных целых чисел, меньших 100, цифры которых расположены в убывающем порядке?

в) Сколько есть положительных целых чисел, меньших 100, цифры которых расположены в неубывающем порядке?

г) Сколько есть положительных целых чисел, меньших 100, цифры которых расположены в невозрастающем порядке?

11. Сколько есть целых неотрицательных чисел, меньших 100, цифры которых расположены в возрастающем порядке?

12. Ответьте на вопросы б) и в) задачи 10 для положительных целых чисел, меньших 10000.

13. Дан треугольник ABC , причем угол A больше или равен углу B , угол B больше или равен углу C . Возможно ли, что:

- а) $A = 75^\circ$? $A = 50^\circ$?
- б) $B = 80^\circ$? $B = 95^\circ$?
- в) $C = 75^\circ$? $C = 50^\circ$?

14. а) В каких пределах может меняться наибольший угол треугольника? (для каких \angle существует треугольник, у которого самый большой угол равен \angle ?).

б) В каких пределах может меняться средний по величине угол треугольника?

в) В каких пределах может меняться наименьший угол треугольника?

15. а) Дан квадрат. Найдите множество точек, расстояние от которых до центра квадрата меньше, чем от каждой из его вершин.

б) Дан квадрат $ABCD$. Найдите множество точек внутри квадрата, которые ближе к стороне AB , чем к сторонам BC , CD , AD .

16. Имеется 7 точек. Каждая пара из них соединена либо синей дугой, либо красной. Всегда ли можно выбрать из этих точек такие три, что все дуги, соединяющие их друг с другом, будут одного цвета?

17. Тот же вопрос для 4 точек.

18. Решите задачу 16, если имеется 5 точек.

19. Решите задачу 16, если имеется 6 точек.

20. Пусть каждая пара из 6 точек соединена красной или синей дугой. Всегда ли можно найти два треугольника, образованные дугами одного цвета (разрешается, чтобы эти два треугольника имели общую дугу)?

21. В компании из 6 человек некоторые знакомы друг с другом. Докажите, что в этой компании либо 3 незнакомых друг с другом человека, либо 3 попарно знакомых.

22. Про два неотрицательных числа A и B известно, что $A+B=1$ и $A \geq B$. Какие значения может принимать A ? Более точно, для каких неотрицательных чисел A можно найти неотрицательное число B , чтобы $A+B=1$ и $A \geq B$? Укажите все такие A .

23. A, B, C — неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям: $A \geq B \geq C$, $A+B+C=1$. Каково множество допустимых значений A ?

24. 9 одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же книг — 15 рублей с копейками. Определите точную стоимость одной книги.

25. Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы? Более точно, концы отрезка длиной d скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка?

26. Точка B лежит на отрезке AC . Найдите множество точек M , для которых $MBC = 2 MAC$.

27. Даны две точки на расстоянии 1 друг от друга. Найдите множество точек M , расстояния от которых до каждой из точек A и B выражаются целыми числами.

28. а) Сколько острых углов может иметь выпуклый 5-угольник? Перечислите все возможности.

б) Какое вообще число острых углов может иметь выпуклый n -угольник? Предостережение: ответ на вопрос зависит от n .

29. На плоскости даны 5 попарно непараллельных прямых. Докажите, что среди них найдутся две прямые, угол между которыми не больше 36° .

30. Имеется многочлен. Для краткости обозначим его через $P(x)$. (Например, $P(x) = x^2 + x - 1$, $P(x) = x^2 - 5$).

а) Пусть $P(x) = x^2 + 1$. Найдите $P(x+1)$, $P(\frac{x+1}{x})$.

б) Для любого многочлена $P(x)$ положим $P_1(x) = P(x+1) - P(x)$, $P_2(x) = P_1(x+1) - P_1(x)$, $P_3(x) = P_2(x+1) - P_2(x)$ и т.д.

Пусть $P(x) = x^2$. Найдите $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$.

в) $P(x) = x(x-1)$. Найдите $P_1(x)$ (см. пункт б)).

г) $P(x) = x(x-1)(x-2)$. Найдите $P_1(x)$.

д) $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Найдите $P_1(x)$.

е) $P(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-n)$. Найдите $P_1(x)$.

31. Решите системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Найдите x и y .

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Найдите x и y .

Не бойтесь скучных выкладок. У этой задачи красивый ответ.

32. Можно ли расположить на плоскости шесть точек и соединить их отрезками так, чтобы каждая точка была соединена отрезками с четырьмя другими точками и отрезки не пересекались друг с другом?

33. После окончания спектакля "Ревизор" на сцене Бобчинский и Добчинский начали препираться по поводу того, кто первый сказал "Э".

Бобчинский: Это вы, Петр Иванович, первый сказал "Э!". Вы сами так раньше говорили.

Добчинский: Нет, Петр Иванович, я так не говорил. Это Вы семгу первый заказали. Вы и сказали "Э!". А у меня зуб во рту со свистом.

Бобчинский: Что я семгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. Но-все-таки это Вы первый сказали "Э!".

Выясните, кто первый сказал: "Э!", если известно, что из девяти произнесенных в этом разговоре фраз нечетное число верных.

34. Найдите четыре числа, если известно, что произведение любых трех из них на 120 больше оставшегося числа.

35. Докажите, что если в треугольнике совпадают какие-нибудь две точки из следующих трех: 1) центр вписанного круга; 2) центр описанного круга; 3) точка пересечения медиан, то треугольник равнобедренный.

36. Четыре девочки: Катя, Лена, Маша и Нина - участвовали в конкурсе. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен - больше, чем все остальные, а Лена - 5 песен - меньше, чем все остальные. Сколько песен было спето?

37. Верно ли, что при любом натуральном n число $n^4 + (n+1)^4$ простое?

38. Найдите величину угла B в треугольнике ABC , если длина высоты (CH) вдвое меньше длины стороны (AB) , а величина угла A равна 75° .

39. Допишите к числам 10, 12, 15 ещё семь гелых чисел так, чтобы наибольший общий делитель любых двух из десяти написанных чисел встречался среди них и чтобы наименьшее общее кратное любых двух из написанных чисел тоже встречалось среди этих чисел.

40. Докажите, что если $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$, то какие-то два из трех чисел a, b, c равны друг другу.

41. Найдите все значения p и q , при которых многочлен $x^4 + px^3 + 17x^2 + qx + 16$ может быть представлен в виде квадрата некоторого квадратного трехчлена от x .

42. Элементами множеств A , B и C служат числа $1, 2, 3, \dots, 9$. Известно следующее:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1; 2\}, & A \cup B &= \{1; 2; 3; 6; 7; 8\}, \\ B \cap C &= \{3; 7\}, & A \cup C &= \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}. \end{aligned}$$

Найдите множества A , B и C . (Здесь $A \cap B$ - пересечение множеств A и B , $A \cup B$ - объединение этих множеств).

43. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки O на угол 48° она переходит в себя.

Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол: а) 90° ; б) 72° ?

44. Разложите многочлены на множители:

а) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6$;
 б) $x^4 - 23x^3 + 173x^2 - 493x + 462$.

Решите уравнения:

в) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0$,
 г) $x^4 - 23x^3 + 173x^2 - 493x + 462 = 0$.

45. Докажите, что $4n^4 + 1$ — составное число, где n — натуральное число, большее 1.

46. Про некоторую фигуру на плоскости известно, что при повороте вокруг точки O на угол в 19° она переходит в себя. Можно ли утверждать, что она переходит в себя при повороте вокруг точки O на угол в 61° ?

47. Вычеркните из множества чисел 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 три числа так, чтобы *множество из оставшихся чисел обладало* следующими свойствами: НОД любых двух его чисел встречался среди чисел этого множества и НОК любых двух его чисел тоже встречался среди чисел этого множества.

48. Какие из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 входят в множества A, B, C, D , если известно следующее: $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$;
 $A \cap C = \{8\}$; $A \cup D = \{1, 2, 5, 6, 8, 9\}$; $A \cap D = \{2, 5, 9\}$;
 $B \cup C = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B \cap C = \{6\}$.

49. Угол между осями симметрии фигуры равен 30° . Совпадает ли она сама с собой при повороте вокруг точки пересечения этих осей на угол: а) 60° ; б) 30° ?

50. В делении, выполненном столбиком, все цифры, кроме цифр частного, заменены буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными. Цифры частного заменены вопросительными знаками.

СВИНИКА	ПУСТО
СААВСК	???
— ООАЛОК	
— ПУСТО	
ТУНППА	
— УАПОКТ	
СУИКО	

а) Какие буквы соответствуют цифрам частного?

б) Восстановите все цифры, если известно, что буква **С** заменена цифра 7.

51. Можно ли построить на плоскости замкнутую самопересекающуюся ломаную линию, пересекающую каждое свое звено ровно один раз: а) из 1976 звеньев; б) из 1977 звеньев? (Вершины ломаной не могут лежать на других её звеньях).

52. Расстояние от пункта **А** до пункта **В** кратно 5 км. Автобус едет от **А** до **В** со скоростью 60 км/час. Через каждые 5 км он делает остановку на 5 мин. Велосипедист проехал от **А** до **В** с постоянной скоростью за 1 час. В пути его обогнал автобус, *потом он* проехал мимо этого автобуса, стоящего на остановке, потом автобус снова его обогнал, и больше он с этим автобусом не встречался. Потратил ли автобус на путь из **А** в **В** 45 мин. или больше?

53. Можно ли расставить девять чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась на 3, и была: а) больше 9; б) больше 12?

54. Дан прямоугольник с углом между диагоналями в 30° и квадрат со стороной, равной половине диагонали этого прямоугольника.

а) Докажите, что площади этих фигур равны.

б) Разрежьте прямоугольник на такие части, из которых, перевернув их, можно сложить квадрат.

55. На доске были написаны 4 числа. Их сложили всевозможными способами по два и получили следующие шесть сумм: 2, 4, 9, 9, 14, 16. Какие числа были написаны на доске?

56. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ число $n^8 + n^4 + 1$ — составное.

57. На сколько частей могут делить плоскость 4 различные прямые? (Укажите все возможные значения и нарисуйте примеры).

58. По дороге едет телега. Диаметр её колес — 1 метр. В одно колесо вбит гвоздь. Каждый раз, когда гвоздь ударяется о *дорогу* раздается щелчок. Щелчки повторяются каждую секунду. С какой скоростью едет телега?

59. Три прямые пересекаются в одной точке так, что каждые две из них образуют угол 60° . Точка **М** находится на расстоянии 3 см от одной прямой и на расстоянии 5 см — от другой. На каком расстоянии от третьей прямой может находиться точка **М**?

60. Какую цифру означает каждая из букв М, И, Л, А, Н в равенства $НАЛИМ \times 4 = ЛИМАН$?

61. Какое наибольшее число точек самопересечения может иметь

замкнутая ломаная линия, состоящая из 7 звеньев:

62. Сколько существует пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих неравенству $2^x + 2^y < 2^{1976}$?

63. Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/ч, под гору: дедушка — 8 км/ч, внук — 20 км/ч; в гору: дедушка — 6 км/ч, внук — 4 км/ч. Оба проехали по одному и тому же маршруту. Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, — если первым вернулся а) внук; б) дедушка?

64. Сколько сторон может иметь многоугольник, являющийся а) пересечением; б) объединением треугольника и выпуклого четырехугольника? (Укажите все возможные значения и нарисуйте примеры).

65. Можно ли вписать в клетки таблицы 3×3 числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы каждые два числа, стоящие в соседних клетках, отличались не больше, чем на 2? (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону).

66. Можно ли разрезать квадрат на несколько остроугольных треугольников?

67. Найдите три числа, каждое из которых равно квадрату разности двух других.

68. Докажите, что при любом натуральном $n > 1$ число $n^5 + n^4 + 1$ — составное.

69. На плоскости нарисованы три конгруэнтных отрезка. Сколько осей симметрии может иметь это множество (Объединение данных трех отрезков)?

70. Укажите три последние цифры суммы $1^{100} + 2^{100} + 3^{100} + 4^{100} + \dots + 999998^{100} + 999999^{100}$.

Оглавление

	Стр.
Предисловие	I
I. Вступительная контрольная работа в ВЭМШ 1977 года	2
II. Решения задач вступительной контрольной работы	3
III. Задание № I для принятых в ВЭМШ	8
IV. Задачи для самостоятельного решения	9

Подписано к печати 23.П.1977 г.

Формат 60 x 90 1/16

Объем I п. л.

Заказ 1650

Тираж 5000 экз.

Отпечатано на ротапринте Института механики МГУ

Иванов А.Г.
119270, 3-ая Фрунзенская, д. 9, кв. 313

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ
РАЗРАБОТКИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Подписано к печати 4.УП.1979 г.
Формат 60 x 90 1/16 Объем 0,75 л.
Заказ 2205 Тираж 500 экз.
Отпечатано на ротационной машине Института механики
МГУ

Москва - 1979

П р е д и с л о в и е

Вы приняты в МММФ – "малый механико-математический факультет". МММФ – отделение Всесоюзной Заочной Математической школы При МГУ. Все учащиеся ВЗМШ из 48 областей РСФСР, в том числе и из Вашей области, обучаются на малом мехмате. Выпускников малого мехмата мы с удовольствием будем видеть и на самом механико-математическом факультете. Это, конечно, не значит, что все учащиеся МММФ в дальнейшем пойдут учиться на мехмат МГУ – математика нужна и будущему биологу и будущему экономисту. Квалифицированный токарь или тракторист также найдет в математике доброго помощника. Обучаясь на Малом мехмате, Вы сможете узнать не только о математике, но и о нашем университете, о его студентах и ученых.

В течение трех лет мы будем посылать Вам задания и пособия для самостоятельных занятий. Занятия в МММФ потребуют от Вас внимания и настойчивости, и, как мы надеемся, помогут глубже усвоить школьный курс математики, а также дополнят и расширят Ваши знания в различных областях элементарной математики.

Мы будем стремиться к тому, чтобы от сравнительно простых задач и упражнений постепенно переходить к более сложным задачам, чтобы помочь Вам овладеть красивыми и сильными приемами решения задач, научить строго и точно излагать доказательства математических фактов.

Главное для Вас – последовательность, настойчивость, желание работать.

В первом разделе этого выпуска помещены задачи для семиклассников, поступивших в ВЗМШ АПН СССР при МГУ в 1979 году.

Во втором разделе даны решения вступительных задач. Изучите их, проанализируйте свои ошибки. Обратите внимание на то, как оформлено решение – Вы должны научиться также оформлять свои решения. Советуем проработать эти решения даже тем, кто решил задачи, чтобы узнать, возможно, какие-то новые идеи или приемы, научиться четкости в записи, а также, увидеть свои недочеты.

Третий раздел – первое задание для тех, кто получил извещение о приеме в МММФ.

Вступительную работу составили: И.Н.Бернштейн, Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ, А.Л.Тоом. II раздел написан А.Л.Тоомом, Н.Б.Васильевым, В.Л.Гутенмахером, Ж.М.Работом. III и IV разделы составлены А.А.Панчишкиным и Е.Т.Шавгулидзе.

Необходимые сведения об оформлении работ, присылаемых на проверку в МММФ, изложены в "Инструкции".

Желаем успехов !

I. Задачи вступительной контрольной работы В ВЗМШ в 1979 г.

1. Точки A, B, C являются вершинами неравностороннего прямоугольного треугольника. Сколькими способами можно поставить на плоскости точку D , так, чтобы множество точек $\{A, B, C, D\}$ имело:
а) центр симметрии; б) ось симметрии? в) Изменяются ли ответы на вопросы а) и б), если в условии задачи заменить слово "прямоугольного" на слово "непрямоугольного" ?
2. Рассмотрим всевозможные девятизначные числа, в записи которых каждая из цифр $1, 2, 3, \dots, 9$ встречается по одному разу. Определите наибольший общий делитель этих чисел.
3. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если у них общая сторона).
4. Андрей бежит на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова не прибежали все трое в одно место. За это время Женья обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было за это время обгонов ?
5. В одну строчку выписали 25 чисел. Сумма любых трех соседних чисел положительна. Может ли при этом сумма всех 25 чисел быть отрицательной ?
6. Найдите все пары целых чисел $\{m, n\}$, для которых выполняется равенство $m^2 + 1 = 2^n$.
7. Рассмотрим на плоскости многоугольник, являющийся объединением трех параллелограммов: $OAMB$, $OBKC$, $OCMA$.
а) Обязательно ли этот многоугольник выпуклый ?
б) Сколько сторон может иметь этот многоугольник ?
в) Какой периметр может иметь этот многоугольник, если $|OA| + |OB| + |OC| = 1$?
8. Загаданы два целых положительных числа. Математику А сообщена их сумма, а математику В – сумма их квадратов. Если А и В соединят свои знания, то они, конечно, определят оба числа. Но они узнали эти числа в процессе следующего разговора:
В. – Я не знаю, какие это числа.
А. – Их сумма больше десяти.
В. – Тогда я знаю, какие это числа.
Найдите и Вы эти числа.

9. можно ли нарисовать на плоскости прямоугольник $ABCD$ и точку M так, расстояния от точки M до точек A, B, C и D равны соответственно: а) 1, 2, 3 и 4; б) 1, 4, 8 и 7?
10. Имеются два автомата. Если в первый из них бросить 5 копеек, то он умножит данное ему число на 3. Если во второй автомат бросить 2 копейки, то он прибавит к данному ему числу число 4. Какую минимальную сумму денег надо иметь, чтобы с помощью этих автоматов получить из данного числа 1 число 1979?

II. Решения задач вступительной работы.

- I. а) Ответ: 3 способа.

Решение. Пусть точка D поставлена так, что множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет центр симметрии. Центр симметрии не может совпадать ни с одной из этих 4 точек, так как тогда остальные три не могли бы разбиться на взаимно-симметричные пары точек.

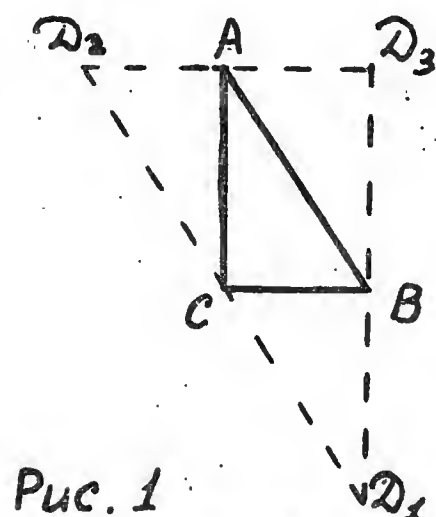


Рис. 1

Чтобы какие-то две из данных точек были симметричны друг другу, надо, чтобы центр симметрии был серединой отрезка, соединяющего эти две точки. Поэтому центр симметрии нашего множества — середина одного из трех отрезков: AB , BC или CA . В каждом из этих трех случаев точка D определяется однозначно — см. рис. 1, там соответствующие три точки D_1 , D_2 и D_3 образуют прямоугольный треугольник, в котором данные точки A, B и C образуют три средних линии.

- б) Ответ: 5 способов

Решение. Пусть точка D поставлена так, что множество точек $\{A, B, C, D\}$ имеет ось симметрии. Тогда вне этой оси может лежать лишь четное количество из этих четырех точек (то есть четыре, две или нуль), иначе они не смогут разбиться на пары взаимно-симметричных. Рассмотрим все три возможности.

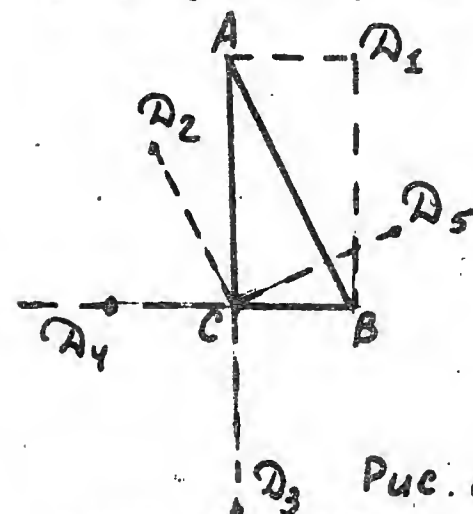


Рис. 2

I) Все четыре точки лежат вне оси. Тогда ось — серединный перпендикуляр к одной из сторон треугольника ABC , а точка D симметрична противоположной этой стороне вершине. Таким образом мы получаем два способа поставить точку D — точки

D_1 и D_2 на рис. 2 (серединные перпендикуляры к катетам AC и BC дают нам одну и ту же точку D_1 , так как эти перпендикуляры являются осями симметрии прямоугольника $BCAD_1$).

2) Две точки нашего множества лежат вне оси. В этом случае точка D лежит вне оси, так как одна из вершин треугольника ABC лежала бы на серединном перпендикуляре к противоположной ей стороне, то есть треугольник ABC был равнобедренным, что противоречит условию. Итак, в этом случае ось симметрии нашего множества проходит через две точки из трех точек A, B, C , а точка D симметрична третьей из этих точек относительно оси. Мы получим еще три способа поставить точку D (точки D_3, D_4 и D_5 на рис. 2)

3) Ни одна из точек нашего множества не лежит вне оси. Это значит, что все они лежат на оси, в частности, на этой оси лежат точки A, B и C , но это невозможно по условию. Итак, в этом случае наша задача не имеет решений.

Легко убедиться, что все пять полученных точек D_1, D_2, \dots, D_5 отличны друг от друга.

в) Ответ на вопрос а) не изменится. Ответ на вопрос б) изменится будет таков: 6 способов.

Решение: точно такое же, как в пунктах а) и б), но в случае I) пункта б) серединные перпендикуляры к отрезкам AB, BC и CA дадут три различные точки.

2. Ответ: НОД = 9.

Решение. По признаку делимости на 9, все эти числа делятся на 9, так как сумма цифр каждого из них равна $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ и поэтому делится на 9. Поскольку все числа делятся на 9, то для их наибольшего общего делителя (обозначим его через x) справедливо неравенство $x \geq 9$ (1).

Поскольку все данные числа делятся на x , то и разность любых двух из них также делится на x . Рассмотрим два таких числа, у которых все цифры, кроме двух последних, совпадают, а две последние цифры одного из них 21, а другого — 12. Разность этих чисел равна 9 и должна делиться на x , поэтому справедливо неравенство $9 \geq x$ (2). Из неравенств (1) и (2) имеем: $x = 9$.

3. Ответ: нельзя.

Решение: способом "от противного". Допустим, что 25 клеток закрашены так, что у каждой из них нечетное число закрашенных соседей. Назовем всякую общую сторону двух закрашенных клеток "двойной". Итак, пусть у каждой из 25 закрашенных клеток

нечетное число "двойных" сторон (на рис. 3 закрашено 8 клеток, их "двойные" стороны отмечены белыми дугами). Напишем в каждой закрашенной клетке число её "двойных" сторон. Вычислим сумму написанных чисел двумя способами.

С одной стороны, эта сумма нечетна, так как эта сумма двадцати пяти нечетных чисел, написанных в клетках.

С другой стороны, эта сумма — удвоенное число "двойных" сторон, поэтому она четна.

Полученное противоречие и доказывает утверждение задачи.

4. Ответ: 25 обгонов.

Решение. Те 13 моментов времени, когда Женя обгонял Витю, разбивают все время их движения на 14 промежутков, и за каждый из этих промежутков Женя опережал Витю ровно на один круг. Значит, Женя пробежал на 14 кругов больше, чем Витя. (Заметим, что число кругов, которое пробежал каждый из них, не обязательно целое).

Иными словами, если A — число кругов, которое пробежал Андрей, B — Витя, J — Женя, то $J - B = 14$. Кроме того $B < A < J$. Аналогично получается, что Андрей обогнал Витю $(A - B - 1)$ раз, а Женя обогнал Андрея $(J - A - 1)$ раз. Поэтому общее число обгонов равно

$$13 + (A - B - 1) + (J - A - 1) = (J - B) + 11 = 25.$$

5. Ответ: может.

Решение. Пример: $-9; 5; 5; -9; 5; 5; -9; 5; 5; \dots; -9$. Здесь 16 чисел равны 5 и 9 чисел равны (-9) . Очевидно, что сумма любых трех соседних чисел равна 1, а сумма всех 25 чисел равна (-1) .

Замечание. Когда доказываешь, что нечто возможно, достаточно привести пример.

6. Ответ: три пары: $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$.

Решение. Если $n < 0$, то равенство невозможно, так как его правая часть меньше 1, а левая — не меньше 1.

Если $n = 0$, то, очевидно, $m = 0$.

Если $n > 0$, то, очевидно, что m — нечетное число, то есть

$$m = 2k + 1, \text{ тогда данное равенство принимает вид } 4k^2 + 4k + 2 = 2^n$$

Если $n = 1$, то $k = 0$ или $k = -1$.

Если $n > 1$, равенство невозможно, так как его правая часть делится на 4, а левая — нет.

7. а) Ответ: не обязательно.

Решение: Пример невыпуклого многоугольника показан на рис. 4 (на этом рисунке он заштрихован).

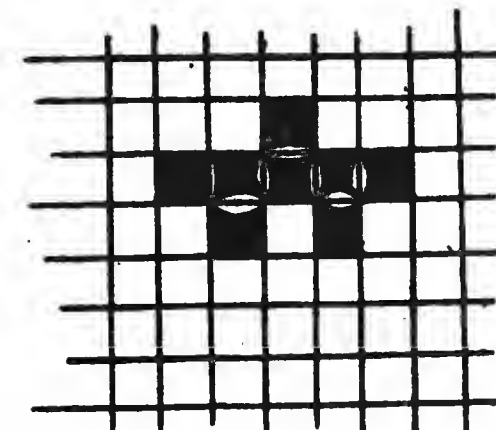


Рис. 3

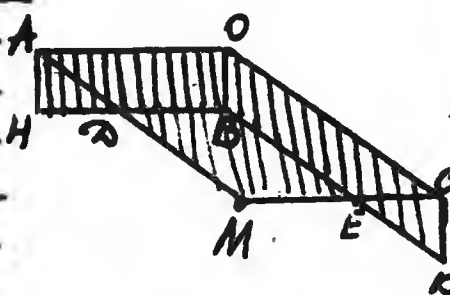


Рис. 4

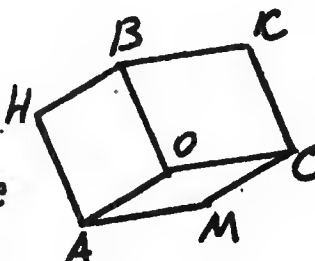


Рис. 5

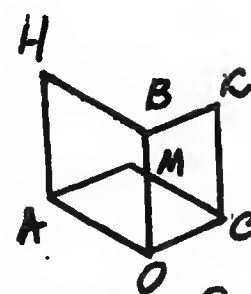


Рис. 6

б) Ответ: 6 или 8 сторон.

Решение. Возможны только три случая.

1) Все три параллелограмма не налегают друг на друга (см. рис. 5). В этом случае, очевидно, 6 сторон.

2) Один параллелограмм налегает на два других и полностью покрывается ими (см. рис. 6). Здесь, очевидно, также 6 сторон.

3) Один параллелограмм налегает на два других и неполностью покрывается ими (см. рис. 4). Тогда 8 сторон.

в) Ответ: периметр равен 2.

Решение. В случаях 1) и 2) (пункта б), доказательство очевидно. В случае 3) надо лишь заметить, что четырехугольник $BEMD$ на рис. 4 — тоже параллелограмм, откуда легко получается, что периметр в этом случае равен 2.

8. Ответ: числа равны 4 и 7.

Решение. Пусть x и y — искомые числа, причем $x + y = n$, $x^2 + y^2 = p$. Тот факт, что B , зная p , не знал x и y , означает, что число p неединственным образом представляется в виде суммы двух квадратов.

Узнав, что $n > 10$, B смог определить x и y . Это означает, с одной стороны, что p единственным образом представляется в виде суммы квадратов двух чисел, сумма которых больше 10, и, с другой стороны, что число p к тому же представляется в виде суммы квадратов двух таких чисел, сумма которых не больше 10.

Итак мы получили:

с одной стороны, число p представляется в виде $x_1^2 + y_1^2$, где $x_1 + y_1 > 10$, поэтому $p = x_1^2 + y_1^2 > \frac{1}{2}(x_1 + y_1)^2 > 50$; с другой стороны, число p представляется в виде $x_2^2 + y_2^2$,

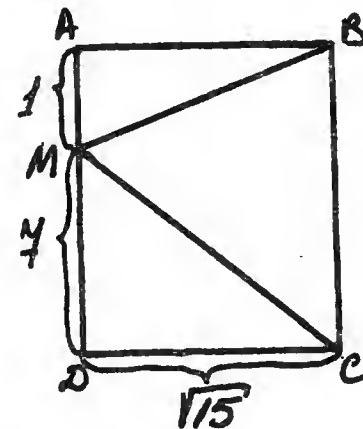
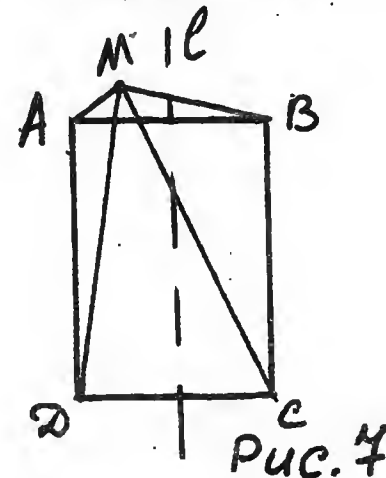
где $x_2 + y_2 \leq 10$, поэтому $p = x_2^2 + y_2^2 < (x_2 + y_2)^2 \leq 100$.

Выписав все числа p , расположенные между 50 и 100, представимые в виде суммы двух квадратов нужным образом, найдем, что лишь одно из них допускает нужное представление:

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2.$$

9. а) Ответ: нельзя.

Решение. Предположим, что нам удалось нарисовать прямоугольник ABC и точку M так, что $|AM| = 1$, $|BM| = 2$, $|CM| = 3$, $|DM| = 4$. Проведем ось симметрии ℓ прямоугольника – серединный перпендикуляр к отрезкам AB и CD (см. рис. 7).



Прямая ℓ делит плоскость на две полуплоскости: левую (содержащую точки A и D) и правую (содержащую точки B и C). Из того, что $|AM| < |BM|$ следует, что точка M должна лежать в левой полуплоскости (где находятся все точки, расположенные ближе к точке A, чем к точке B), а из того, что $|DM| > |CM|$, – что в правой. Полученное противоречие приводит к ответу.

б) Ответ: можно.

Решение. Пример изображен на рис. 8.

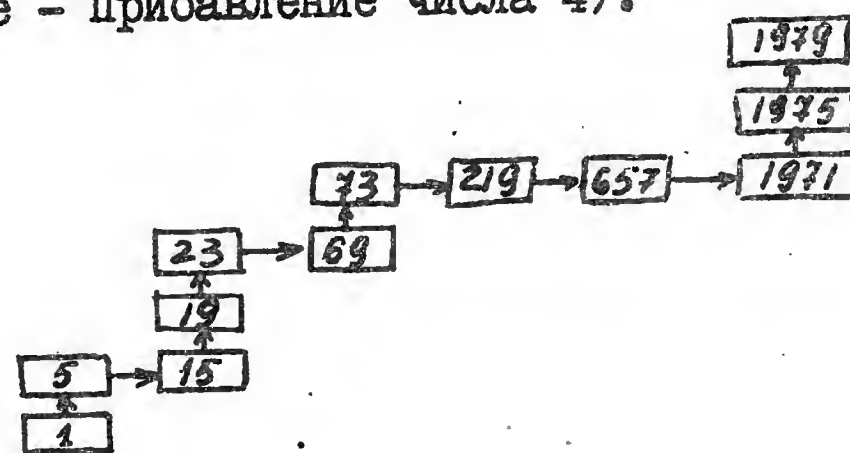
Замечание. Условие разрешимости нашей задачи в общем случае:

$$|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2.$$

(это легко доказать, например, с помощью метода координат).

10. Ответ: 37 копеек.

Решение. Покажем сначала, что на 37 копеек можно из числа I получить число 1979. Это следует из схемы, изображенной на рис. 9. (горизонтальные стрелки означают умножение на 3, а вертикальные – прибавление числа 4).



Решения задач задания № I Вы должны оформить в соответствии с присланной "Инструкцией" и выслать в МММФ не позднее I-го октября 1979 года по адресу: Москва, В-234, Ленинские Горы, МГУ, мехмат, МММФ.

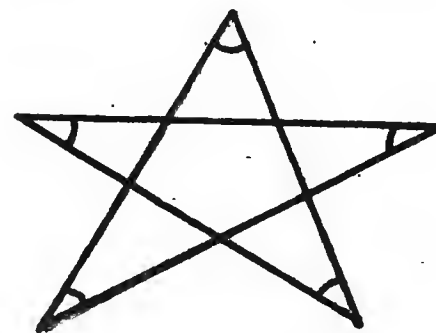
1У. Задачи для самостоятельного решения.

1.1. Внутри треугольника ABC берется произвольная точка O. Доказать, что имеет место неравенство

$$\frac{P}{2} < |OA| + |OB| + |OC| < P$$

где P - периметр треугольника. (Геом. п.7).

1.2. Доказать, что сумма углов звездчатого пятиугольника равна π (см. рис.)



(Геом. рис.)

1.3. В выпуклом четырехугольнике ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны. Точки M, N, K, L являются серединами сторон AB, BC, CD, AD. Доказать, что четырехугольник MNKL будет прямоугольником. (Геом. п.47, 38).

1.4. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом восьмиугольнике? (Геом. п.39).

1.5. а) Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон равна высоте треугольника.

б) Верно ли, что в любом треугольнике сумма расстояний от внутренней точки до его сторон не зависит от выбора этой точки? (Геом. п.19, 53).

1.6. В двух треугольниках ABC и A'B'C' $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

Обязательно ли эти треугольники конгруэнтны? (Геом. п.25).

1.7. Лестница, стоящая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котенок, сидящий на середине лестницы? Более точно, концы отрезка длиной d скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка? (Геом. п.47).

1.8. Точка B лежит на отрезке AC. Найти множество точек M, для которых $\widehat{MBC} = 2\widehat{MAC}$. (Геом. п.23, 32)

1.9. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, опущенными на гипотенузу. (Геом. п.23, 33, 47).

1.10. Доказать, что из трех медиан прямоугольного треугольника наименьшую длину имеет та, которая проведена к гипотенузе. (Геом. п.47, 88).

1.11. Разложить на множители многочлен $1 + 4x^4$. (Алг., 7 кл., п.1).

1.12. Пусть дан многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ называются коэффициентами многочлена $f(x)$. Найти сумму коэффициентов многочлена $f(x) = (x+10)^6$. (Алг., 7 кл., п.Б)

1.13. Построить график функции: $y = x^2 + \frac{1}{16x^2}$. (Алг., 7 кл., п.12).

1.14. Построить графики функций:

$$a) y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$б) y = \frac{|x+2|+1}{x+3}$$

(Алг., 7 кл., пп. 12, 55).

1.15. Решить неравенство: $\frac{3}{x^2-4} > -1$. (Алг., 7 кл., пп. 18-20).

1.16. Известно, что разность:

$$\sqrt{124\sqrt{3}-43} - \sqrt{24\sqrt{3}+43}$$

является целым числом. Найдите это число. (Алг., 7 кл., пп.43-45)

1.17. Доказать, что числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррациональны, то есть их нельзя представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p, q - целые числа, $q \neq 0$.

1.18. Даны два целых числа. Известно, что сумма их квадратов делится на 3. Доказать, что и каждое из этих чисел делится на 3.

1.19. а) Построить график функции: $y = |x+4| + |x+6|$

б) Решить уравнение: $|x+4| + |x+6| = 2$

1.20. Решить уравнение: $\sqrt{3-\sqrt{3+x}} = x$

1.21. Известно, что корни многочлена $x^4 + x^3 - 19x^2 - 49x - 30$ целые числа. Найти эти корни. (Алг., 7 кл., пп.52-53).

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Всесоюзная заочная математическая школа
при М Г У

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ВЗМШ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Выпуск ХУП

МОСКВА - 1980

О г л а в л е н и е

	<u>стр.</u>
Предисловие	3
I. Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ 1980 года	4
II. Решения задач вступительной контрольной работы ...	5
III. Задание № I для поступивших в ВЗМШ	13
IV. Задачи для самостоятельного решения	14

ПРЕДИСЛОВИЕ

В первом разделе разработок помещены задачи вступительной контрольной работы для семиклассников, поступавших во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при МГУ (ВЗМШ) в 1980 г.

Во втором разделе публикуются решения этих задач. При написании решений основное внимание обращалось на четкость и полноту, иногда вначале приводятся наводящие соображения, помогающие решить задачу. По-видимому, внимательно прочесть решения будет полезно даже тем школьникам, которые правильно решали задачи, чтобы поучиться четкости в записи решений, увидеть характерные ошибки в рассуждениях, узнать какие-то новые приемы и идеи.

Третий раздел — первое задание для тех учащихся, которые выдержали вступительный конкурс и получили извещение о приеме в ВЗМШ. Они должны решить помещенные в этом разделе задачи, оформить решения в соответствии с присланной "Инструкцией" и отправить решения в ВЗМШ (или в соответствующие филиалы ВЗМШ) к 25 сентября 1980г. Обращаем внимание этих школьников на то, что в задачах этого раздела можно использовать многие методы, применявшиеся при решении вступительных задач.

Четвертый раздел содержит много задач для самостоятельного решения. Этот раздел рассчитан на работу в течение долгого времени. Его задачи носят самый разнообразный характер: среди них есть и легкие, и трудные, и средние по трудности задачи; похожие задачи не обязательно стоят рядом, поэтому не старайтесь решать все задачи подряд. Если какая-нибудь задача Вас заинтересует, а решить её не удастся, отложите на время решение, порешайте другие задачи, а затем вернитесь к отложенной. Как правило, самые интересные и полезные задачи именно те, которые не удается решить сразу. Будем надеяться, что каждый из Вас сможет найти здесь задачи на свой вкус.

Выпуск составили: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, И.М.Раббот, А.Л.Тоом.

Методическая Комиссия ВЗМШ советует всем школьникам, интересующимся математикой и физикой, подписаться на научно-популярный журнал Академии педагогических наук СССР и Академии наук СССР под названием "Квант". Этот журнал содержит интересные статьи и множество разнообразных задач по различным разделам математики и физики.

I. Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ 1980 года.

1. В кружке, где Аня изучает математику, занимается более 94% мальчиков. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

2. Можно ли из цифр 0,1,2,3,...,9 составить десятизначное число так, чтобы все его цифры были различные и чтобы оно делилось на 1980?

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

4. Найдите три числа, если каждое из них равно квадрату суммы двух других.

5. В каждой вершине правильного восьмиугольника и в его центре поставлено одно из девяти чисел 1,2,3,...,9 так, что все эти числа использованы. Обозначим через S наибольший общий делитель четырех сумм троек чисел, поставленных по каждой из четырех диагоналей, проходящих через центр. Укажите все значения, которые может принимать S .

6. Можно ли расположить на плоскости пять кругов одинакового радиуса K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 так, что пересечения $K_1 \cap K_5$, $K_2 \cap K_5$ и $K_1 \cap K_4$ пусты, а все прочие попарные пересечения этих кругов непусты и конгруэнтны между собой?

7. Существует ли тысяча различных целых положительных чисел таких, что каждый два из них имеют общий делитель, больший единицы, а все числа в совокупности не имеют общего делителя, отличного от единицы?

8. На стороне AD квадрата $ABCD$ взята произвольная точка M и проведена биссектриса угла MBC до пересечения со стороной CD в точке K . Докажите, что разность длин отрезков MB и AM равна длине отрезка CK .

9. Существуют ли такие десять положительных чисел, что сумма квадратов этих чисел равна 1, а сумма всех их попарных произведений меньше, чем 0,01?

10. а) Пара чисел $(n_1; n_2)$, где $n_1 \leq n_2$, называется осуществимой, если квадрат можно разрезать прямой, проходящей через его внутреннюю точку, на n_1 -угольник и n_2 -угольник. Сколько таких пар?

б) Четверка чисел $(n_1; n_2; n_3; n_4)$, где $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$ называется осуществимой, если квадрат можно разрезать парой прямых, проходящих через его внутреннюю точку, на n_1 -угольник, n_2 -угольник, n_3 -угольник и n_4 -угольник. Сколько таких четверок?

II. Решения задач вступительной контрольной работы.

Задача I. Ответ: 17.

Решение. Пусть в кружке M мальчиков и \varnothing девочек. По условию задачи

$$\frac{M}{M+\varnothing} > \frac{94}{100},$$

откуда $M > 15 \frac{2}{3} \varnothing$.

Поскольку в кружке занимается Аня, то $\varnothing \geq 1$, откуда $M \geq 16$.

Итак, в кружке может быть, самое меньшее, 17 участников: 16 мальчиков и одна девочка - Аня.

Задача 2. Ответ - решение. Можно, например, 3192567840.

Замечание. Чисел, удовлетворяющих условию, много. Покажем, как искать требуемые числа. Прежде всего, ясно, что ноль должен стоять в конце. Откинем его и одновременно вычеркнем ноль в числе 1980. Получим следующую задачу:

из всех цифр 1, 2, 3, ..., 9 составить девятизначное число, делящееся на $198 = 2 \cdot 9 \cdot 11$.

На 9 наше число будет делиться при любом расположении цифр, поскольку сумма его цифр будет равна $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$. (по известному признаку делимости на 9 число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9).

Делимость на 2 тоже легко обеспечить: для этого нужно, чтобы последняя цифра была четна.

Остается обеспечить делимость на 11. Существует признак делимости на 11.

Число тогда и только тогда делится на 11, когда на 11 делится разность между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах,

и суммой его цифр, стоящих на четных местах.

Например, для числа, указанного в ответе, эта разность равна

$$(3+9+5+7+4) - (1+2+6+8+0) = 11.$$

Итак, надо расположить цифры 1, 2, 3, ..., 9 так, чтобы разность между суммой S_1 цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой S_2 цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11.

Пусть эта разность равна 11. В этом случае

$$S_1 + S_2 = 45, \quad S_1 - S_2 = 11,$$

откуда $S_1 = 28, \quad S_2 = 17$.

Легко подобрать четыре ненулевые цифры, сумма которых равна 17, например, $1+2+6+8=17$. Расставляя цифры 1, 2, 6, 8, 0 на четных местах, а остальные - на нечетных, причем так, чтобы перед нулем стояла четная цифра, получаем нужное число.

Задача 3. Ответ: 10 км.

Решение. Обозначим через t_1 тот момент времени, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, через t_2 - тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, через t_3 - момент, когда велосипедист настигнет пешехода.

В момент t_1 велосипедист отставал от пешехода на 10 км, в момент t_2 - на 5 км, а в момент t_3 велосипедист догонит пешехода. Отсюда $t_2 - t_1 = t_3 - t_2$.

За промежуток времени $t_2 - t_1$ мотоциклист удалился от велосипедиста на 5 км. Поэтому за время $t_3 - t_2$ мотоциклист удалится от велосипедиста еще на столько же, и всего расстояние между ними составит 10 км.

Задача 4. Ответ: $\{(0; 0; 0), (\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})\}$.

Решение. Покажем, что обязательно выполняются равенства $x = y = z$.

Обозначим через S сумму $x + y + z$. Тогда условие можно записать так:

$$x = (S - x)^2, \quad y = (S - y)^2, \quad z = (S - z)^2,$$

(отсюда следует, что x, y и z , а поэтому $S - x, S - y$ и $S - z$ - неотрицательны).

Пусть $x \geq y \geq z \geq 0$, тогда (из условия)

$$S - x \geq S - y \geq S - z,$$

откуда $x \leq y \leq z$.

Сравнивая последние неравенства с нашим предположением, получаем $x = y = z$. (Точно так же приводится к противоречию любое другое предположение о неравенстве чисел x, y, z , например, $y \geq x \geq z$, так как заданная система уравнений симметрична относительно неизвестных).

Если $x = y = z$, то $x = 4x^2$ или $x(4x - 1) = 0$, откуда либо $x = 0$, либо $x = \frac{1}{4}$, и мы получаем указанный ответ.

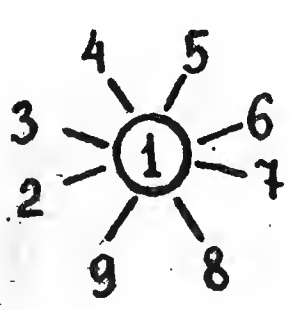
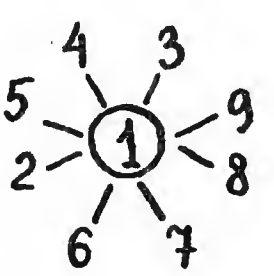
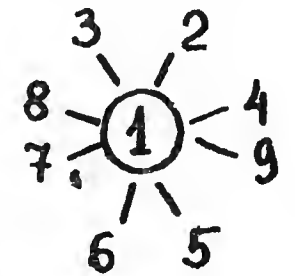
Замечание. Можно решить задачу иначе, например, вычитая одно уравнение из другого, раскладывая полученные уравнения на множители и рассматривая различные случаи.

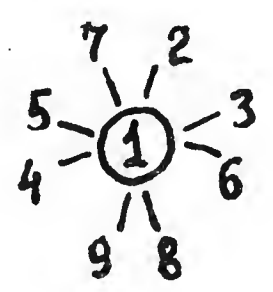
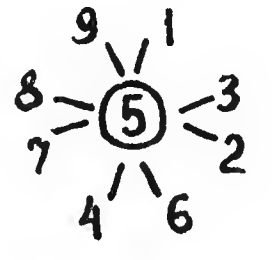
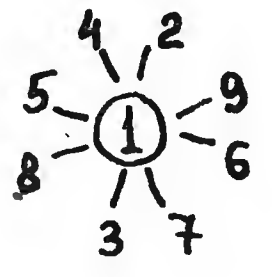
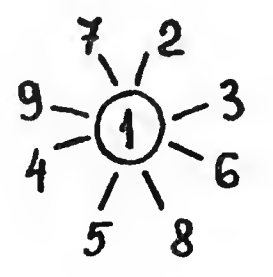
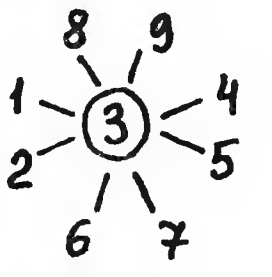
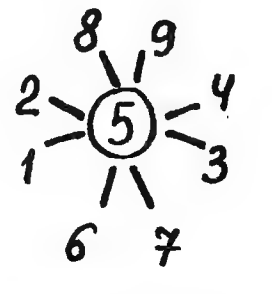
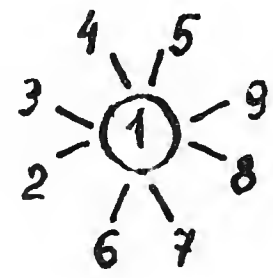
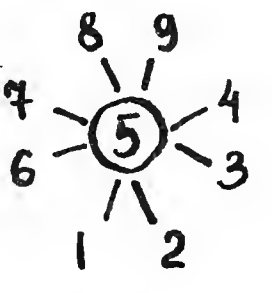
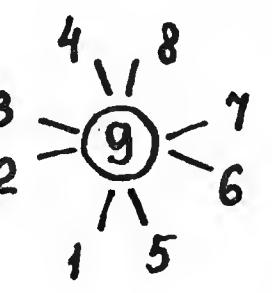
Задача 5. Ответ: все числа от I до I8 включительно, кроме 7, II, I3, I4, I6, I7.

Решение. Обозначим через x цифру, стоящую в центре, а через S_1, S_2, S_3, S_4 - суммы троек чисел, поставленных по диагоналям. Тогда $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 45 + 3x$, где $1 \leq x \leq 9$.

Наибольшее возможное значение $45 + 3x$ равно 72. Поэтому наименьшая из сумм S_1, S_2, S_3, S_4 не может быть больше 18 (иначе все они больше 18 и $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 > 72$), а потому и число $C = \text{НОД}(S_1, S_2, S_3, S_4)$ не может быть больше 18.

Переберем теперь все числа от I до I8 и посмотрим, можно ли расставить цифры так, чтобы число C получило заданное значение. Следующие рисунки дают все возможные значения C , указанные в ответе:

 <p>$C = 1$</p>	 <p>$C = 2$</p>	 <p>$C = 3$</p>
---	---	--

 <p>$C = 4$</p>	 <p>$C = 5$</p>	 <p>$C = 6$</p>
 <p>$C = 8$</p>	 <p>$C = 9$</p>	 <p>$C = 10$</p>
 <p>$C = 12$</p>	 <p>$C = 15$</p>	 <p>$C = 18$</p>

Покажем, что C не может равняться 7, II, I3, I4, I6, I7.

Если $C = 7$, то S_1, S_2, S_3, S_4 делятся на 7, откуда $45 + 3x$ делится на 7, где $1 \leq x \leq 9$. Такое число только одно: 63 при $x = 6$. Итак, в центре должно стоять 6.

В каком-то углу стоит 2. Напротив должно стоять такое число y , что $2+6+y$ делится на 7, но среди чисел от 1 до 9 в этом качестве годится только 6, а 6 уже стоит в центре.

Если $C = 11$, то $45+3x$ делится на 11, откуда $x = 7$. В каком-то углу стоит 2. Чтобы сумма на этой диагонали делилась на 11, в противоположном углу должно тоже стоять 2, что невозможно.

Чтобы не перебирать отдельно случаи $C = 13, 14, 16$ и 17 , заметим, что при $C \geq 13$ сумма чисел по каждой диагонали должна равняться C . В самом деле, сумма трех различных цифр не может быть больше $7+8+9 = 24$, а поэтому она не может быть равна $2C \geq 26$ и вообще KC при $K \geq 2$. Итак, в этом случае (при $C \geq 13$) должно выполняться равенство $4C = 45+3x$, но это возможно лишь, если C делится на 3 (то есть $C = 15$ или $C = 18$).

Задача 6. Ответ - решение: можно. Примеры показаны на рис.1: K_1, K_2 и K_3 касаются друг друга, K_4 отличен от K_1 и касается K_2 и K_3 , K_5 отличен от K_2 и касается K_3 и K_4 и на рис.2: "олимпийские кольца".

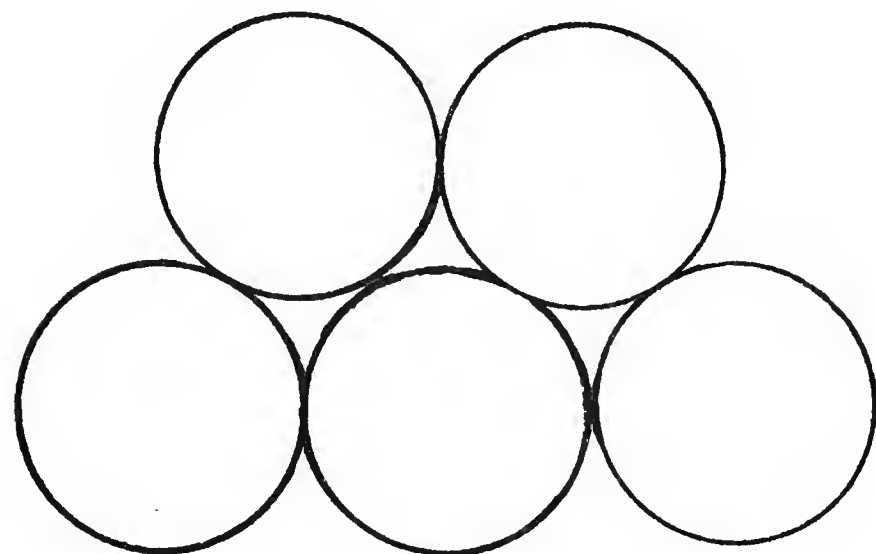


Рис.1

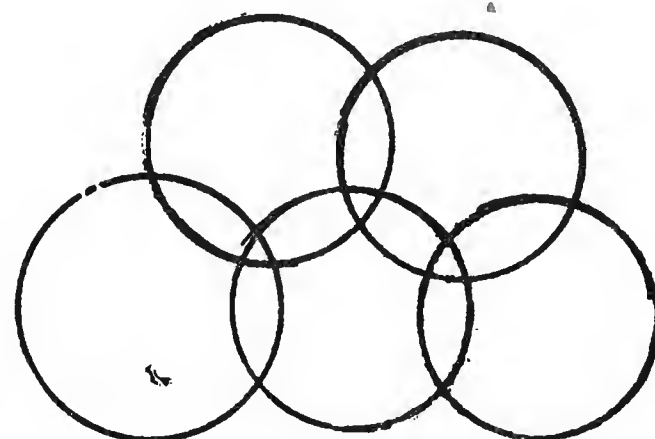


Рис.2

Задача 7. Ответ - решение: да. Например, пусть $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{1000}$ - тысяча различных простых чисел (как известно, простых чисел бесконечно много, поэтому тысячу из них можно выбрать). Обозначим их произведение через N :

$$N = p_1 p_2 p_3 \dots p_{1000}$$

и возьмем в качестве искомых следующие числа:

$$\frac{N}{p_1}, \frac{N}{p_2}, \frac{N}{p_3}, \dots, \frac{N}{p_{1000}}$$

Очевидно, эти числа удовлетворяют условию.

Задача 8. Доказательство. Пристроим к нашему квадрату треугольник ABP , полученный из треугольника CBK поворотом на 90° вокруг точки B (см.рис.3).

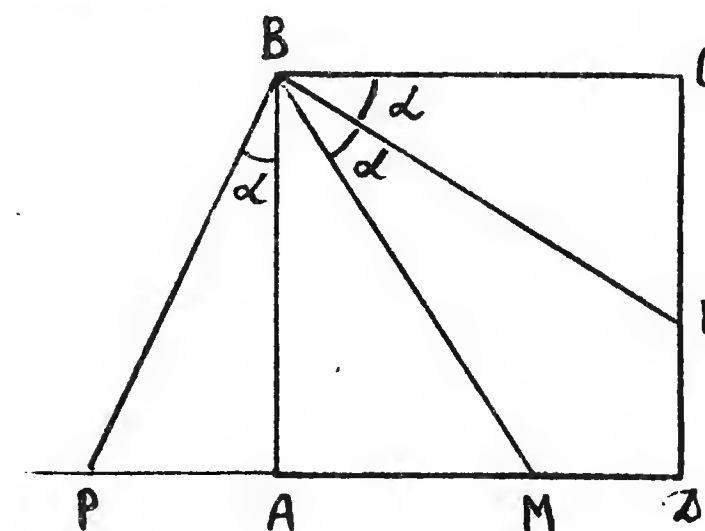


Рис.3

Тогда $\widehat{ABP} = \widehat{MBK} = \widehat{KBC} = \alpha$, а так как $\widehat{ABM} = 90 - 2\alpha$, то $\widehat{AMB} = 2\alpha$ и $\widehat{BPA} = 90 - \alpha$.
Итак, $\widehat{BPM} = \widehat{PBM}$, откуда треугольник BMP - равнобедренный и $|BM| = |PM| = |PA| + |AM| = |CK| + |AM|$.

Задача 9. Ответ: существуют.

Неформальная идея: надо взять одно число близкое к 1, а остальные числа - близкие к 0.

Решение. (Точная конструкция). Пусть девять из наших чисел равны 10^{-4} , а десятое число равно $\sqrt{1 - 9 \cdot 10^{-8}} < 1$. Тогда сумма всех их попарных произведений равна

$$9 \cdot \sqrt{1 - 9 \cdot 10^{-8}} \cdot 10^{-4} + \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot 10^{-8} < 10^{-3} + 10^{-6} < 10^{-2},$$

что и требовалось.

Задача 10. а) Ответ: четыре пары.

Решение. Если прямая проходит через вершину квадрата, то

она либо проходит через противоположную вершину, либо - через сторону квадрата (см. рис. 4а, б). Это дает пары (3; 3) и (3; 4).

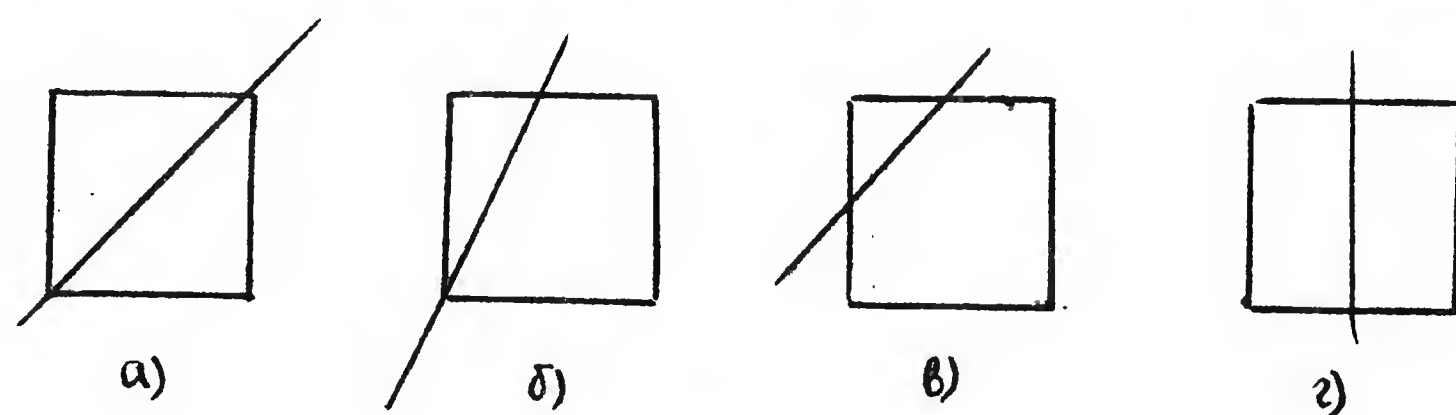


Рис. 4

Если прямая не проходит через вершину квадрата, то она пересекает либо две его смежные стороны (это дает пару (3; 5)), либо две противоположные (это дает пару (4; 4)) - см. рис. 4в, г.

б) Ответ: девять четверок.

Решение. Общее количество сторон у наших четырех многоугольников складывается из:

1) сторон, лежащих на сторонах квадрата; их столько же, сколько точек на контуре квадрата, служащих им концами; эти точки - четыре вершины квадрата и четыре точки пересечения прямых с контуром квадрата, всего не более восьми.

2) сторон, лежащих на секущих прямых; их число - удвоенное число отрезков, отсекаемых на этих прямых, т.е. восемь.

Итак, если (n_1, n_2, n_3, n_4) - осуществимая четверка, то

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \leq 16. \quad (1)$$

С другой стороны

$$3 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4. \quad (2)$$

Перечислим все четверки целых чисел, удовлетворяющие неравенствам (1) и (2). Это удобно делать в лексикографическом порядке, то есть так, как располагаются слова в словарях: сначала придать

n_1, n_2, n_3 наименьшие возможные значения и перебрать все возможные значения n_4 , потом увеличить n_3 на единицу и снова перебрать все значения n_4 , потом снова увеличить n_3 на единицу и т.д.

Исчерпав комбинации n_3 и n_4 , увеличить n_2 на единицу и сделать то же самое, потом снова увеличить n_2 на единицу и т.д. Исчерпав комбинации n_2, n_3 и n_4 , увеличить n_1 на единицу и т.д. Получим следующий список:

(3; 3; 3; 3)
(3; 3; 3; 4)
(3; 3; 3; 5)
(3; 3; 3; 6) - нет
(3; 3; 3; 7) - нет
(3; 3; 4; 4)
(3; 3; 4; 5)
(3; 3; 4; 6)
(3; 4; 4; 4)
(3; 4; 4; 5)
(4; 4; 4; 4)

В этом списке девять четверок осуществимы; дающие их расположения прямых показаны на рис. 5.

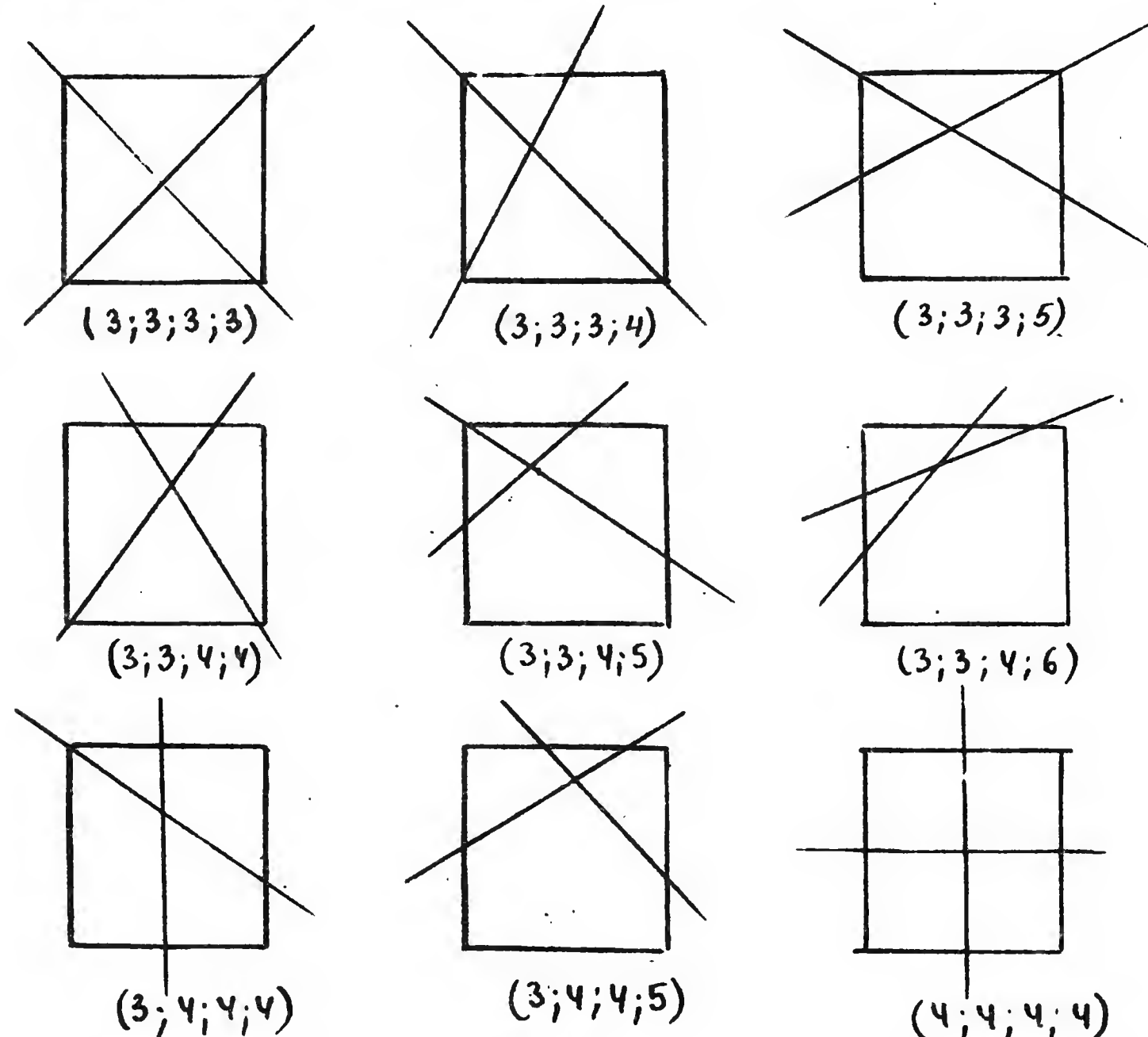


Рис. 5

Закончим решение, доказав от противного, что две четверки, снабженные пометкой "нет", неосуществимы.

Допустим, получилась четверка (3; 3; 3; 7), то есть одна из частей - семиугольник. Лишь две его стороны могут лежать на разрезающих прямых, значит, остальные пять должны лежать на контуре квадрата, что невозможно, так как у квадрата всего четыре стороны.

Допустим, получилась четверка (3; 3; 3; 6). Значит, одна из частей - шестиугольник. Две его стороны лежат на разрезающих прямых, значит, остальные четыре - на всех четырех сторонах квадрата. Тогда получается расположение, показанное на рис. 5 и дающее четверку (3; 3; 4; 6), что противоречит предположению.

III. Задание № I для поступивших в ВЗМ III.

1. От того, что Аня начала ходить в математический кружок, процент мальчиков в нем уменьшился на 5. Какое наименьшее число учеников могло быть в кружке?

2. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

3. Найдите три числа, если известно, что квадрат каждого из них равен сумме двух других чисел.

4. а) Существуют ли такие десять чисел, что сумма всех их попарных произведений равна 1, а сумма квадратов этих чисел меньше, чем 0,01?

б)* При каких n существуют такие n чисел, что сумма всех их попарных произведений равна 1, а сумма квадратов этих чисел меньше, чем 0,01?

5. а) Пару чисел $(n_1; n_2)$, где $n_1 \leq n_2$, назовем осуществимой, если треугольник можно разрезать прямой, проходящей через его внутреннюю точку, на n_1 - угольник и n_2 - угольник.

* Таким значком мы обозначаем более трудные задачи.

Сколько существует таких пар?

б) Четверку чисел $(n_1; n_2; n_3; n_4)$, где $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$, назовем осуществимой, если треугольник можно разрезать парой прямых, проходящих через его внутреннюю точку, на n_1 - угольник, n_2 - угольник, n_3 - угольник и n_4 - угольник. Сколько существует таких четверок?

IV. Задачи для самостоятельного решения.

а) Задачи вступительной работы в ВЗМ III 1979 г.

1. Точки A, B, C являются вершинами неравнобедренного прямоугольного треугольника. Сколькими способами можно поставить на плоскости точку D так, чтобы множество точек $\{A; B; C; D\}$ имело: а) центр симметрии; б) ось симметрии? в) Изменяется ли ответ на вопросы а) и б), если в условии задачи заменить слово "прямоугольного" на слово "непрямоугольного"?

2. Рассмотрим всевозможные девятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, ..., 9 встречается по одному разу. Определите наибольший общий делитель этих чисел.

3. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если у них общая сторона).

4. Андрей бежит на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова не прибежали все трое в одно место. За это время Женья обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было за это время обгонов?

5. В одну строчку записали 25 чисел. Сумма любых трех соседних чисел положительна. Может ли при этом сумма всех 25 чисел быть отрицательной?

6. Найдите все пары целых чисел $\{m; n\}$, для которых выполняется равенство $m^2 + 1 = 2^n$.

7. Рассмотрим на плоскости многоугольник, являющийся объединением трех параллелограммов: $OAHB$, $OBKC$ и $OSMA$.

а) Обязательно ли этот многоугольник выпуклый?

б) Сколько сторон может иметь этот многоугольник?

в) Какой периметр может иметь этот многоугольник, если

$$|OA| + |OB| + |OC| = 1 \quad ?$$

8. Загаданы два целых положительных числа. Математику A сообщена их сумма, а математику B — сумма их квадратов. Если A и B соединят свои знания, то они, конечно, определят оба числа. Но они узнали эти числа в процессе следующего разговора:

B . — Я не знаю, какие это числа.

A . — Их сумма больше десяти.

B . — Тогда я знаю, какие это числа.

Найдите и вы эти числа.

9. Можно ли нарисовать на плоскости прямоугольник $ABCD$ и точку M так, что расстояния от точки M до точек A, B, C и D равны соответственно: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 4, 8 и 7?

10. Имеются два автомата. Если в первый из них бросить 5 копеек, то он умножит данное ему число на 3. Если во второй автомат бросить 2 копейки, то он прибавит к данному ему числу число 4. Какую минимальную сумму денег надо иметь, чтобы с помощью этих автоматов получить из данного числа 1 число 1979?

б) Разные задачи.

1. Пусть A — множество точек на плоскости. Докажите следующие утверждения.

а) Если прямые ℓ и m — оси симметрии A , то и прямая, симметричная прямой ℓ относительно прямой m — тоже ось симметрии множества A .

б) Если множество A ограничено (то есть если существует такое положительное число m , что все попарные расстояния между точками множества A меньше этого числа), то оно имеет не более одного центра симметрии.

в) Если множество A ограничено и имеет более, чем одну ось симметрии, то все его оси симметрии проходят через одну точку.

г) Если множество A ограничено и имеет конечное число осей симметрии, то его оси симметрии делят плоскость на конгруэнтные углы.

д) Сколько осей симметрии может иметь множество, состоящее из 1979 точек плоскости?

2. В строчку выписано n чисел. Сумма любых k соседних чисел положительна. Может ли при этом сумма всех n чисел быть отрицательной? (Ответ зависит от n и k).

3. Можно ли получить из числа 1 число 1979 умножениями на 4 и прибавлениями числа 7, производимыми в любом порядке?

4. Какие числа можно получить из числа 1:

а) умножениями на 2 и прибавлениями числа 3;

б) умножениями на 2 и прибавлениями числа 5;

в) умножениями на 4 и прибавлениями числа 5;

г) умножениями на 4 и прибавлениями числа 7?

5. Найти все пары чисел $(m; n)$, для которых выполняется равенство $m^2 - n^2 = 2^n$.

6. Имеются два автомата. Если в первый из них бросить 10 копеек, то он прибавит к данному ему числу число 10. Если во второй автомат бросить 2 копейки, то он прибавит к данному ему числу число 3. Какую минимальную сумму денег надо иметь, чтобы с помощью этих автоматов получить из числа 1 число 1979?

7. Загаданы два целых положительных числа. Математику A сообщена их сумма, а математику B — их произведение. Затем состоялся следующий разговор:

B . — Я не знаю, какие это числа.

A . — Их сумма — четное число.

B . — Тогда я знаю, какие это числа.

A . — Тогда и я знаю, какие это числа. Их произведение делится на 1979.

Определите и вы, какие это числа.

8. Три ромба на плоскости имеют попарно общие стороны. Величины всех их углов кратны 30° , а все их стороны имеют длину 1. Определите, какие значения может принимать площадь фигуры, являющейся объединением всех трех ромбов.

Подписано к печати 3.03.80 г.
Формат 60х90 1/16 Тираж 5000 экз.
Заказ 2357 Бесплатно Объем 1 п.л.

Отпечатано на ротапринтере Института механики
МГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся I курса ВЭиШ
"СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ"

Составитель В.Л.Гутенмахер.

Системы линейных уравнений часто встречаются в разных приложениях математики (например, к физике, химии, экономике). Ниже рассказывается о простейших способах решения таких систем и об универсальном способе - методе Гаусса.

З а д а н и е №

Обязательные задачи: № 1а; 1б; 2; 3а; 3б; 3в; 4а; 4б; 5а; 5б; 6; 8; 9; 12; 14; 16; 18; 23а.

Дополнительные задачи: № 7; 10а; 10б; 20а; 20б; 20в; 20г; 21а; 21б; 23б.

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" - решено не менее 10 обязательных задач;

"4" - решено не менее 14 обязательных задач;

"5" - решены все 18 обязательных задач.

Дополнительные задачи: "4" - решено 4-6 дополнительных задач;

"5" - решено 7-10 дополнительных задач.

Срок присылки задания №

Исключение переменной

Понять метод лучше всего на примере. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 7x + 5y = 1. \end{cases}$$

Чтобы её решить, исключим с помощью первого уравнения переменную

x из второго уравнения. Подготовим для этого оба уравнения так, чтобы коэффициенты при x у них были одинаковы. Умножая первое уравнение на 7, а второе на 2, получаем

$$\begin{cases} 14x + 21y = 35, \\ 14x + 10y = 2. \end{cases}$$

Теперь оставив первое уравнение нетронутым, а второе заменим на разность между первым и вторым уравнениями:

$$\begin{cases} 14x + 21y = 35, \\ 11y = 33. \end{cases}$$

Придадим теперь первому уравнению его первоначальный вид, а

второе разделим на II:

$$\begin{cases} 2x+3y=5, \\ y=3. \end{cases}$$

Подставляя значение $y=3$ в первое уравнение, находим

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ получен, система уравнений имеет единственное решение - пару чисел $(-2; 3)$.

З а д а ч и

I. Методом исключения переменной решите систему:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} 2x+3y=4, \\ 3x-2y=5 \end{cases} ; & \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{5}{6}y = 1, \\ \frac{5}{6}x - \frac{3}{4}y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Две точки движутся по числовой оси со скоростями $u = -12$ км/ч и $v = 12$ м/с. Вначале их абсциссы были $a = 3$ км и $b = -500$ м. Где и когда они встретятся?

Замена переменных

Одним из основных приемов алгебры является замена одних переменных другими. Этот прием позволяет сводить задачи к более простым. Пусть, например, нам нужно решить систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 5, \\ \frac{7}{x} + \frac{5}{y} = 1. \end{cases}$$

Полагая $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, мы получаем линейную систему с новыми переменными u, v :

$$\begin{cases} 2u+3v=5, \\ 7u+5v=1. \end{cases}$$

Решая её, находим $u = -2$, $v = 3$. Возвратимся теперь к старым переменным: $\frac{1}{x} = -2$, $\frac{1}{y} = 3$, откуда $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$.

задача 3. Методом замены переменных решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{1}{2x+3y-5} + \frac{7}{5x-8y+12} = 1, \\ \frac{4}{2x+3y-5} - \frac{14}{5x-8y+12} = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2+xy=5, \\ 3x^2+5xy=23; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{xy}{3x+2y} = \frac{1}{5}, \\ \frac{xy}{5x+7y} = 1. \end{cases}$$

Геометрический смысл линейного уравнения

Чтобы найти уравнение прямой $y = kx + b$, проходящей через точки с координатами $(1; 2)$ и $(3; 1)$, подставим в уравнение $y = kx + b$ вместо x и y координаты данных точек. Мы получим систему

$$\begin{cases} 2 = k + b, \\ 1 = 3k + b. \end{cases}$$

Решая её, находим $k = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$. Таким образом, искомое уравнение $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Но может случиться и так, что соответствующая система уравнений не имеет решений. Пусть, например, данные точки имеют координаты $(1; 2)$ и $(1; 3)$. Подставляя эти значения в уравнение

$$y = kx + b, \text{ получаем систему } \begin{cases} 2 = k + b, \\ 3 = k + b, \end{cases}$$

не имеющую решений (ведь из уравнений системы следует $2=3$). На первый взгляд, это немного удивительно - ведь через две точки всегда проходит прямая. Оказывается, уравнение прямой, проходящей через точки $(1; 2)$ и $(1; 3)$, не записывается в виде $y = kx + b$; её уравнение $x = 1$.

Таким образом, мы выяснили причину недоразумения - задача была неудачно сформулирована: в условии предполагалось, что уравнение прямой на координатной плоскости всегда имеет вид

$y = kx + b$, однако для прямых, параллельных оси ординат, это не так. В связи с этим обстоятельством уравнение произвольной прямой записывают в виде $ax + by = c$. Такой вид позволяет охватить уже все прямые на координатной плоскости. Например,

если положить $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{2}$, получится уравнение первой найденной нами прямой, а если взять $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ - уравнение второй прямой.

Рассмотрим теперь систему

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}, \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Решить её - это на геометрическом языке значит найти общие точки прямых, заданных уравнениями $x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}$, $\sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}$.

Решим эту систему методом исключения переменной: умножим первое уравнение на $\sqrt{2}$ и вычтем из второго:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}, \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

В результате нам осталось только одно уравнение. Это означает, что система имеет бесконечное число решений и прямые совпадают. В процессе решения мы обнаружили, что второе уравнение - это первое, умноженное на $\sqrt{2}$, что сразу можно было не заметить.

В разобранных задачах мы столкнулись со всеми возможными ситуациями: система имеет единственное решение, не имеет решений, имеет бесконечное число решений. Так же обстоит дело и в общем случае. Система n линейных уравнений с n неизвестными, как правило, имеет единственное решение. Но когда одно из её уравнений является "линейной комбинацией" остальных уравнений или противоречит им, она имеет бесконечное число решений или их вообще нет.

З а д а ч и

4. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки: а) (1; 5) и (2; 3); б) (6; 1) и (6; 5).
5. При каких k и b прямые $y - kx = 2$ и $2y - bx = 8$ а) совпадают? б) не пересекаются?
6. При каких a система
$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$$
 не имеет решений?

7. Докажите, что система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

тогда и только тогда имеет единственное решение, когда

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. (Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем системы).

Ошибки при округлении

При решении задач на ЭВМ могут возникать удивительные ситуации. Классической иллюстрацией этого является решение системы

$$\begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}, \\ \sqrt{2}x + 2y = \sqrt{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Эта система, как мы уже убедились, имеет бесконечное число решений. Однако, если решать её на ЭВМ, она будет иметь... единственное решение! Это происходит потому, что ЭВМ не умеет оперировать с числами вида $\sqrt{2}$ - они заменяются в ней на десятичные (или двоичные) приближения.

Если, например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ заменить на их десятичные приближения с одной цифрой после запятой: $\sqrt{2} \approx 1,4$; $\sqrt{3} \approx 1,7$; $\sqrt{6} \approx 2,4$ система примет вид

$$\begin{cases} x + 1,4y = 1,7, \\ 1,4x + 2y = 2,4. \end{cases} \quad (2)$$

Решив её, мы получим одно решение $x = 1$; $y = 0,5$.

Если же оставить четыре знака после запятой, получается система

$$\begin{cases} x + 1,4142y = 1,7320, \\ 1,4142x + 2y = 2,4494, \end{cases} \quad (3)$$

дающая тоже одно, (но совсем другое) решение: $x = 0,3178$, $y = 1$.

Интересно что, какими бы десятичными приближениями мы ни заменяли число $\sqrt{2}$, всегда будет получаться единственное решение.

Докажем это. Заменяя в системе (1) $\sqrt{2}$ буквой a , получим

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{3}, \\ ax + 2y = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Покажем, что при $a^2 \neq 2$ система имеет единственное решение.

Если $a = 0$, это очевидно. Пусть теперь $a \neq 0$. Умножая первое уравнение на a и вычитая из него второе, приводим систему к виду

$$\begin{cases} x + ay = \sqrt{3}, \\ (a^2 - 2)y = a\sqrt{3} - \sqrt{6}. \end{cases}$$

Так как $a^2 \neq 2$, y принимает единственное значение $\frac{a\sqrt{3}-\sqrt{6}}{a^2-2}$.

Подставляя его в первое уравнение, находим единственное значение x . Таким образом, если в качестве a взять не само число $\sqrt{2}$, а его какое-нибудь приближение, то $a^2 \neq 2$, — значит, система обладает единственным решением.

Остается напомнить ("Алгебра 7" п.28), что само число $\sqrt{2}$ не представляется в виде конечной десятичной дроби (и даже в виде любой дроби $\frac{p}{q}$, где p и q целые числа). Из-за этого мы и получили парадокс, связанный с решением системы (I) на ЭВМ.

Обратим внимание на то, что даже в случае, когда все коэффициенты-десятичные дроби, при их округлении решение системы может сильно измениться. Так, система (2) получается округлением коэффициентов системы (3), и при этом их решения совсем разные. В системах с большим числом переменных ошибки, возникающие при округлении, тем более могут приводить к существенным изменениям решений.

Оценить ошибку и указать процедуру решения, гарантирующую наименьшую погрешность, — важная и далеко не простая задача. В начале прошлого века её начал изучать великий математик Гаусс, а существенные дальнейшие продвижения в этом направлении были сделаны только в последние десятилетия. В связи с основополагающим вкладом Гаусса в эту область его именем назван простой и универсальный метод исключения переменных.

Метод Гаусса

Последовательное исключение переменных — наиболее удобный способ решения систем линейных уравнений на ЭВМ. Продемонстрируем его на примере системы трех уравнений с тремя переменными

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Первый шаг состоит в том, что с помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений: первое уравнение оставляем неизменным; из второго уравнения вычитаем удвоенное первое; из третьего уравнения вычитаем учетверенное первое; получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -3x_2 - 2x_3 = -2, \\ -3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Второй шаг состоит в том, что с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из третьего уравнения: первые два уравнения оставляем неизменными; из третьего уравнения вычитаем второе; получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ -3x_2 - 2x_3 = -2, \\ -2x_3 = 4. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения находим: $x_3 = -2$. Подставляя это значение в предыдущее уравнение, находим $x_2 = 2$. Подставляя $x_2 = 2$ и $x_3 = -2$ в первое уравнение, находим $x_1 = 1$. Итак, у нас готов ответ: (1; 2; -2).

Аналогичным образом можно решать любые системы линейных уравнений. Грубо говоря, метод Гаусса заключается в следующем:

С помощью первого уравнения переменная x_1 исключается из остальных уравнений. Затем с помощью нового второго уравнения переменная x_2 исключается из всех следующих уравнений. Потом с помощью нового третьего уравнения исключается переменная x_3 . И так далее, пока мы не получим в последнем уравнении значение последней переменной. После этого находим переменные в обратном порядке, подставляя их известные значения в уравнения.

Мы видим, что это — почти готовая программа для ЭВМ. Но, чтобы этот метод срабатывал, нужно, чтобы на K -м шаге новое K -е уравнение содержало K -ю переменную (ведь с его помощью нам нужно исключить эту переменную из остальных уравнений). Если оказывается, что это не так, приходится переставлять (перенумеровывать) уравнения или переменные.

Может случиться также, что с некоторого места последние уравнения превратятся в числовые равенства вида $0 = b$. Если хотя бы одно из этих равенств неверно ($b \neq 0$), то система не имеет решений. Если же все эти равенства верны, то система имеет бесконечное число решений. (Все такие ситуации предусмотрены в реально используемых программах для ЭВМ).

Отметим, что в ЭВМ вводятся не уравнения, а таблицы коэффициентов — так называемые матрицы системы. Например, системе, которую мы только что решали, сопоставляется матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \text{II} & \text{II} & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right)$$

два шага метода Гаусса, которые мы сделали при решении, можно изобразить так:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Кстати сказать, когда системы с тремя и большим числом переменных решаем вручную, а не на ЭВМ, то тоже удобнее действовать с матрицами — меньше шансов ошибиться.

Задача 8. Решите систему, предлагавшуюся семиклассникам на 2-м туре XV Московской олимпиады:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 8x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$$

Разные задачи

9. Математик вышел гулять — сначала он пошел по ровной дороге, затем поднялся в гору, повернул назад и пришел домой той же дорогой. Он знал, что гулял всего 5 ч, что его скорость по ровной дороге равна 4 км/ч, в гору — 3 км/ч и при спуске — 6 км/ч. Сев за стол и составив одно уравнение с двумя переменными: x — пройденное в оба конца расстояние и y — длина наклонного участка, математик с удивлением обнаружил, что может найти x . Найдите x .

10. За круглым столом сидят 4 гнома. Перед каждым стоит кружка с молоком. Один из гномов переливает $\frac{1}{4}$ своего молока соседу справа. Затем сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и, наконец, четвертый гном $\frac{1}{4}$ оказавшегося у него молока наливает первому. Во всех кружках вместе молока 2 л. Сколько молока было первоначально в кружках, если:

- а) в конце у всех гномов оказалось молока поровну?
- б) в конце у всех гномов оказалось молока столько, сколько было вначале?

11. Определите числа a , b и c так, чтобы функция $y = ax^2 + bx + c$ имела таблицу значений

x	0	1	2
y	1	2	2

Решение. Подставляя последовательно данные значения x и y в формулу $y = ax^2 + bx + c$, получаем $1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$, $2 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + c$, $2 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$. Решив эту систему уравнений, находим: $c = 1$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$. Следовательно, функция имеет вид

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1.$$

12. Определите числа a , b и c так, чтобы функция

$$y = a + b(x-1) + c(x-1)(x-2)$$

имела таблицу значений

x	0	1	2
y	1	2	2

13. Определите числа a , b , c и d так, чтобы равенство $(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)(cx+d) = 1$

выполнялось при всех значениях x .

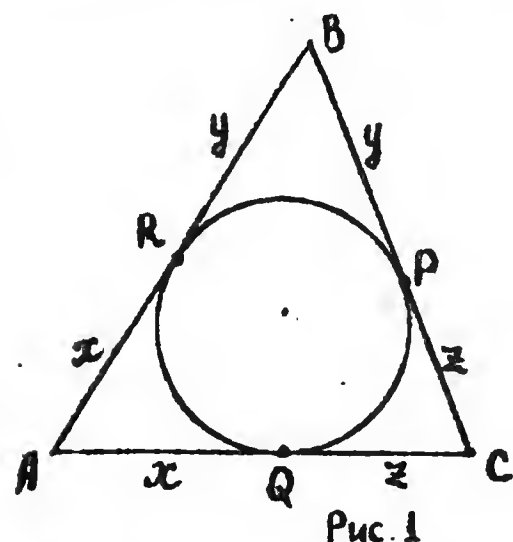
Решение. Если равенство выполняется при всех значениях x , то оно выполняется, в частности, при $x=1$, при $x=0$, при $x=-1$ и при $x=2$. Подставляя их последовательно в это равенство, получаем: $c+d=1$, $b-d=1$, $-4a+4b+c-d=1$, $2a+b+10c+5d=1$. Решив эту систему уравнений относительно a, b, c, d , находим: $a=3$, $b=5$, $c=-3$, $d=4$. Подставляя их в исходное равенство и раскрывая скобки, проверяем, что оно верно при всех значениях x .

Замечание. Мы подставили только четыре значения x , так как этого достаточно, чтобы определить четыре неизвестных. С другой стороны, последний шаг решения (проверка) тоже обязателен (рассмотрите равенство $(x-1)^2(ax+b) + (x^2+x-1)cx = 1$ в точках $x=1$, $x=0$, $x=-1$).

14. Определите числа a , b и c так, чтобы равенство $(x^2-3x+2)a + (3x-1)(bx+c) = 1$

выполнялось при всех значениях x .

15. В треугольнике ABC вписанная окружность касается сторон BC , CA , AB в точках P , Q , R (рис.1). Найдите



$AQ = AR = x$, $BR = BP = y$ и $CP = CQ = z$, если $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. (Замечание. $AQ = AR$, $BR = BP$ и $CP = CQ$, так как касательные к окружности из одной точки равны).

Решение. Из рисунка 1 получается система $\begin{cases} x+y=c, \\ y+z=a, \\ z+x=b. \end{cases}$

Она, конечно, легко решается любым из вышеуказанных способов, но красивее и проще поступить иначе. Сложим все три уравнения. Получаем $2x+2y+2z = a+b+c$, откуда $x+y+z = \frac{a+b+c}{2}$. Вычитая из этого уравне-

ния каждое из уравнений системы, находим: $x = \frac{b+c-a}{2}$, $y = \frac{a+c-b}{2}$, $z = \frac{a+b-c}{2}$.

16. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка E . В треугольники AEC и ECB вписаны окружности, которые касаются отрезка CE в точках K и N соответственно. Найдите длину отрезка KN , если $AE = a$, $EB = b$.

17. (Предлагалась восьмиклассникам на XXIII Украинской олимпиаде в 1983г.) Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рис.2. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 1. Найдите стороны остальных квадратов.

Решение. Обозначим искомые стороны через x, y, z, u (см.рис.2). Тогда $MN = y = u+1$, $AB = x = y+1$, $KL = z = x+1$. Подставляя $y = u+1$ во второе соотношение, находим $x = u+2$. Подставляя $x = u+2$ в третье соотношение, находим $z = u+3$. Теперь запишем равенство противоположных сторон данного прямоугольника: $x+z = y+2u$; подставив сюда x, y и z , получаем $(u+2)+(u+3) = (u+1)+2u$, откуда $u = 4$. Теперь находим: $x = 6$, $y = 5$, $z = 7$.

18. Прямоугольник разбит на квадраты так, как показано на рисунке 3. Известно, что сторона заштрихованного квадрата равна 2. Найдите стороны остальных квадратов.

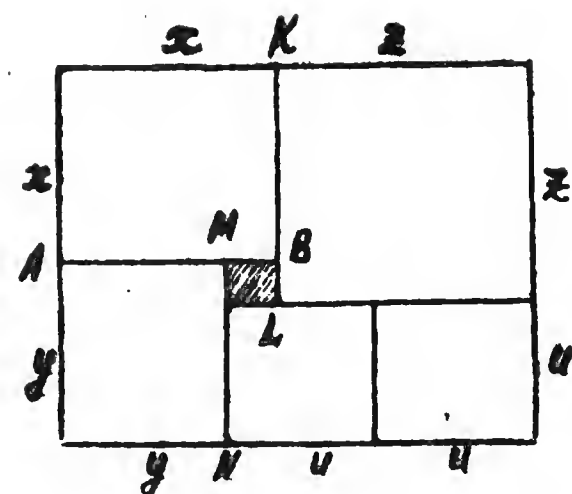


Рис.2

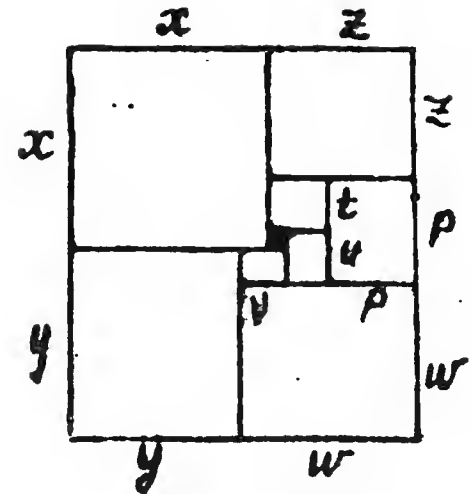


Рис.3

В двух следующих задачах речь идет о разветвленных электрических цепях, составленных из проводников единичного сопротивления. Каждая цепь подключена к источнику в двух точках (полюсах). Токи подчиняются правилам Кирхгофа, которые для рассматриваемых цепей можно сформулировать так.

1) Сумма токов, входящих в любой узел, равна сумме токов, выходящих из него (полюс узлом не считается).

2) В любом замкнутом контуре сумма токов, идущих по часовой стрелке, равна сумме токов, идущих против часовой стрелки.*

19. На рисунке 4 изображена электрическая цепь с полюсами A , C и узлами B , D . Найдите токи во всех проводниках этой цепи, если известно, что ток в проводнике DB равен 1. (Стрелками обозначены направления токов).

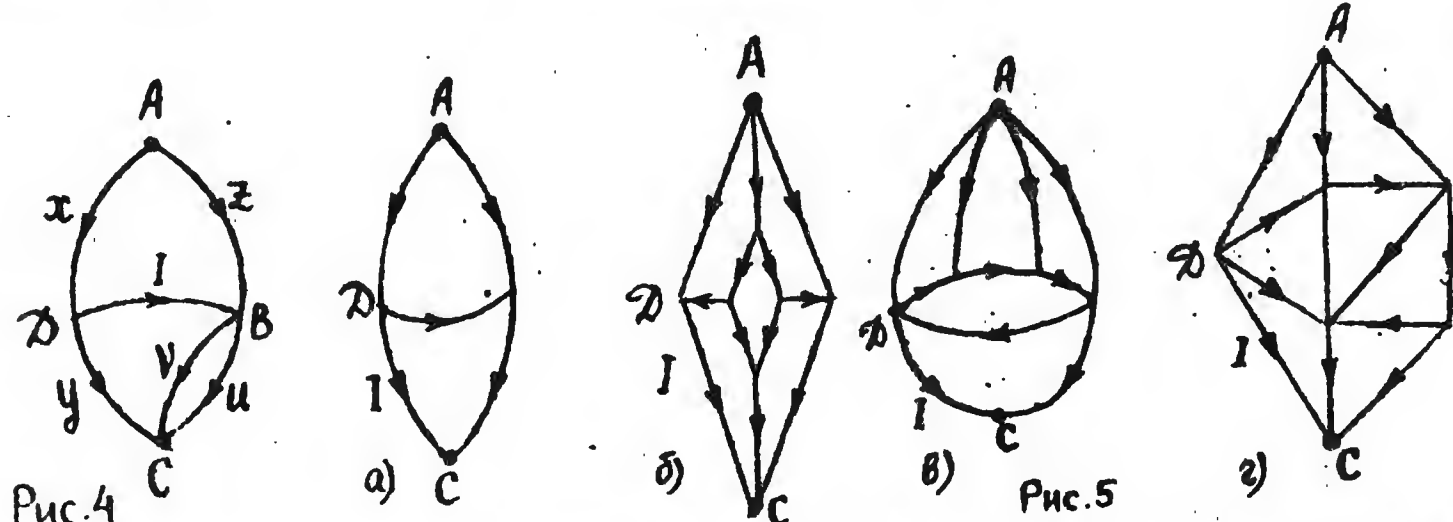


Рис.4

Рис.5

20. На рисунке 5 изображены электрические цепи с полюсами A и C . Найдите токи в их проводниках, если известно, что в каждой цепи ток в проводнике CD равен 1. Некоторые токи у вас получатся нулевыми и отрицательными, что это означает?

* Правильнее сказать, что одинаковы суммы падений напряжений, но, поскольку все проводники имеют единичные сопротивления, можно говорить и о токах.

21. Двое играют в такую игру: в системе

$$\begin{cases} *x + *y = *, \\ *x + *y = * \end{cases}$$

они поочередно вместо какой-нибудь звездочки ставят какое-нибудь число. а) Первый хочет, чтобы полученная в конце система имела решение, а второй хочет, чтобы система решений не имела. Кто выиграет при правильной игре? б) А кто выиграет, если наоборот, первый хочет, чтобы полученная система не имела решений, а второй - чтобы имела?

22. (Предлагалась в восьмом и десятом классах на XIII Всесоюзной олимпиаде и вошла в задачник "Кванта" под номером 578.

Решите систему (а и б данные числа)

$$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a,$$

$$\frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b.$$

23. Решите систему:

$$\text{а) } \begin{cases} y + z + t = a, \\ x + t + x = b, \\ t + x + y = c, \\ x + y + z = d; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} zu + uy + yz = yzu, \\ ux + xz + zu = zux, \\ xy + yu + ux = uxy, \\ yz + zx + xy = xyz. \end{cases}$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

для преподавателей ВЗМШ и руководителей
групп "Коллективный ученик ВЗМШ"

Ответы и указания по проверке задания по теме
"Системы линейных уравнений"

З а д а н и е №

Обязательные задачи: 1а, 1б, 2, 3а, 3б, 3в, 4а, 4б, 5а, 5б, 6,
8, 9, 12, 14, 16, 18.

Дополнительные задачи: 7, 10а, 10б, 20а, 20б, 20в, 20г, 21а,
21б.

Критерии оценок

За обязательную часть: "зачет" решено 9-12 задач;

"4" – решено 13-16 задач;

"5" – решены 17 задач.

За дополнительную часть: "4" – решено 4-7 задач;

"5" – решено 8-9 задач.

Общие соображения

Прежде чем приступить к проверке этого задания, внимательно изучите следующие указания.

Каждая оценка, кроме "+" (полное решение) и 0 (не брался за задачу), должна сопровождаться комментариями на полях. Рецензия в конце работы должна нацеливать ученика на преодоление его слабых мест: арифметический счет, логика, способность изложить свои мысли на бумаге и т.п. Особенно недопустимы в этом задании арифметические ошибки – за них следует ставить оценку не выше "+".

Особое внимание обратите на следующее.

1) Каждый пункт каждой задачи оценивается отдельно.

2) Не следует снижать оценку за округление в ответе, но нужно попросить учащихся в дальнейшем воздержаться от округления, если по условию задачи это не требуется.

3) Задача № 21 состоит из 2-х частей – они должны оцениваться отдельно.

Указания по конкретным задачам

№ 2. Если ход решения задачи верный и первые 2 значащие цифры ответа при округлении правильные, ставить "+".

№ 3б. Если одно из решений потеряно – ставить не выше "+".

№ 3в. Если решение не рационально, указать на короткий

способ решения: "перевернуть" уравнения.

№ 5а. За верный ответ ставить "+".

№ 5б. Если ответ имеет вид двух равенств $K = \dots$, $\theta = \dots$, ставить "+".

№ 6. Если получен правильный ответ при нечетком рассуждении - ставить "+". Если ответ имеет вид: $a = \pm 2/3$ - ставить не выше "+".

№ 7. Если не разобраны все случаи, но проведена правильная алгебраическая выкладка, ставить "+".

№ 10 а, б. Указать на возможность арифметического решения "о конца".

№ 14. Если получены значения неизвестных, но проверка не проведена - ставить "+".

№ 16. Если ответ не содержит знак модуля - ставить "+".

№ 20 а-в. Указать на возможность использования симметрии чертежей.

№ 21. За верный ответ без доказательства ставить "-".

О т в е т ы

1. а) $(\frac{23}{13}; \frac{2}{13})$; б) $(\frac{132}{19}; \frac{96}{19})$.

2. Точки встретятся в точке $x = \frac{103}{46}$ км через $t = \frac{35}{552}$ часа.

3. а) (2; 1); б) (1; 4) (-1; -4); в) $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$.

4. а) $y = -2x + 7$; б) $x = 6$.

5. а) $K = 3$, $\theta = 4$; б) $K = 3$, $\theta \neq 4$. 6. $a = -\frac{2}{3}$.

8. (1; -1; 1; -1; 1). 9. 20 км.

10. $(\frac{4}{9}; \frac{5}{9}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; б) $(\frac{8}{13}; \frac{6}{13}; \frac{6}{13}; \frac{6}{13})$.

12. $a = 0,9$; $b = -0,3$; $c = 0,8$. 16. $KH = |a - 8|/2$.

18. $x = 36$, $y = 33$, $z = 25$, $u = 7$, $v = 5$, $w = 28$, $p = 16$, $t = 9$

20. а) $x = y = t = 1$, $z = 0$; б) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 0$;

в) $x = \frac{2}{3}$, $y = z = \frac{1}{3}$; г) $x = \frac{238}{249}$, $y = \frac{180}{249}$, $z = \frac{197}{249}$,

$u = -\frac{58}{249}$, $v = \frac{105}{249}$, $w = \frac{17}{249}$, $p = \frac{88}{249}$, $q = \frac{126}{249}$,

$z = -\frac{38}{249}$, $s = \frac{202}{249}$, $t = \frac{164}{249}$, $a = \frac{47}{249}$.

21. В обоих случаях выигрывает второй.

Разработки составили: В.Л.Гутенмахер, С.Л.Табачников,

А.Л.Тоом.

Роталпринт НИИОП АПН СССР

129337. Москва. Ленская, 4

Заказ № 333 тираж 1500

Методическая комиссия ВЭМШ.

3 курс (10 к) 89/90

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

N 18

ЛОГАРИФИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

методические разработки для учащихся ВЗМШ

Хорошее пособие по теме, указанной
в заглавии; только, во второй нет про
логарифмическую и показательную функции

5/II - 90

Москва - 1985

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства :
Методические разработки для учащихся ВЗМШ. Б.П.Гейдман - М., изд.
АПН СССР, 15 с).

Разработки предназначены для учащихся Всесоюзной заочной математи-
ческой школы Академии педагогических наук СССР при Московском
университете им. М.В.Ломоносова (ВЗМШ) - выпускников общеобразова-
тельных школ и СПТУ.

Приведены основные схемы решения показательных и логарифмичес-
ких уравнений и неравенств, разобрано 25 примеров, дано 5 тестов и
дана контрольная работа на проверку качества усвоения материала,
указаны критерии ее оценки.

О г л а в л е н и е

Предисловие	стр. 3
§ 1. Равносильность и следование предложению	4
§ 2. Логарифмические и показательные уравнения	5
§ 3. Логарифмические и показательные неравенства ...	10
§ 4. некоторые частные приемы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств	12
§ 5. Задание № 18	16
ключ к тестам	17

Предисловие

Настоящее пособие построено по следующему плану.

В § 1 мы напоминаем некоторые основные понятия.

§§ 2-4 посвящены логарифмическим и показательным уравнениям
и неравенствам, основной прием решения которых состоит в построе-
нии цепочки равносильных переходов.*) После нескольких переходов
мы приходим к простейшему уравнению или неравенству, системе или
совокупности простейших уравнений и неравенств.

Пять тестовых заданий, помещенных в тексте, помогут Вам на-
учиться осуществлять равносильные переходы. Ключ к тестам (номера
правильных ответов) Вы найдете в конце пособия.

Пятый параграф - задание № 18, которое Вы должны выполнить
к .

Советуем использовать как дополнительную литературу материал
§§ 1-6 главы УП "Сборника задач по алгебре и началам анализа для
9-10 классов", пособие для учителей, Москва, "Просвещение", 1978,
авторы: Ивлев Б.М., Земляков А.Н. и др.

В качестве справочного материала приводим перечень основных
формул по данной теме.

Действия со степенями.

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; \quad (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p; \quad (a^p)^q = a^{pq}.$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

(здесь a и b - любые положительные числа; p и q - любые дей-
ствительные числа).

*) Под равносильным переходом понимается переход от данного
предложения к равносильному (см. § 1 настоящего пособия).

2-2553

Основное логарифмическое тождество.

$$a^{\log_a b} = b \quad (\text{здесь } a > 0, a \neq 1, b > 0).$$

Действия с логарифмами.

$$\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v; \quad \log_a u^k = k \log_a u;$$

$$\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v; \quad \log_a u = \frac{\log_b u}{\log_b a}.$$

(здесь $a > 0; a \neq 1; b > 0; b \neq 1; u > 0; v > 0$, k — любое действительное число).

§ 1. Равносильность и следование предложений.

1°. Если множество решений одного предложения (уравнения, неравенства или системы) A принадлежит множеству решений другого предложения B , то второе предложение называется следствием первого. Это обозначается так: $A \Rightarrow B$; читается: "из A следует B ".

Тест 1. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак " \Rightarrow ". Укажите этот пример.

$$① \log_2 x = \log_2 (2-x^2) \Rightarrow x = 2-x^2.$$

$$② \log_x \frac{1}{3} = \log_{2-x^2} \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2-x^2.$$

$$③ \log_x (2-x^2) < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2-x^2 < x, \\ 2-x^2 > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$④ 2^{\log_2 x} = 2-x^2 \Rightarrow x = 2-x^2.$$

$$⑤ \log_2 x < \log_2 (2-x^2) \Rightarrow x < 2-x^2.$$

2°. Предложения A и B называются равносильными, если множества их решений совпадают. Это обозначается так: " $A \Leftrightarrow B$ ".

Тест 2. Одна из следующих пар предложений состоит из неравносильных предложений. Укажите эту пару.

$$① \lg x = 0 \text{ и } x = 1.$$

$$② x^2 \geq 0 \text{ и } 2^x > 0.$$

$$③ \log_2 x > 1 \text{ и } x > 2.$$

$$④ \lg x = \lg y \text{ и } x = y.$$

$$⑤ 2^x + 2^{-x} = 1 \text{ и } \lg x = \lg(-x).$$

Тест 3. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак " \Leftrightarrow ". Укажите этот пример.

$$① \log_{\frac{1}{2}} (x^2-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0, \\ x^2-1 < 1. \end{cases}$$

$$② \log_x (2-x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = x^2, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$③ (\sin x + \sqrt{2})^x < 1 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \sin x + \sqrt{2} < 1, \\ x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin x + \sqrt{2} > 1, \\ x < 0. \end{cases} \right)$$

$$④ x \log_2 x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ или } \log_2 x = 0).$$

$$⑤ \log_2 x = \log_2 (2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x-1, \\ x > 0. \end{cases}$$

§ 2. Логарифмические и показательные уравнения.

При решении показательных и логарифмических уравнений можно пользоваться такими равносильными переходами:

$$\begin{cases} a^p = a^q, \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = q, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ u > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v, \\ v > 0, \\ a > 0, \\ a \neq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Равносильность следует из строгой монотонности как показательной, так и логарифмической функции.

Имеет место равносильный переход, выражающий определение логарифма:

$$\begin{cases} a^p = b, \\ a > 0, \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (p = \log_a b). \quad (3)$$

Рассмотрим несколько примеров решения показательных и логарифмических уравнений, с которыми Вы встречаетесь на уроках алгебры и начал анализа.

Пример 1. $2^{x^2-3x+4} = 4$.

Решение. $(2^{x^2-3x+4} = 2^2) \Leftrightarrow (x^2-3x+4 = 2)$.

Здесь мы сделали равносильный переход (1): показательная функция $y = 2^u$ - возрастающая, а потому каждое свое значение она принимает только один раз. Решая уравнение $x^2-3x+4 = 2$, получаем ответ.

Ответ: $\{1; 2\}$.

Пример 2. $3^{x-3} = 7$.

Решение. По определению логарифма, имеем:

$(3^{x-3} = 7) \Leftrightarrow (x-3 = \log_3 7) \Leftrightarrow (x = 3 + \log_3 7)$.

Ответ можно записать по-разному:

$\{3 + \log_3 7\}$ или $\{\log_3 189\}$.

Пример 3. $2^{2x-1} = 3^{2x-1}$.

Решение. Показательная функция не обращается в нуль ни при каком значении аргумента, поэтому

$(2^{2x-1} = 3^{2x-1}) \Leftrightarrow ((\frac{2}{3})^{2x-1} = 1)$.

По определению логарифма, последнее уравнение равносильно такому:

$(2x-1 = 0) \Leftrightarrow (x = \frac{1}{2})$.

Ответ: $\{\frac{1}{2}\}$.

Можно решать это уравнение, "логарифмируя" обе части его, то есть пользуясь равносильным переходом (2). Покажем этот способ решения на следующем примере.

Пример 4. $3^{x+1} = 5^{x-2}$.

Решение. Воспользуемся равносильным переходом (2): логарифмическая функция строго монотонна, поэтому каждое свое значение она принимает ровно один раз.

$(3^{x+1} = 5^{x-2}) \Leftrightarrow (\lg 3^{x+1} = \lg 5^{x-2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ((x+1)\lg 3 = (x-2)\lg 5) \Leftrightarrow (x(\lg 3 - \lg 5) = -\lg 3 - 2\lg 5) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (x = \frac{\lg 3 + 2\lg 5}{\lg 5 - \lg 3})$.

Ответ можно записать в таком виде: $\left\{ \frac{\lg 3 + 2\lg 5}{\lg 5 - \lg 3} \right\}$,

или так: $\left\{ \frac{\lg 75}{\lg 5/3} \right\}$, или так: $\left\{ \frac{1 + 2\lg_3 5}{\log_3 5 - 1} \right\}$.

Теперь рассмотрим примеры 5-9, в которых равносильный переход (2) постепенно "набирает силу".

Пример 5. $\log_5 (x-2) = 1$.

Решение. $(\log_5 (x-2) = 1) \Leftrightarrow (x-2 = 5) \Leftrightarrow (x = 7)$.

Ответ: $\{7\}$.

Пример 6. $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$.

Решение. $(\log_7 \log_3 \log_2 x = 0) \Leftrightarrow (\log_3 \log_2 x = 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_2 x = 3) \Leftrightarrow (x = 8)$.

Ответ: $\{8\}$.

Пример 7. $\log_x (x^2 - 4x + 4) = 1$.

Решение. $(\log_x (x^2 - 4x + 4) = 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = x, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 4 \text{ или } x = 1, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = 4)$.

Ответ: $\{4\}$.

Пример 8. $\log_2 (x^2 - 3x + 1) = \log_2 (2x - 3)$.

Решение. $(\log_2 (x^2 - 3x + 1) = \log_2 (2x - 3)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 3x + 1 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x = 4 \text{ или } x = 1, \\ x > \frac{3}{2} \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = 4)$.

Ответ: $\{4\}$.

Остановимся подробнее на решении следующего уравнения.

Пример 9. $\log_{2x}(x^2-2x) = \log_{2x}(2x-3)$.

Решение. Логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел, поэтому необходимо выполнение условий $x^2-2x > 0$ и $2x-3 > 0$.

Основание логарифмической функции - положительное, отличное от единицы, число, откуда $2x > 0$ и $2x \neq 1$.

В силу строгой монотонности логарифмической функции из уравнения вытекает еще одно необходимое условие: $x^2-2x = 2x-3$.

Учитывая, что из $x^2-2x = 2x-3$ и $2x-3 > 0$ следует $x^2-2x > 0$, приходим к равносильному переходу (2):

$$(\log_{2x}(x^2-2x) = \log_{2x}(2x-3)) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2-2x = 2x-3, \\ 2x-3 > 0, \\ 2x \neq 1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2-4x+3=0, \\ x > 3/2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=3 \text{ или } x=1, \\ x > 3/2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x=3).$$

Ответ: $\{3\}$.

Замечание. Вместо цепочки равносильных переходов часто используют переходы к следствию. При этом возможно появление посторонних корней, которые в конце решения необходимо отбросить, например, с помощью проверки. Проиллюстрируем это на том же примере 9.

$$(\log_{2x}(x^2-2x) = \log_{2x}(2x-3)) \Rightarrow (x^2-2x = 2x-3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2-4x+3=0) \Leftrightarrow (x=3 \text{ или } x=1).$$

Проверка. $x=3$ является решением данного уравнения, так как при $x=3$ уравнение обращается в тождество $\log_6 3 = \log_6 3$.
 $x=1$ не является решением данного уравнения, так как логарифм отрицательного числа не определен.

Ответ: $\{3\}$.

Обратите внимание, что в цепочке переходов от одного уравнения к другому один раз встретился знак следования " \Rightarrow " (все остальные переходы были равносильны), поэтому получившаяся совокупность уравнений ($x=3$ или $x=1$) является следствием данного уравнения.

В примерах 10-12 надо выполнить некоторые действия над логарифмами, входящими в уравнение (см. формулы из справочного материала). При этом приходится следить за равносильностью переходов.

Советуем предварительно выполнить задания теста 4.

Тест 4. В одном из приведенных ниже примеров неверно поставлен знак " \Leftrightarrow ".

Укажите этот пример.

① $3 \log_a b = c \Leftrightarrow \log_a b^3 = c$.

② $-\log_a b = c \Leftrightarrow \log_a \frac{1}{b} = c$.

③ $\frac{1}{3} \log_a b = c \Leftrightarrow \log_a \sqrt[3]{b} = c$.

④ $2 \log_a b = c \Leftrightarrow \log_a b^2 = c$.

⑤ $\frac{1}{2} \log_a b = c \Leftrightarrow \log_a \sqrt{b} = c$.

Пример 10. $\lg x + \lg(x+3) = 1$.

Решение. $(\lg x + \lg(x+3) = 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \lg((x+3) \cdot x) = 1, \\ x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x(x+3) = 10, \\ x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2+3x-10=0, \\ x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=-5 \text{ или } x=2, \\ x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x=2)$. Поясним равносильность первого перехода. Здесь мы воспользовались формулой $\log_a u + \log_a v = \log_a(uv)$, левая часть которой имеет смысл, когда $u > 0$ и $v > 0$, а правая часть - когда $uv > 0$. Поэтому после перехода появляется дополнительное условие $u > 0$ или $v > 0$.

Замечание. Советуем запомнить соответствующий равносильный переход:

$$(\log_a u + \log_a v = c) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} \log_a(uv) = c, \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_a(uv) = c, \\ v > 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Пример 11. $\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1$.

Решение. $(\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1) \Leftrightarrow (\frac{1}{2} \log_6(x-2) + \frac{1}{2} \log_6(x-11) = 1) \Leftrightarrow (\log_6(x-2) + \log_6(x-11) = 2)^* \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \left(\begin{cases} (x-2)(x-11) = 36, \\ x-2 > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x^2-13x-14=0 \\ x > 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=14 \text{ или } x=-1, \\ x > 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x=14).$

Замена выражения $\log_6 \sqrt{x-2}$ на $\frac{1}{2} \log_6(x-2)$ дает возможность перейти к равносильному уравнению, так как область определения

этих выражений одна и та же (см. (5) пример теста 4).

Равносильность перехода (*) обсуждалась выше - (6).

Ответ: {14}.

Пример 12. $\log_4 x^2 + \log_2 (x+2) = \log_2 \log_5 5$.

Решение. Воспользуемся тождеством $\log_a b^2 = 2 \log_a |b|$

(сравните с (4) примером теста 4) и заменим выражение $\log_4 x^2$ на $\log_2 |x|$. В результате получим равносильное уравнение:

$\log_2 |x| + \log_2 (x+2) = \log_2 1$. При следующем переходе мы опускаем условие $x+2 > 0$ (или $x \neq 0$), так как из уравнения $|x|(x+2) = 1$ следует, что $x \neq 0$ и $x+2 > 0$.

Итак, $(|x| \cdot (x+2) = 1)$

$$\left(\begin{cases} x > 0, \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \right. \text{ или } \left. \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x > 0, \\ x = -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \right. \text{ или } \left. \begin{cases} x < 0, \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} - 1 \text{ или } x = -1)$$

Ответ: $\{-1; \sqrt{2} - 1\}$.

§ 3. Логарифмические и показательные неравенства.

Из строгой монотонности логарифмической и показательной функции следует равносильность таких переходов:

$$\begin{cases} a^p > a^q, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p > q, \\ a > 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} a^p > a^q, \\ 1 > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < q, \\ 1 > a > 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \log_a u > \log_a v, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u > v, \\ v > 0, \\ a > 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \log_a u > \log_a v, \\ 1 > a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < v, \\ u > 0, \\ 1 > a > 0 \end{cases} \quad (10)$$

Тест 5. Среди приведенных высказываний найдите истинное:

- ① $(\sqrt{5}-2)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$.
- ② $\log_{\sqrt{3}-1} x < 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{3}-1$.
- ③ $\log_x (\sqrt{5}-1) > 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-1 > x$.
- ④ $(\sqrt{3}-1)^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.
- ⑤ $\log_{\sqrt{5}-2} x > 1 \Leftrightarrow x < \sqrt{5}-2$.

Приведем несколько примеров решения показательных и логарифмических неравенств.

Пример 13. $2^{3x} < 2^{x^2+2}$.

Решение. $(2^{3x} < 2^{x^2+2}) \Leftrightarrow (3x < x^2+2)$.

Здесь мы сделали равносильный переход (7): показательная функция $y = 2^t$ - возрастающая. Далее решаем квадратное неравенство $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Ответ: $]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$.

Пример 14. Логарифмическая функция $y = \log_{0.5} t$ - убывающая.

Имеет место равносильный переход (10):

$$(\log_{0.5} (x+1) > \log_{0.5} (2-x)) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x+1 < 2-x, \\ x+1 > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x > -1. \end{cases} \right)$$

Ответ: $]-1; \frac{1}{2}[$.

Пример 15. $(\frac{1}{3})^{2x} < 2$.

Решение. Заменив в правой части 2 на $(\frac{1}{3})^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$ и воспользовавшись убыванием показательной функции $y = (\frac{1}{3})^t$, приходим к неравенству $2x > \log_{\frac{1}{3}} 2$ (равносильный переход (8)).

Ответ: $] \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 2; +\infty[$.

Пример 16. $\log_x (2-x) < 1$.

Здесь следует обратить внимание на то, что переменная x входит в основание логарифма.

Решение. Логарифмическая функция возрастает, когда основание больше единицы (равносильный переход (9)) и убывает, когда оно

положительно но не меньше единицы (равносильный переход (10)):

$$(\log_x(2-x) < 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 > x > 0, \\ 2-x > x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 1, \\ 2-x \leq x, \\ 2-x > 0 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 > x > 0, \\ x < 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 1, \\ x < 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (1 > x > 0 \text{ или } 2 > x > 1).$$

Ответ: $]0; 1[\cup]1; 2[$.

§ 4. Некоторые частные приемы решения показательных и логарифмических уравнений.

Распространенный способ решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств - замена переменной, сводящая уравнение или неравенство к алгебраическому (без логарифмической и показательной функций).

После решения алгебраического уравнения или неравенства остается решить совокупность или систему простейших показательных или логарифмических уравнений и неравенств.

Пример 17. $x^{\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 5} = \frac{1}{x}$.

Решение. "Прологарифмируем" уравнение по основанию 2.

$$(x^{\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 5} = \frac{1}{x}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 5) \log_2 x = -\log_2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x = 0 \text{ или } \log_2^2 x - 3 \log_2 x - 4 = 0).$$

Решением первого уравнения этой совокупности является $x = 1$. Делаем замену $\log_2 x = a$ для второго уравнения, получаем $a = 4$ или $a = -1$, откуда $x = 16$ или $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\{\frac{1}{2}; 1; 16\}$.

Замечание. При решении этого уравнения способом сравнения степеней с одинаковыми основаниями:

$$x^{\log_2^2 x - 3 \log_2 x - 5} = x^{-1}$$

довольно часто теряется решение $x = 1$ (приравниваются только показатели степеней, а случай равенства основания степени единице не рассматривается).

Пример 18. $\log_{3x} 3 - \log_{3x} x + \log_3^2 x = 1$.

Решение. Приведем все логарифмы к одному основанию. Тогда уравнение примет вид: $\frac{1}{\log_3 x + 1} - \frac{\log_3 x}{\log_3 x + 1} + \log_3^2 x = 1$.

Сделаем замену $\log_3 x = y$. Получим:

$$\left(\frac{1-y}{1+y} + y^2 - 1 = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\frac{(1-y)(1-(1+y)^2)}{1+y} = 0 \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} y = 1 \text{ или } y(2+y) = 0, \\ y \neq -1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (y = 1 \text{ или } y = 0 \text{ или } y = -2).$$

Итак, $(\log_3 x = 1 \text{ или } \log_3 x = -2 \text{ или } \log_3 x = 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x = 3 \text{ или } x = \frac{1}{9} \text{ или } x = 1).$$

Ответ: $\{\frac{1}{9}; 1; 3\}$.

Пример 19. $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

Решение. Так как $81^x \neq 0$ при любом значении переменной x , то данное уравнение равносильно такому:

$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 2.$$

Положив $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, получим уравнение $(3y^2 + y - 2 = 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (y = -1 \text{ или } y = \frac{2}{3}).$$

Итак, $\left(\frac{4}{9}\right)^x = -1$ или $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$. Первое уравнение решений не имеет, так как $\left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$ при любом значении x , а решением второго уравнения является $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\{\frac{1}{2}\}$.

Пример 20. $(4 + \sqrt{15})^x + (4 - \sqrt{15})^x = 62$.

Решение. Заметим, что $(4 + \sqrt{15})^x \cdot (4 - \sqrt{15})^x = 1$.

Сделав замену $(4 + \sqrt{15})^x = y$, получим уравнение $y + \frac{1}{y} = 62$, решениями которого являются числа $31 \pm 8\sqrt{15}$. Следовательно,

$$(4 + \sqrt{15})^x = 31 + 8\sqrt{15} \quad \text{или} \quad (4 + \sqrt{15})^x = 31 - 8\sqrt{15}.$$

Решениями этих уравнения являются соответственно числа 2 и (-2), так как $31 \pm 8\sqrt{15} = (4 \pm \sqrt{15})^2$.

Ответ: $\{-2; 2\}$.

Пример 21. $\frac{1}{2^{x-1}} < \frac{1}{1-2^{x-1}}$.

Решение. Сделаем замену $2^{x-1} = y$. Тогда

$$\left(\frac{1}{2y-1} < \frac{1}{1-y}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{2-3y}{(2y-1)(1-y)} < 0\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((2-3y)(2y-1)(1-y) < 0) \Leftrightarrow (y < \frac{1}{2} \text{ или } \frac{2}{3} < y < 1).$$

Итак, $(2^{x-1} < \frac{1}{2} \text{ или } \frac{2}{3} < 2^{x-1} < 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ или } \log_2 \frac{4}{3} < x < 1).$$

Ответ: $]-\infty; 0[\cup]\log_2 \frac{4}{3}; 1[$.

Пример 22. $\log_x(2x) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}$.

Решение. $(\log_x(2x) \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}) \Leftrightarrow (\log_x 2 + 1 \leq \sqrt{\log_x 2 + 3})$.

Сделаем замену $\log_x 2 = y$. Получим:

$$(y+1 \leq \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} y+1 < 0, \\ y+3 \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y+1 \geq 0, \\ y+3 \geq (y+1)^2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3 \leq y < -1 \text{ или } -1 \leq y \leq 1) \Leftrightarrow (-3 \leq y \leq 1).$$

Итак, $(-3 \leq \log_x 2 \leq 1) \Leftrightarrow \left(\begin{cases} 1 > x > 0, \\ x^{-3} \geq 2, \\ x \leq 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 1, \\ x^{-3} \leq 2, \\ x \geq 2 \end{cases}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (0 < x \leq \sqrt[3]{1/2} \text{ или } x \geq 2).$$

Ответ: $]0; \sqrt[3]{1/2}] \cup [2; +\infty[$.

Менее стандартным способом решаются следующие уравнения.

Пример 23. $3^x + 4^x = 5^x$.

Решение. Воспользуемся тем, что $5^x > 0$ при любом значении переменной x , и перейдем к равносильному уравнению

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$$

. Заметим, что $x=2$ - решение этого уравнения. Покажем, что других решений нет.

Функция $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ как сумма двух убывающих функций является убывающей, а потому каждое свое значение она

принимает только один раз.

Ответ: $\{2\}$.

Пример 24. $2^{\log_5 x} + x^{\log_5 x} = 7 - 4^{\frac{1}{3} \log_4 27}$.

Решение. Докажем, что $2^{\log_5 x} = x^{\log_5 2}$.

Действительно: $2^{\log_5 x} = 2^{\frac{\log_2 x}{\log_2 5}} = (2^{\log_2 x})^{\frac{1}{\log_2 5}} = x^{\log_5 2}$.

Учитывая этот результат, получим:

$$(2 \cdot 2^{\log_5 x} = 7 - 4^{\frac{1}{3} \log_4 27}) \Leftrightarrow (2 \cdot 2^{\log_5 x} = 7 - 3) \Leftrightarrow (2^{\log_5 x} = 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_5 x = 1) \Leftrightarrow (x = 5).$$

Ответ: $\{5\}$.

Пример 25. Сколько решений имеет уравнение $e^x = x^2$?

Решение. Уравнение $e^x = x^2$ равносильно уравнению $e^x - x^2 = 0$.

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - x^2$, её производную $f'(x) = e^x - 2x$ обозначим через $g(x)$. Эта новая функция имеет единственную критическую точку $x = \ln 2$ ($g'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2).$$

В точке $x = \ln 2$ функция $g(x) = e^x - 2x$ непрерывна и принимает значение $g(\ln 2) = 2 - \ln 2$. При $x < \ln 2$ значения $g'(x) = e^x - 2$ отрицательны, а потому $g(x)$ убывает на промежутке $]-\infty; \ln 2]$. При $x > \ln 2$ значения $g'(x)$ положительны - функция $g(x)$ возрастает на промежутке $[\ln 2; +\infty[$.

Следовательно, $g(\ln 2)$ - наименьшее значение функции $g(x)$. $g(x) > g(\ln 2) = 2 - \ln 2 > 0$ (действительно, $2 - \ln 2 > 0 \Leftrightarrow e^2 > 2$, что очевидно, так как $e = 2,7... > 2$). Приходим к следующему результату: производная $g(x)$ функции принимает только положительные значения, а значит $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

2. Функция $f(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

$$f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0, \text{ а } f(0) = 1.$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ существует, по крайней мере, одно значение x_0 такое, что $f(x_0) = 0$. А так как, по доказанному, $f(x)$ - возрастающая функция, то каждое свое значение она принимает только один раз. Это означает, что данное уравнение имеет единственное решение.

В заключение несколько слов по поводу уравнений, в которых встречается "степенно-показательная" функция $y = (f(x))^{g(x)}$.

Мы будем считать, что эта функция определена, если $f(x) > 0$.

Возможны и другие определения. Единой, общепринятой договоренности в этом случае нет. Если Вам встретилась задача с такой функцией, надо обязательно четко указать, какого определения Вы придерживаетесь. Так, при нашем определении значения $x=0$ и $x=-1$ не являются корнями уравнения $x = x^{x+2}$, так как эти значения не входят в область определения функции $y = x^{x+2}$.

§ 5. Зада н и е №

Обязательные задачи

Решите уравнения (№№ I-10).

1. $7 \cdot 5^x - 5^{x+2} = -90$.
2. $2^{3x-1} = 5 \cdot 3^{6x-2}$.
3. $3^x - 2^{x+2} = 3^{x-1} - 2^{x-1} - 2^{x-3}$.
4. $\log_3(x+6) + \log_3(x-2) = 2$.
5. $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} = 1$.
6. $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.
7. $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} = \sqrt{x}$.
8. $x(1 - \lg 5) = \lg(4^x - 12)$.
9. $(\log_x(9x^2)) \cdot \log_3^2 x = 4$.
10. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$.

Решите системы уравнений (№№ II, I2).

- II. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ y - x = 2. \end{cases}$
- I2. $\begin{cases} \lg x + \lg y = \frac{5}{4}, \\ \log_x 10 + \log_y 10 = 5. \end{cases}$

Указание. Прочтите и разберите примеры параграфа "Системы уравнений" учебного пособия "Алгебра и начала анализа, 9-10".

Решите неравенства (№№ I3-I8).

13. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2+4x}{2x-3} < 1$.
14. $3^{\log_2 \frac{x-1}{x+2}} < \frac{1}{9}$.
15. $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0$.
16. $\log_x(x-2) \leq 0$.
17. $(\log_x 2) \cdot (\log_{2x} 2) \log_2(4x) \geq 1$.
18. $2^{2x+2} > 6^x + 2 \cdot 3^{2x+2}$.

19. Найдите наименьшее значение функции $x \ln x - x \ln 5$ на отрезке $[1; 5]$.

Дополнительные задачи

Решите уравнения (№№ 20-24).

20. $2^{\log_5 x} - 5 \cdot x^{\log_3 2} + 6 = 0$.
21. $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$.
22. $2^{\sqrt[3]{2 \log_{16}^2 x}} - \sqrt[3]{\log_2 x} - 6 = 0$.
23. $\lg^2\left(1 + \frac{4}{x}\right) + \lg^2\left(1 - \frac{4}{x+4}\right) = 2 \lg^2\left(\frac{2}{x-1} - 1\right)$.
24. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 2^x$.

Решите систему уравнений:

25. $\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}, \\ \lg_4 y \cdot \log_y(y-3x) = 1. \end{cases}$

Решите неравенства (№№ 26-31).

26. $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3$.
27. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} < -\log_x 5$.
28. $\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}$.
29. $\log_{(x-3)}(x^2-4x)^2 \leq 4$.
30. $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$.
31. $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$.

32. Сколько решений имеет уравнение $\ln 2x = \frac{x}{2}$?

Решение каждой задачи должно содержать необходимые рассуждения, объясняющие равносильность того или иного перехода.

Срок присылки задания №

Критерии оценок

Обязательные задачи:

- "3" - решено не менее 9 задач;
- "4" - решено не менее 14 задач;
- "5" - решены все 19 задач.

При выполнении обязательной части задания должно быть решено не менее трех неравенств.

Дополнительные задачи: "4" - решено не менее 4 задач; "5" - решено не менее 8 задач.

Ключ к тестам

Номер теста	1	2	3	4	5
Номер правильного ответа	(3)	(4)	(4)	(4)	(2)

Ф.П.Л. 1,25 Тираж 10000

Типография ХОЗУ Миннефтепрома. Зак. 2553

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ III КУРСА ВЗМШ
ПО ПРОВЕРКЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ
"ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА"

Москва 1981

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

для преподавателей III курса ВЗМШ по проверке задания
по теме "Логарифмические и показательные уравнения и
неравенства".

I. Общие замечания.

Цель задания – помочь учащимся хорошо овладеть навыками
решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Основной прием решения таких задач состоит в равносильных
преобразованиях условия, приводящих к решению простейших уравне-
ний или неравенств, их систем или совокупностей.

Следует внимательно проверить равносильность переходов,
выполняемых учащимися при решении упражнений этого задания, в
особенности при решении неравенств. Если учащиеся переходили
не к равносильному предложению, а к следствию, а затем проводи-
ли необходимые рассуждения для выделения решения данного уравне-
ния или неравенства (учитывали ОДЗ, делали проверку и т.д.), то
разумеется, такой способ решения считается верным.

На том или ином этапе решения логарифмических и показате-
льных уравнений и неравенств приходится пользоваться монотонностью
как логарифмической, так и показательной функции. Отсутствие
ссылки на свойства этих функций является недочетом и оценка за
соответствующее упражнение должна быть снижена до "2".

II. Замечания по проверке некоторых задач.

Условие	Указание
<u>Обязательные задачи</u>	
7. $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} = \sqrt{x}$	Если нет решения $x=1$, то ставить "2".
13. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 1$	Не следует снижать оценку за отдель- ное решение неравенств $\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > 0$ (так называемое ОДЗ) и $\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > \frac{1}{3}$, но стоит обратить внимание учащегося, что неравенство 13 равносильно не- равенству $\frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > \frac{1}{3}$, и он сде- лал лишнюю работу.

Условие	Указание
16. $\log_x(x-2) \leq 0$.	За иррациональное решение (разбор случаев $x > 1$ и $1 > x > 0$) оценку не снижать, заметить учащемуся, что данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x-2 > 0 \\ x-2 \leq 1 \end{cases}$, так как выражение $\log_x(x-2)$ имеет смысл при $x-2 > 0$, то есть при $x > 2$.
17. $(\log_x 2)(\log_{2x} 2) \cdot \log_2(4x) > 1$.	Обратить внимание на грубую ошибку, которую допускают учащиеся, заменяя неравенство типа $\frac{a}{b} \geq 1$ неравносильным ему неравенством $a \geq b$. При наличии такой ошибки ставить не больше "+".

Дополнительные задачи.

20. $2^{\log_{\sqrt{3}} x} - 5 \cdot x^{\log_{\sqrt{3}} 2} + 6 = 0$.
21. $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$.
24. $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^x + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^x = 2$.
26. $x^{\lg x} > 10x^{-\lg x} + 3$.
27. $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} < -\log_x 5$.
- Если учащийся не справился с этим упражнением, то рекомендовать ему разобрать пример 24 пособия.
- Если нет одного из двух решений, то ставить "+".
- Если учащийся не справился с этим упражнением, то рекомендовать ему разобрать пример 23 пособия.
- Затруднение вызывает решение неравенства $x^{\lg x} > 5$, до которого учащиеся, как правило, доводят решение неравенства 26. Если это неравенство решено неверно, то следует поставить "+" и показать, как решается неравенство $x^{\lg x} > 5$.
- Сделав замену $y = \log_x 5$, учащиеся, как правило, неверно решают иррациональное неравенство $\sqrt{\frac{1}{2}(y+1)} < -y$.
- Следует им напомнить, как решаются такие задачи. Вызывает трудность еще один момент: как решать двойное неравенство $-1 \leq \log_x 5 < -\frac{1}{2}$?
- Следует показать, что имеет место такой равносильный переход: $-1 \geq \log_5 x > -2$, откуда сразу получается решение $\frac{1}{5} \geq x > \frac{1}{25}$.

Условие	Указания
28. $\log_2 \log_3 \frac{x+1}{x-1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x+1}$.	Если учащийся не справился с этим упражнением, то следует показать, что оно равносильно такому двойному неравенству: $0 < \log_3 \frac{x-1}{x+1} < 1$.
29. $\log_{x-5}(x^2-4x)^2 \leq 4$.	Если учащийся не справился с этим упражнением, то рекомендовать ему разобрать пример 16 пособия.
32. Сколько решений имеет уравнение $\ln 2x = \frac{x}{2}$?	Если учащийся не справился с этим упражнением, то рекомендовать ему разобрать пример 19 пособия.

Разработки составил Б.П.Гейдман.

Методическая комиссия ВЗМШ.

Формат бумаги 60x90^{1/16}
В печать 05.08.81 Тираж 1500 экз.
Печ.л. 0,25 Уч.-изд.л. 0,16 Заказ 4694

Производственно-издательский комбинат ВИНТИ
Люберцы, Октябрьский проспект, 403

АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся III курса ВЗМШ

Тема:
"Метод координат в геометрии"

*Тема хорошо раскрыта, но узка
В последних переизданиях "Приложение"
не переиздавалось*

Москва, 1980

*Выпущен с примерами
координат*

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся III курса ВЗМН
(тема "Метод координат в геометрии")

Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ

Одним из самых общих методов математики является метод координат. Он позволяет переводить геометрические задачи на алгебраический язык и наоборот, алгебраические задачи представить геометрически.

В настоящем задании собраны основные сведения о методе координат, которые у Вас имеются, чтобы охватить одним взглядом пройденный материал.

В I части задания, "Основные формулы метода координат", Вы увидите, что список этих формул сравнительно невелик.

Во II части, "Расстояние от точки до плоскости", мы подробно остановимся на новой для Вас формуле, которая часто помогает при решении задач.

Применение метода координат требует определенных технических навыков. В III части собраны разные задачи по стереометрии из школьного учебника и материалов вступительных экзаменов в ведущие вузы Москвы. Часть из них решена в тексте, часть — снабжена указаниями.

З а д а н и е

Обязательные задачи: № 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 16, 18, 21а).

Дополнительные задачи: № 13, 17, 20, 21б), 22, 23.

Критерии оценок.

Обязательные задачи: "зачет" — решено не менее 7 обязательных задач:

"4" — решено не менее 9 обязательных задач;

"5" — решены все 12 обязательных задач.

Дополнительные задачи: "4" — решено не менее 3 дополнительных задач

"5" — решено 5-6 дополнительных задач.

I. Основные формулы метода координат

A. Координаты точек.

На плоскости

Как только на плоскости выбрана система координат OXY , каждой точке A плоскости ставится в соответствие пара чисел $(x; y)$ — её координаты. Соответствие между точками плоскости и парами чисел взаимно однозначно (т.е. каждой точке соответствует одна пара чисел и обратно).

Середина отрезка между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ имеет координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$. Вообще, точка, делящая отрезок A_1A_2 в отношении $P_1:P_2$, имеет координаты

$$(\frac{P_2x_1+P_1x_2}{P_1+P_2}; \frac{P_2y_1+P_1y_2}{P_1+P_2})$$

Расстояние между точками

$A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ равно

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Отсюда следует, что множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, есть окружность с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиуса r .

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax + by + c = 0$$

(a, b, c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно), есть прямая. Обратно, каждая прямая задается уравнением $ax + by + c = 0$. При этом числа a, b, c определяются для данной прямой однозначно с точностью до пропорциональности (если умножить их все на одно и то же

В пространстве

Как только в пространстве введена система координат $OXYZ$, каждой точке A пространства ставится в соответствие тройка чисел $(x; y; z)$.

Середина отрезка между точками $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты

$$(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2})$$

Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Множество точек $(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2,$$

— сфера радиуса r с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax + by + cz + d = 0$$

(a, b, c, d — некоторые числа, причем $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), есть плоскость.

число k , то полученное уравнение $kax + kby + kc = 0$ будет определять ту же прямую).

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой ℓ , задаваемой уравнением $ax + by + c = 0$, равно

$$\rho(M, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

B. Координаты векторов.

На плоскости

Пусть на плоскости задана пара взаимно перпендикулярных единичных векторов \vec{i}, \vec{j} . Каждый вектор \vec{u} на плоскости можно разложить по векторам \vec{i} и \vec{j} :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

то есть каждому вектору \vec{u} ставится в соответствие пара чисел $(x; y)$. Эти числа называются его координатами.

Длина $|\vec{u}|$ вектора $\vec{u} = (x; y)$ равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть заданы два вектора $\vec{u} = (x_1; y_1)$ и $\vec{v} = (x_2; y_2)$. Скалярное произведение

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$$

этих векторов вычисляется по формуле

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Величина угла φ между векторами \vec{u} и \vec{v} вычисляется с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Если $ax + by + c = 0$ — уравнение некоторой прямой, то вектор с координатами $(a; b)$ перпендикулярен этой прямой

Расстояние от точки

$A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости

$$\text{равно } \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

В пространстве

Пусть в пространстве задана тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Каждый вектор \vec{u} в пространстве можно разложить по векторам \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то есть каждому вектору \vec{u} ставится в соответствие тройка чисел $(x; y; z)$. Эти числа называются его координатами.

Длина $|\vec{u}|$ вектора $\vec{u} = (x; y; z)$ равна $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Пусть заданы два вектора $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$. Скалярное произведение

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$$

этих векторов вычисляется по формуле

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Величина угла φ между векторами \vec{u} и \vec{v} вычисляется с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Если $ax + by + cz + d = 0$ — уравнение некоторой плоскости, то вектор с координатами $(a; b; c)$ перпендикулярен этой плоскости

(этим свойством обладает и любой коллинеарный ему вектор $(la; lb)$).

(этим свойством обладает и любой коллинеарный ему вектор $(la; lb; lc)$).

II. Расстояние от точки до плоскости.

В учебнике "Геометрия 10" есть несколько задач, в которых требуется найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости. Как ни странно, эти задачи вызывают некоторые затруднения у школьников (несмотря на то, что одна из таких задач - № 28, с. 10 - решена в тексте). Поэтому мы остановимся на этом вопросе немного подробнее.

Пусть $A(x_0; y_0; z_0)$ - точка в координатном пространстве $Oxyz$ и α - плоскость, заданная уравнением $ax+by+cz+d=0$. Расстояние $\rho(A, \alpha)$ от точки A до плоскости α находится по формуле

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (*)$$

Эту формулу можно описать словами так (вывод её приведём позже):

Надо в выражение $ax+by+cz+d$ вместо переменных x, y, z подставить координаты точки A . Взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Примеры

1.*¹ Найти расстояние от точки $A(-1; 3; 0)$ до плоскости α , заданной уравнением $x-3y-2z+5=0$.

Решение. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|-1 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

2.**¹ Вычислить расстояние от начала координат до плоскости $2x+3y-6z+14=0$.

Решение. Нам надо найти расстояние от точки $A(0; 0; 0)$. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

*¹ Это задача № 298, 1) из учебника "Геометрия 10".

**¹ Это задача № 29, 2) из того же учебника.

3. Вычислить расстояние между плоскостями α и β , заданными соответственно уравнениями:

$$3x + 2y + 4z + 11 = 0$$

и

$$9x + 6y + 12z - 5 = 0.$$

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 3, видим, что плоскости α и β : $3x + 2y + 4z + 11 = 0$ и

$$3x + 2y + 4z - \frac{5}{3} = 0$$

параллельны.

Возьмем любую точку $A(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую плоскости β : положим, например, $x_0 = y_0 = 0$, тогда $z_0 = \frac{5}{12}$.

Легко понять, что расстояние между плоскостями α и β равно числу $\rho(A, \alpha)$, где $A = (0; 0; \frac{5}{12})$. Применяя формулу (*), получим

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \alpha) = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{12} + 11|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{38}{3\sqrt{29}}.$$

Замечание. В общем случае расстояние между параллельными плоскостями α и β

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

и

$$ax + by + cz + d_2 = 0$$

находится по формуле

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (**)$$

Выведите формулу (**), повторив решение задачи 3.

Вывод формулы (*).

Опустим из точки $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикуляр AB на плоскость α , заданную уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Пусть $B(x_1; y_1; z_1)$ - точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью α . Тогда $|AB|$ - расстояние от A до α (см. рис. 1). Поскольку вектор $\vec{AB} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$

перпендикулярен плоскости α , он коллинеарен вектору $\vec{n} = (a; b; c)$. Это означает, что $\vec{AB} \cdot \vec{n} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|$, если $\vec{AB} \parallel \vec{n}$, или $\vec{AB} = -|\vec{AB}| \cdot \vec{n}$, т.е. $|\vec{AB} \cdot \vec{n}| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|$.

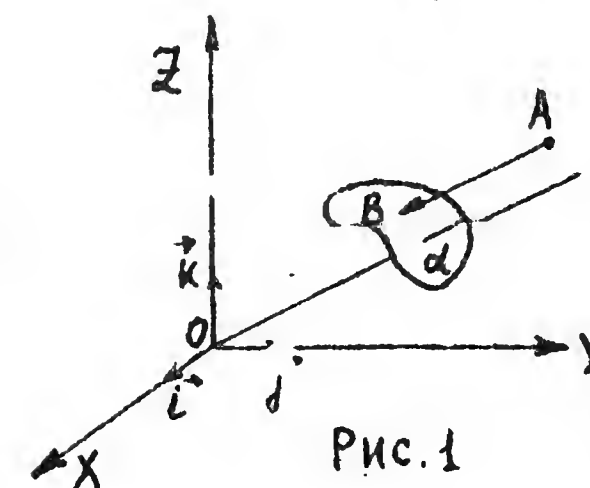


Рис. 1

Перепишем это равенство в координатах:

$$|(x_1 - x_0)a + (y_1 - y_0)b + (z_1 - z_0)c| = |\vec{AB}| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Но точка $B \in \alpha$, поэтому $a x_1 + b y_1 + c z_1 = -d$
и $|AB| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Формула (*) доказана.

Задачи

1. Вычислить расстояние от точки $A(1;1;1)$ до плоскости $x+y+z=0$.
2. Вычислить расстояние от точки $A(1;2;3)$ до плоскости $x+y+z-6=0$.
3. Найти расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + d = 0$ (решив эту задачу, Вы найдете формулу расстояния от точки для прямой на плоскости - подумайте, почему).
4. Найти уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 1 от плоскости $x+y+z=0$.
5. Какая фигура является пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости
а) $x+y+z=1$; б) $3x-4y-z=6$; в) $3x+4y=5$?

Указание. Радиус данной сферы имеет длину 1, центр её - в начале координат. Найдите расстояние от центра сферы до заданных плоскостей.

III. Разные задачи.

6. Пусть плоскость α проходит через три различные, не совпадающие с началом координат, точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ (лежащие соответственно на осях Ox , Oy , Oz). Доказать, что $\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где ρ расстояние от точки O до плоскости α .

7. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы при вершине - прямые. Найти длину её высоты, если длины её боковых ребер (выходящих из указанной выше вершины) равны a , b и c .

8. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длины 1. На его боковом ребре AA_1 взята точка E так, что $|AE| = \frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что $|BF| = \frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α . Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α .

Решение. Введем систему координат с центром в вершине B (см. рис. 2). Тогда

$$E = (1; 0; \frac{1}{3}); F = (0; \frac{1}{4}; 0); B_1 = (0; 0; 1);$$

$$O = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}).$$

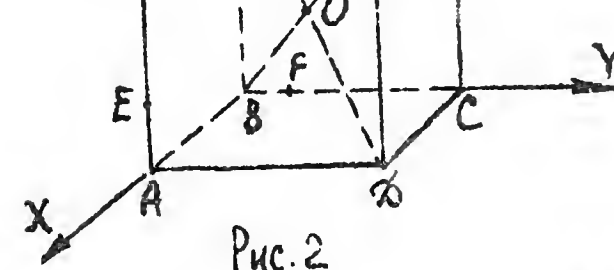


Рис. 2

Найдем уравнение плоскости α . Пусть это уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

Заметим, что α не проходит через начало координат, поэтому

$D \neq 0$ и уравнение (1) можно разделить на D ; получим следующее уравнение:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0$$

или

$$ax + by + cz + 1 = 0. \quad (2)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a , b и c подставим в уравнение (2) координаты трех точек E , F и O , удовлетворяющие этому уравнению (так как эти точки лежат в плоскости α). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{4} + c \cdot 0 + 1 = 0, \\ a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0, \end{cases}$$

углов называются направляющими косинусами вектора \vec{r} .

14. Вектор \vec{r} образует с осями Ox и Oy углы по 60° . Какой угол образует вектор \vec{r} с осью Oz ?

15. Вычислить угол между биссектрисами координатных углов xOy и yOz .

16. Центр нижнего основания куба соединен прямыми с четырьмя вершинами его верхнего основания. Вычислить углы между этими прямыми.

17. Найти величины углов между прямыми, соединяющими точку пересечения высот правильного тетраэдра с его вершинами.

18. В правильной треугольной призме боковые грани – квадраты. Через диагональ боковой грани и середину параллельного этой грани бокового ребра проведена плоскость. Найти угол её наклона к плоскости основания.

Замечание. Возможны различные решения этой задачи и совсем не обязательно пользоваться методом координат (это относится и к другим геометрическим задачам). Решайте задачи так, как Вам удобнее.

19. Основание пирамиды $SABC$ – правильный треугольник со стороной длины $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC длины 2 перпендикулярно плоскости основания. Найти величину угла и расстояние между прямыми, одна из которых проходит через вершину S и середину ребра BC , а вторая – через точку C и середину ребра AB .

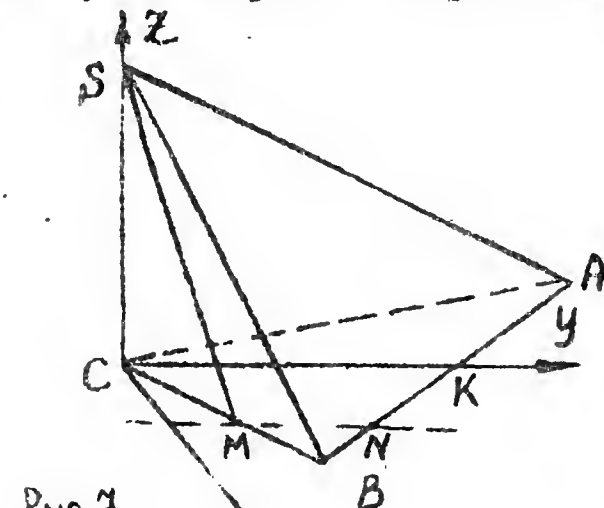


Рис. 7

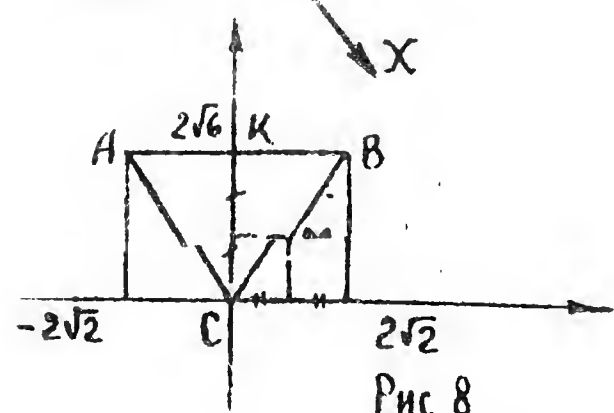


Рис. 8

Решение. Введем систему координат, как показано на рис. 7. Пусть M – середина ребра BC , K – ребра AB . Искомый угол будем искать как угол между векторами \vec{SM} и \vec{CK} . Имеем $S(0; 0; 2)$; $C(0; 0; 0)$; $K(0; 2\sqrt{6}; 0)$, $M(\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0)$ – см. рис. 8.

Поэтому $\vec{SM} = (\sqrt{2}; \sqrt{6}; -2)$,

$\vec{CK} = (0; 2\sqrt{6}; 0)$,

$$\cos \varphi = \frac{0 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{2+6+4} \cdot \sqrt{0+24+0}} = \frac{12}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

откуда $\varphi = (\vec{SM}; \vec{CK}) = \frac{\pi}{4}$.

Для нахождения нужного расстояния проведем прямую MM' параллельно

прямой CK , тогда $N = (\sqrt{2}; 2\sqrt{6}; 0)$ – см. рис. 8.

Найдем уравнение плоскости SMN . Для этого в уравнение $ax + by + cz + d = 0$ подставим координаты точек S, M, N . В результате получим уравнение

$$x\sqrt{2} + z - 2 = 0.$$

Ищем расстояние от начала координат до плоскости SMN :

$$\rho(0; (SMN)) = \frac{|0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2+0+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

20. Основание пирамиды $SABC$ – равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , длина гипотенузы AB равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и $|SC| = 2$. Найти величину угла и расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC , а вторая – через вершину C и середину ребра AB .

21. (Задача № 33 из учебника "Геометрия 10"). Выясните, пересекаются ли сферы, заданные уравнениями:

$$\begin{aligned} \text{а) } x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 &= 1 & \text{и } (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 4; \\ \text{б) } x^2 + y^2 + z^2 - 2x &= 0 & \text{и } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Указание. а) Найдите расстояние между центрами сфер.

б) Сначала запишите уравнения сфер в "каноническом виде"

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

22. Найдите уравнение плоскости, относительно которой симметричны точки $A(7; 1; 4)$ и $B(3; 5; 2)$.

Указание. Искомая плоскость – множество точек, находящихся на одинаковом расстоянии от точек A и B .

23. Докажите, что для любых чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ справедливо неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Указание. Рассмотрите векторы $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Какой геометрический смысл имеют тогда левая и правая части неравенства?

IV. Приложение

О применении метода координат в геометрии.

Н. Ю. Ваисман

Приведем примеры задач, которые очень удобно решать с помощью метода координат и которые достаточно сложно решаются чисто геометрическими методами.

В одно из первых заданий ВЗМШ по брошюре "Метод координат" входит такая задача.

Задача 1. Найти множество точек плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до двух противоположных вершин данного прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до двух других его вершин.

Решение. Введем на плоскости систему координат так, чтобы её начало было центром данного прямоугольника, а оси были параллельны его сторонам (см. рис. 1). Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка искомого множества. Применяя формулу расстояния между двумя точками, получаем:

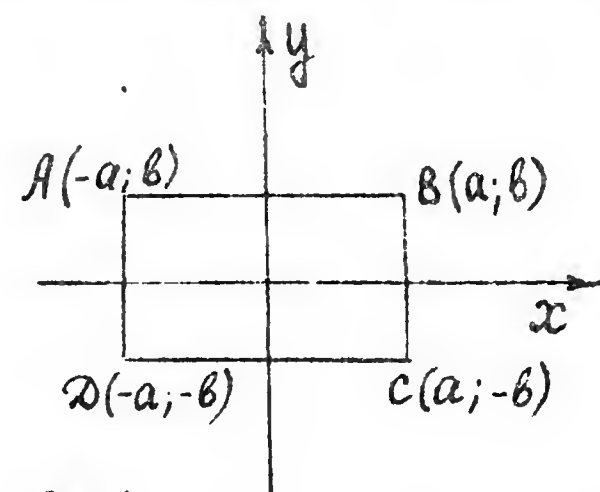


Рис. 1

$$|MA|^2 + |MC|^2 = (x+a)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + (y+b)^2,$$

$$|MB|^2 + |MD|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (x+a)^2 + (y+b)^2.$$

Приравнивая правые части полученных равенств, получаем тождество.

Ответ — вся плоскость.

В пособиях "Прямые и кривые" и "Планиметрия", по которым давались задания ВЗМШ по планиметрии, предлагались следующие задачи.

Задача 2. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, идущими по двум взаимно-перпендикулярным дорогам с одинаковой скоростью?

Решение. Пусть первый пешеход движется вдоль оси Ox из точки $A(a; 0)$ со скоростью v , а второй — из точки $B(0; b)$ с той же скоростью (см. рис. 2). Тогда в момент времени t первый пешеход находится в точке $(a+vt; 0)$, а второй — в точке $(0; b+vt)$. Координаты середины отрезка между двумя пешеходами

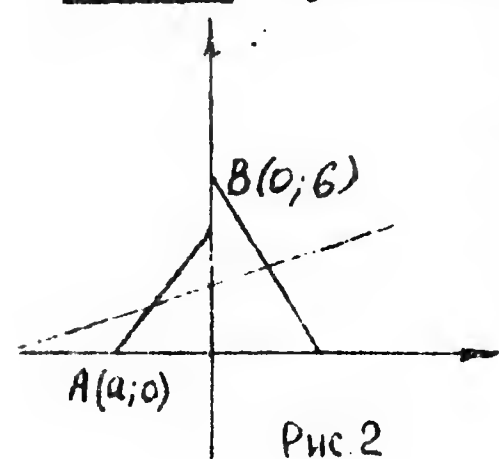


Рис. 2

$$\begin{cases} x = \frac{a+vt}{2}, \\ y = \frac{b+vt}{2}. \end{cases}$$

Исключим из этих равенств t : $t = \frac{2x-a}{v}$, $t = \frac{2y-b}{v}$, откуда $\frac{2x-a}{v} = \frac{2y-b}{v}$ или $y = x + \frac{b-a}{2}$.

Мы получили, что искомая линия — прямая, параллельная биссектрисе угла между направлениями движения пешеходов.

Отметим дополнительно, что если скорости пешеходов не равны, то аналогично полученное уравнение искомой линии будет иметь вид $y = \frac{v_2}{v_1}x + \frac{bv_1 - av_2}{2}$, т.е. это тоже прямая, но угол наклона этой прямой к оси Ox уже будет иной (здесь v_1 и v_2 — скорости движения пешеходов).

Задача 3. Найти множество середин отрезков, концы которых лежат на разных диагоналях квадрата.

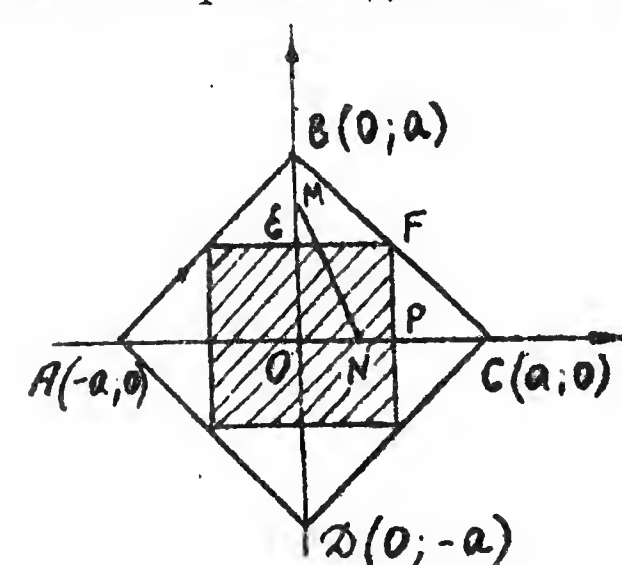


Рис. 3

Решение. Выберем систему координат, как указано на рис. 3, где

$ABCD$ — данный квадрат. Пусть точки $M(0; y)$ и $N(x; 0)$ — произвольные точки соответственно на отрезках OB и OC — половинах диагоналей квадрата.

Тогда $\begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq a, \end{cases}$ отрезок MN

лежит в I четверти и середины отрезков MN будут иметь координаты

$$\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right), \text{ где } \begin{cases} 0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{a}{2}, \\ 0 \leq \frac{y}{2} \leq \frac{a}{2}, \end{cases}$$

т.е. будут заполнять квадрат $OEFPR$. Воспользовавшись симметрией данного квадрата, получим, что искомое множество — квадрат с вершинами в серединах его сторон.

С помощью метода координат легко решаются и многие задачи из школьного учебника. Приведем пример.

Рассмотрим задачу из школьного учебника "Геометрия 8" (раздел "Задачи на повторение к гл. IX, § 8").

Задача 4. Даны две окружности, имеющие внешнее касание. Какое множество точек образуют точки, из которых можно провести к этим окружностям касательные равной длины?

Геометрическое решение. Легко показать, что точки, принадлежащие прямой, перпендикулярной линии центров и проходящей через общую точку этих окружностей, обладают указанными свойствами. Действительно, по свойству отрезков касательных, проведенных из одной

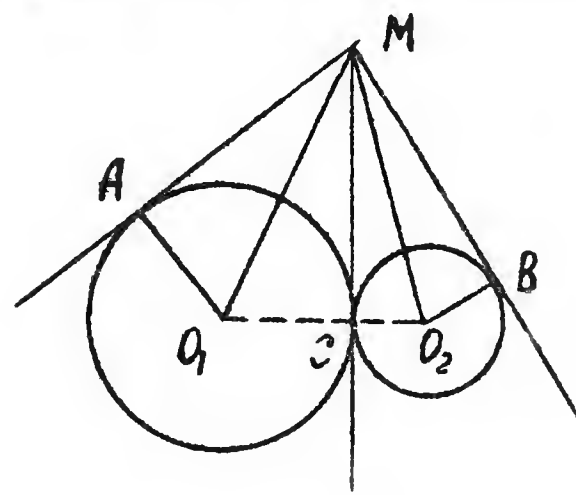


Рис. 4

точки к окружности :

$$\begin{pmatrix} |MA| = |MC| \\ |MC| = |MB| \end{pmatrix} \Rightarrow |MA| = |MB|$$

(см. рис. 4).

Далее надо доказать, что точки, не принадлежащие этой прямой, не обладают рассматриваемым свойством.

Для этого возьмем произвольную точку N плоскости, не лежащую на перпендикуляре к линии центров (O_1O_2), проведенном через C — общую точку двух окружностей (см. рис. 5). Проведем прямую NC .

По теореме о произведении длины секущей на её внешнюю часть получаем: $|NA|^2 = |NC| \cdot |ND|$ и $|NB|^2 = |NC| \cdot |NE|$, т.е. $|NA| \neq |NB|$.

Итак, искомое множество точек, из которых можно провести к этим окружностям касательные равной длины, есть прямая, перпендикулярная линии центров и проходящая через общую точку этих окружностей.

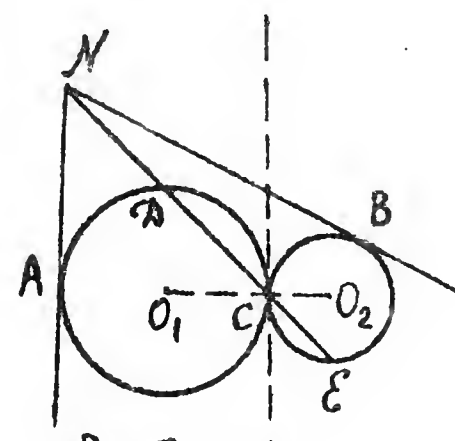


Рис. 5

Возникает вопрос: каково множество точек, из которых можно провести к двум окружностям касательные равной длины (для произвольно расположенных окружностей)?

Если взять две пересекающиеся в точках C и D окружности (см. рис. 6), то легко показать, что длины отрезков касательных, проведенных из точки M прямой CD , равны (речь идет, разумеется, о тех точках этой прямой, из которых можно провести касательные). Действительно, по теореме о произведении длины отрезка секущей на её внешнюю часть :

$$|AM|^2 = |MD| \cdot |MC| \quad \text{и} \quad |MB|^2 = |MD| \cdot |MC|.$$

Следовательно, $|AM| = |MB|$.

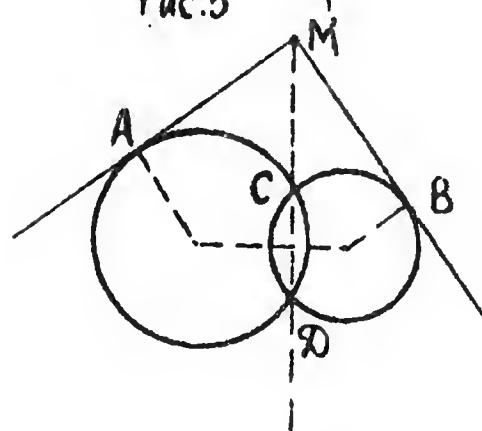


Рис. 6

Теперь надо было бы доказать, что вне прямой CD нет точек, обладающих указанным свойством. Однако оказывается, что это доказать чисто геометрически уже трудно.

Если же рассматривать эту задачу для случая двух непересекающихся окружностей, то оказывается, что при решении трудно опираться на приведенные теоремы о свойстве касательной и приходится искать новый метод решения, особенно если учесть, что теорема о квадрате длины касательной не входит в обязательный школьный курс.

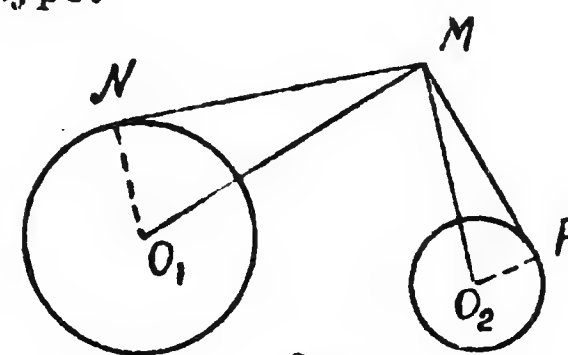


Рис. 7

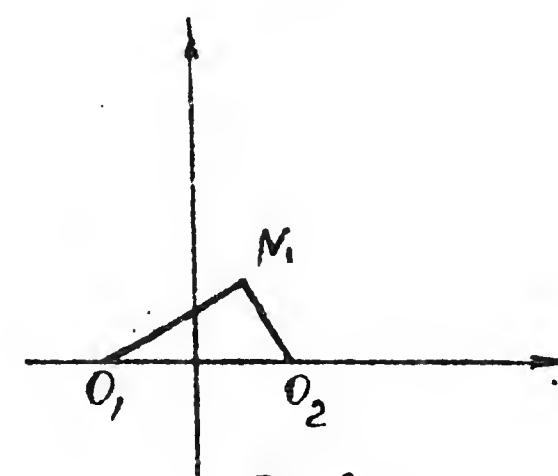


Рис. 8

Итак, надо решить такую задачу.

Даны 2 окружности. Какое множество точек образуют те точки, из которых можно провести к этим окружностям касательные равной длины?

Если (MN) и (MP) — касательные к окружностям с центрами O_1 и O_2 (см. рис. 7), то надо найти множество точек M , таких, что $|MN| = |MP|$.

Заметив, что $|MN|^2 = |MP|^2$;
 $|MN|^2 = |MO_1|^2 - |O_1N|^2$;
 $|MP|^2 = |MO_2|^2 - |O_2P|^2$,
получим, что условие задачи можно переписать так:

$$|MO_1|^2 - |O_1N|^2 = |MO_2|^2 - |O_2P|^2$$

или $|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = |O_1N|^2 - |O_2P|^2$,

а так как $|O_1N|^2 - |O_2P|^2 = R^2 - r^2 = c = \text{const}$, то задачу можно иначе сформулировать так.

Задача 5. Найти множество точек, для которых разность квадратов расстояний до двух заданных точек O_1 и O_2 постоянна.

Решение с помощью метода координат. Направим ось абсцисс по прямой O_1O_2 и начало координат выберем в середине отрезка O_1O_2 (см. рис. 8). Пусть $|O_1O_2| = d$, тогда координаты точки $O_1(-\frac{d}{2}; 0)$, а точки $O_2 - (\frac{d}{2}; 0)$. Возьмем произвольную точку плоскости $M(x; y)$. По формуле расстояния между двумя точками получим:

$$|MO_1|^2 = (x + \frac{d}{2})^2 + y^2; \quad |MO_2|^2 = (x - \frac{d}{2})^2 + y^2,$$

откуда $|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = (x + \frac{d}{2})^2 + y^2 - (x - \frac{d}{2})^2 - y^2 = 2xd.$

6) Если окружности являются концентрическими, то искомое множество — пусто. В самом деле, множество точек, из которых можно провести к первой окружности касательные данной длины — окружность, концентрическая данной; для второй окружности — тоже концентрическая ей окружность, но другого радиуса (см. рис. 14). Общих точек у этих множеств нет.

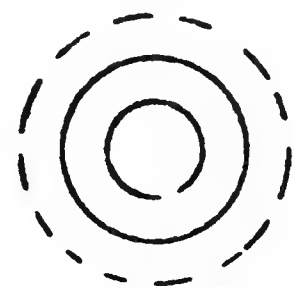


Рис. 14

Замечание: Прямая $x = \frac{R^2 - r^2}{2d}$ —

радикальная ось двух окружностей. Из каждой её точки, внешней по отношению к данным двум окружностям, можно провести к ним равные касательные.

Теперь можно без труда решать такую задачу (чисто геометрическое решение здесь довольно трудно).

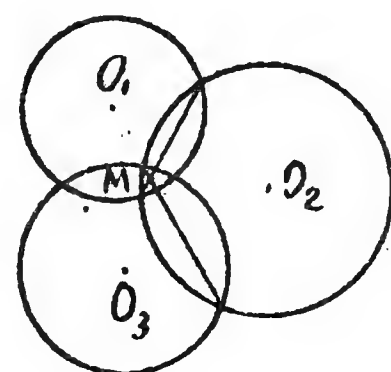


Рис. 15

Задача 7. Даны 3 окружности, каждая из которых пересекает две другие. Доказать, что прямые, которым принадлежат их общие хорды, пересекаются в одной точке.

Решение. Задача решается аналогично случаю 5) из задачи 6 (см. рис. 15).

Точка M пересечения общих хорд окружностей с центрами O_1 и O_2 и O_2 и O_3

обладает тем свойством, что разность квадратов расстояний от неё до точек O_1 и O_2 (O_2 и O_3) постоянна, а именно:

$$|MO_1|^2 - |MO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2,$$

$$|MO_2|^2 - |MO_3|^2 = R_2^2 - R_3^2.$$

Сложив почленно эти равенства, получим:

$$|MO_1|^2 - |MO_3|^2 = R_1^2 - R_3^2,$$

то есть точка M должна лежать на прямой, проходящей через точки пересечения окружностей с центрами O_1 и O_3 .

Рассмотрим, как можно с помощью координатного метода решить следующую задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в 1970 году (МГУ, химфак).

Задача 8. В $\triangle ABC$ $\angle C = 60^\circ$, радиус описанной окружности равен $2\sqrt{3}$. На отрезке AB взята точка D так, что $|AD| = 2|DB|$, причем $|CD| = 2\sqrt{2}$. Найти S_{ABC} .

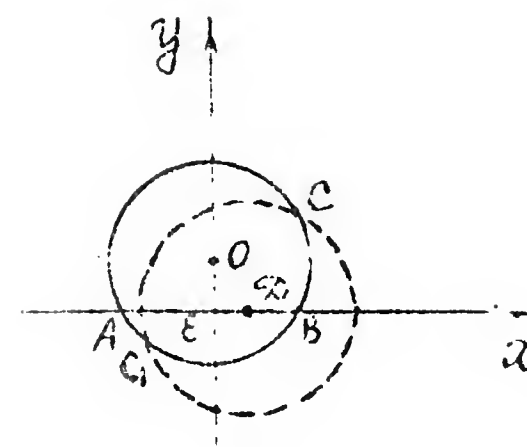


Рис. 16

Решение. Пусть O — центр описанной окружности. Введем систему координат с началом в точке E (середина [AB]), ось координат направим, как показано на рис.

16. Вычислим длины некоторых отрезков:

$$|AB| = R\sqrt{3} = 6; |CE| = \frac{1}{2}|AB| = 3;$$

$$|OE| = \frac{R}{2} = \sqrt{3}. \text{ В выбранной системе}$$

координат точка C имеет координаты $(x; y)$; координаты точек O и E — соответственно $(0; \sqrt{3})$ и $(1; 0)$.

Для вычисления площади $\triangle ABC$ нужно найти его высоту, т.е. ординату точки C. Поскольку точка C принадлежит описанной окружности, её координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$. Кроме того, точка C принадлежит окружности с центром в точке D и радиусом $|CD|$; следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению $(x-1)^2 + y^2 = 8$. Для нахождения ординаты точки C составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 12, \\ (x-1)^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем $y = \sqrt{2}$ (значение $y = -\sqrt{2}$ также удовлетворяющее системе, не годится, так как в этом случае $\angle ACB = 120^\circ$, что не соответствует условию задачи).

$$\text{Итак, высота } \triangle ABC \text{ равна } \sqrt{2}; S_{ABC} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}.$$

Введем теперь для оформления геометрического решения этой задачи (см. рис. 17). Так же, как и в первом решении, найдем сначала, что $|AB| = 6$, тогда $|AZ| = 4$, $|BZ| = 2$, (E — середина хорды AB).

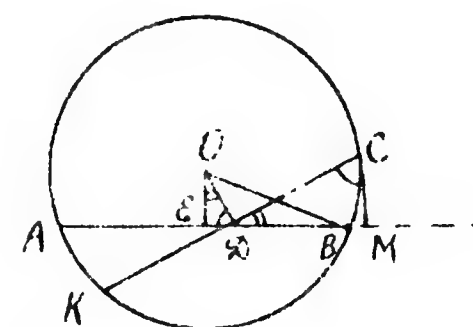


Рис. 17

По теореме о хордах, пересекающихся внутри круга,

$$|AZ| \cdot |ZB| = |ZC| \cdot |ZD|,$$

$$\text{откуда } |ZD| = \frac{|AZ| \cdot |ZB|}{|ZC|} = 2\sqrt{2} = |CD|,$$

то есть D — середина хорды KC. Отсюда сразу получается, что $[OD] \perp [KC]$ (1). Пусть CM — высота треугольника ABC, тогда $\angle CDM = \angle ODM$ (из (1) и того, что $(CE) \perp (AB)$, следует,

что рассматриваемые углы имеют соответственно перпендикулярные стороны¹. Но легко найти угол $\angle O\Delta : \angle OB = 60^\circ$;

$$\frac{|\Delta O|}{|BO|} = \frac{1}{2} = \frac{|OE|}{|OB|} \Rightarrow [O\Delta] \quad - \text{ биссектриса угла } \angle OB$$

$$\Rightarrow \angle O\Delta = 30^\circ = \angle \Delta M \Rightarrow |CM| = \frac{1}{2} |\Delta O| = \sqrt{2} \quad \text{и задача}$$

решена.

Приведенные примеры показывают, что применение метода координат при решении геометрических задач оказывается очень полезным.

Его преимущества видны особенно в тех случаях, когда решение задачи чисто геометрическими способами сложно и требует применения мало известных теорем; координатный метод позволяет получать решение задачи в общем виде, в то время как геометрическое решение требует рассмотрения частных случаев в отдельности (например, в задаче 8 чисто геометрическое решение при других числовых данных очень трудно¹).

не ходит

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

МЕТОД КООРДИНАТ В ГЕОМЕТРИИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ

для учащихся III курса
Всесоюзной заочной математической школы при МГУ

Составители: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ

Москва — 1983 г.

В в е д е н и е

Одним из самых общих методов математики является метод координат. Он позволяет переводить геометрические задачи на алгебраический язык и, наоборот, алгебраические задачи представить геометрически.

В настоящем задании собраны основные сведения о методе координат, которые у Вас имеются, чтобы охватить одним взглядом весь пройденный материал.

В I части разработок, "Основные формулы метода координат", Вы увидите, что список этих формул сравнительно невелик.

Во II части, "Расстояние от точки до плоскости", мы подробно остановимся на новой для Вас формуле, которая часто помогает при решении задач.

Применение метода координат требует определенных технических навыков. В III части собраны разные задачи по геометрии из школьного учебника и материалов вступительных экзаменов в ведущие вузы страны. Часть из них решена в тексте, часть — снабжена указаниями.

З а д а н и е №

Обязательные задачи: №№ 1; 4; 5; 6; 8б; 10; 11; 14; 15; 19; 21; 23.

Дополнительные задачи: №№ 9; 18; 22; 25; 26; 27; 28.

Срок присылки задания № —

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" — решено не менее 7 обязательных задач;

"4" — решено не менее 9 обязательных задач;

"5" — решены все 12 обязательных задач.

Дополнительные задачи: "4" — решено не менее 3 дополнительных задач;

"5" — решено 5–7 дополнительных задач.

I. Основные формулы метода координат.

A. Координаты точек.

На плоскости

Как только на плоскости выбрана система координат OXY , каждой точке A плоскости ставится в соответствие пара чисел $(x; y)$ — её координаты. Соответствие между точками плоскости и парами чисел взаимно однозначно (т.е. каждой точке соответствует одна пара чисел и обратно).

Середина отрезка между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ имеет координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2})$. Вообще, точка, делящая отрезок A_1A_2 в отношении $\rho_1:\rho_2$ имеет координаты

$$\left(\frac{\rho_2 x_1 + \rho_1 x_2}{\rho_1 + \rho_2}, \frac{\rho_2 y_1 + \rho_1 y_2}{\rho_1 + \rho_2} \right).$$

Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1)$ и $A_2(x_2; y_2)$ равно

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, есть окружность с центром в точке $(x_0; y_0)$ радиуса r .

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$ (a, b, c — некоторые числа, причем a и b не равны нулю, одновременно), есть прямая. Обратно,

В пространстве

Как только в пространстве введена система координат $OXYZ$, каждой точке A пространства ставится в соответствие тройка чисел $(x; y; z)$.

Середина отрезка между точками $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$ имеет координаты

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

Расстояние между точками $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и $A_2(x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Множество точек $(x; y; z)$, координаты которых удовлетворяют условию $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ — сфера радиуса r с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

Множество точек, координаты которых удовлетворяют линейному уравнению

$$ax + by + cz + d = 0$$

(a, b, c, d — некоторые числа, причем $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$), есть плоскость.

каждая прямая задается уравнением $ax + by + c = 0$. При этом числа a, b, c определяются для данной прямой однозначно с точностью до пропорциональности (если умножить их все на одно и то же число K , то полученное уравнение $Kax + Kby + Kc = 0$ будет определять ту же прямую).

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой ℓ , задаваемой уравнением $ax + by + c = 0$, равно

$$\rho(M, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$, равно

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

B. Координаты векторов.

На плоскости

Пусть на плоскости задана пара взаимно перпендикулярных единичных векторов \vec{i}, \vec{j} . Каждый вектор \vec{u} на плоскости можно разложить по векторам \vec{i} и \vec{j} :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

то есть каждому вектору \vec{u} ставится в соответствие пара чисел $(x; y)$. Эти числа называются его координатами.

Длина $|\vec{u}|$ вектора $\vec{u} = (x; y)$ равна $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть заданы два вектора

$$\vec{u}(x_1; y_1) \text{ и } \vec{v}(x_2; y_2).$$

Скалярное произведение

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$$

этих векторов вычисляется по формуле

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

В пространстве

Пусть в пространстве задана тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Каждый вектор \vec{u} в пространстве можно разложить по векторам \vec{i}, \vec{j} и \vec{k} , то есть каждому вектору \vec{u} ставится в соответствие тройка чисел $(x; y; z)$. Эти числа называются его координатами.

Длина $|\vec{u}|$ вектора $\vec{u} = (x; y; z)$ равна $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Пусть заданы два вектора

$$\vec{u}(x_1; y_1; z_1) \text{ и } \vec{v}(x_2; y_2; z_2).$$

Скалярное произведение

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$$

этих векторов вычисляется по формуле

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Величина угла φ между векторами \vec{u} и \vec{v} вычисляется с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Если $ax + by + c = 0$ — уравнение некоторой прямой, то вектор с координатами $(a; b)$ перпендикулярен этой прямой (этим свойством обладает и любой коллинеарный ему вектор $(\ell a; \ell b)$).

Величина угла φ между векторами \vec{u} и \vec{v} вычисляется с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Если $ax + by + cz + d = 0$ — уравнение некоторой плоскости, то вектор с координатами $(a; b; c)$ перпендикулярен этой плоскости (этим свойством обладает и любой коллинеарный ему вектор $(\ell a; \ell b; \ell c)$).

П. Расстояние от точки до плоскости

В учебнике "Геометрия 10" есть несколько задач, в которых требуется найти расстояние от заданной точки до заданной плоскости. Эти задачи вызывают некоторые затруднения у школьников (несмотря на то, что одна из таких задач — № 28 — решена в тексте). Поэтому мы остановимся на этом вопросе немного подробнее.

Пусть $A(x_0; y_0; z_0)$ — точка в координатном пространстве $Oxyz$ и α — плоскость, заданная уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Расстояние $\rho(A, \alpha)$ от точки A до плоскости α находится по формуле

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (*)$$

Эту формулу можно описать словами так (вывод её приведем позже):

Надо в выражение $ax + by + cz + d$ вместо переменных x, y, z подставить координаты точки A . Взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Примеры

(I.*) Найти расстояние от точки $A(-1; 3; 0)$ до плоскости α заданной уравнением $x - 3y - 2z + 5 = 0$.

*) Это задача № 298, I) из учебника "Геометрия 10".

Решение. По формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|-1 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

(2.**) Вычислить расстояние от начала координат до плоскости $2x + 3y - 6z + 14 = 0$.

Решение. Нам надо найти расстояние от точки $A(0; 0; 0)$ по формуле (*) получаем:

$$\rho(A, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 14|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2.$$

(3.) Вычислить расстояние между плоскостями α и β , заданными соответственно уравнениями:

$$\alpha: 3x + 2y + 4z + 11 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: 9x + 6y + 12z - 5 = 0.$$

Решение. Разделив обе части второго уравнения на 3, видим, что плоскости

$$\alpha: 3x + 2y + 4z + 11 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: 3x + 2y + 4z - \frac{5}{3} = 0$$

параллельны. Возьмем любую точку $A(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую плоскости β : положим, например, $x_0 = y_0 = 0$, тогда $z_0 = \frac{5}{12}$.

Легко понять, что расстояние между плоскостями α и β равно числу $\rho(A, \alpha)$, где $A = (0; 0; \frac{5}{12})$. Применяв формулу (*), получим

$$\rho(\alpha, \beta) = \rho(A, \alpha) = \frac{|3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{5}{12} + 11|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2}} = \frac{38}{3\sqrt{29}}$$

Замечание. В общем случае расстояние между параллельными плоскостями

$$\alpha: ax + by + cz + d_1 = 0 \quad \text{и} \quad \beta: ax + by + cz + d_2 = 0$$

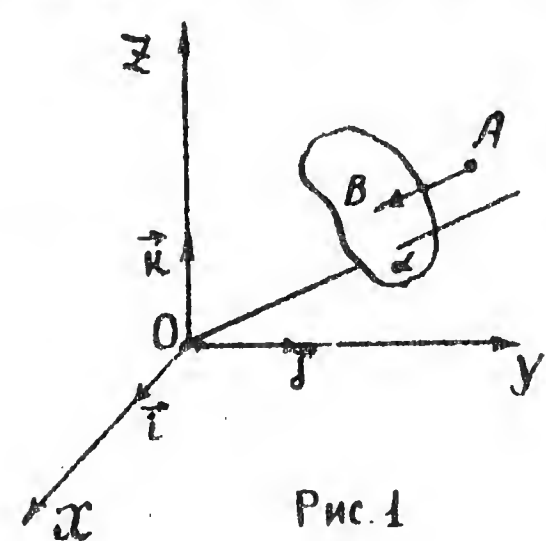
находится по формуле

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (**)$$

Выведите формулу (**), повторив решение задачи 3.

**) Это задача № 29, 2) из учебника.

Вывод формулы (*). Опустим из точки $A(x_0; y_0; z_0)$ перпендикуляр AB на плоскость α , заданную уравнением $ax + by + cz + d = 0$. Пусть $B(x_1; y_1; z_1)$ - точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью α . Тогда $|AB|$ - расстояние от A до α (см. рис.1). Поскольку вектор



$\vec{AB} = (x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ перпендикулярен плоскости α , он коллинеарен вектору $\vec{n} = (a; b; c)$. Это означает, что $\vec{AB} \cdot \vec{n} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|$, если $\vec{AB} \parallel \vec{n}$, или $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -|\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|$, если $\vec{AB} \uparrow \downarrow \vec{n}$, т.е. $|\vec{AB} \cdot \vec{n}| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{n}|$.

Перепишем это равенство в координатах:

$$|(x_1 - x_0)a + (y_1 - y_0)b + (z_1 - z_0)c| = |\vec{AB}| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Но точка $B \in \alpha$, поэтому

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = -d \quad \text{и} \quad |\vec{AB}| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Формула (*) доказана.

Задачи

1. Вычислить расстояние от точки $A(1;1;1)$ до плоскости $x + y + z = 0$.
2. Вычислить расстояние от точки $A(1;2;3)$ до плоскости $x + y + z - 6 = 0$.
3. Найти расстояние от точки $A(x_0; y_0; 0)$ до плоскости $ax + by + d = 0$ (решив эту задачу, Вы получите формулу расстояния от точки до прямой на плоскости - подумайте, почему).
4. Найти уравнения плоскостей, находящихся на расстоянии 1 от плоскости $x + y + z = 0$.
5. Какая фигура является пересечением сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и плоскости:
 - а) $x + y + z = 1$; б) $3x - 4y - z = 6$; в) $3x + 4y = 5$?

Указание. Радиус данной сферы имеет длину 1, центр её - в начале координат. Найдите расстояния от центра сферы до заданных плоскостей.

6. Пусть плоскость α проходит через три различные, не совпадающие с началом координат, точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ (лежащие соответственно на осях Ox , Oy , Oz). Докажите, что $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где p - расстояние от точки O до плоскости α .

III. Разные задачи

7. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны, а вектор \vec{c} образует с каждым из них угол в 60° . Зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ и $|\vec{c}| = 8$, вычислить скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$.

Решение. По свойству скалярного произведения раскроем скобки:

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c}) = 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{b} + 9\vec{a} \cdot \vec{c} - 6\vec{b} \cdot \vec{c}. (*)$$

Из определения скалярного произведения получаем:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \quad (\text{т.к. } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ перпендикулярны}); \\ \vec{b} \cdot \vec{b} &= |\vec{b}|^2 = 25; \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| = 12; \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} |\vec{b}| \cdot |\vec{c}| = 20. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в выражение (*), находим скалярное произведение:

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c}) = 0 - 50 + 9 \cdot 12 - 120 = -62.$$

8. При каком значении z векторы $\vec{a}(1, 2, 4)$ и $\vec{b}(-2, 1, z)$:
а) перпендикулярны; б) образуют угол в 150° ?

9. Найти вектор $\vec{a}(x; y; z)$, образующий равные углы с векторами $\vec{b}(y; -2x; 3x)$ и $\vec{c}(2x; 3x; -y)$, если вектор \vec{a} перпендикулярен вектору $\vec{d}(1; -1; 2)$, $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ и угол между векторами \vec{a} и осью Oy - тупой.

10. Найти угол между плоскостями

$$x - 2y + 2z - 7 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - y - 2z + 1 = 0.$$

Указание. Угол между плоскостями равен углу φ между векторами, перпендикулярными к этим плоскостям, если $\varphi \leq 90^\circ$. Если же $\varphi > 90^\circ$, то угол между плоскостями равен $180^\circ - \varphi$.

II. Известно, что в треугольной пирамиде все плоские углы

при вершине - прямые. Найти длину её высоты, если длины её боковых ребер (выходящих из указанной выше вершины) равны a , b и c .

[12.] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами длины 1. На его боковом ребре AA_1 взята точка E так, что $|AE| = \frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что $|BF| = \frac{1}{4}$. Через центр куба и точки

E и F проведена плоскость α . Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α .

Решение. Введем систему координат с центром в вершине B

(см. рис. 2). Тогда:

$$E = (1; 0; \frac{1}{3}); F = (0; \frac{1}{4}; 0);$$

$$B_1 = (0; 0; 1); O = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}).$$

Найдем уравнение плоскости α .

Пусть это уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

Заметим, что α не проходит через начало координат, поэтому $D \neq 0$ и уравнение (1) можно разделить на D ; получим следующее уравнение:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0 \quad \text{или} \quad ax + by + cz + 1 = 0. \quad (2)$$

Для определения неизвестных коэффициентов a , b и c подставим в уравнение (2) координаты трех точек E , F и O , удовлетворяющие этому уравнению (так как эти точки лежат в плоскости α). Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot \frac{1}{4} + c \cdot 0 + 1 = 0, \\ a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда

$$a = -\frac{5}{2}, \quad b = -4, \quad c = \frac{9}{2}.$$

Итак, уравнение плоскости α имеет вид:

$$-\frac{5}{2}x - 4y + \frac{9}{2}z + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 5x + 8y - 9z - 2 = 0.$$

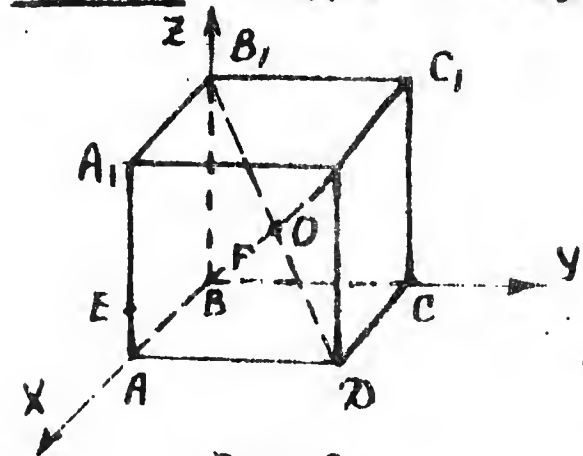


Рис. 2

Теперь находим расстояние от точки $B_1(0; 0; 1)$ до плоскости α :

$$\rho(B_1; \alpha) = \frac{|5 \cdot 0 + 8 \cdot 0 - 9 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{5^2 + 8^2 + 9^2}} = \frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Замечание. Хотя в общем уравнении плоскости (1) 4 коэффициента, его всегда можно привести к уравнению с 3 коэффициентами делением на один из первоначальных коэффициентов, как это мы сделали при решении задачи (в уравнении (1) хотя бы одно из чисел A , B , C , D не равно нулю, иначе это уравнение задает не плоскость, а все пространство).

[13.] Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки:

а) $M_1(0; 2; 3)$, $M_2(-1; 3; 1)$, $M_3(2; 1; 1)$;

б) $M_1(1; 1; -1)$, $M_2(2; 0; -3)$, $M_3(2; -1; 4)$.

[14.] Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 1; 1)$ и $C(3; 2; 1)$, и плоскостью, проходящей через точки A , B и $D(3; 1; 2)$.

[15.] Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами длины 1. На его боковом ребре AA_1 взята точка E так, что $|AE| = \frac{3}{5}$. На ребре $A_1 D_1$ взята точка F так, что $|A_1 F| = \frac{1}{5}$. Через центр куба и точки

E и F проведена плоскость α . Точка K - проекция вершины D на плоскость α . Найти длину отрезка FK .

[15.] В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a найти расстояние между прямыми AD_1 и DC_1 .

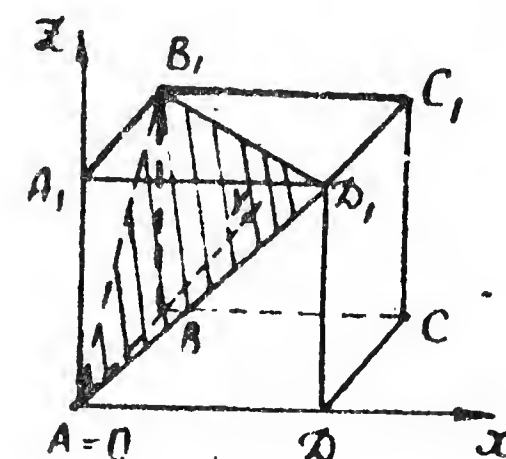


Рис. 3

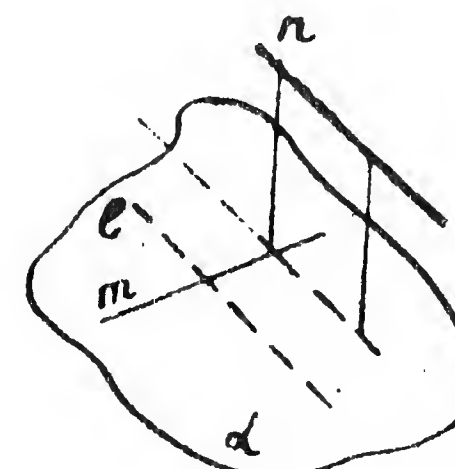


Рис. 4

Указание. Если в пространстве заданы две скрещивающиеся прямые m и n (см. рис. 4), то расстояние между ними (то есть длину отрезка их общего перпендикуляра с концами на этих прямых) можно искать так. Проведем через одну из прямых, например, через m , плоскость α , параллельную прямой n (для этого достаточно через любую точку прямой m провести прямую ℓ параллельно прямой n , тогда плоскость, проходящая через прямые m и ℓ , будет искомой). Тогда расстояние от любой точки прямой n до плоскости α и равно расстоянию между прямыми m и n .

Решение. В соответствии с указанием, проведем через точку A прямую, параллельную DC , (это будет диагональ AB). Найдем уравнение плоскости $\alpha = (AB, DC)$ в системе координат, указанной на рис. 3. Пусть уравнение этой плоскости

$$ax + by + z = 0 \quad (I)$$

(свободный член в уравнении (I) равен нулю, так как точка A - начало координат - лежит в искомой плоскости). Для определения чисел a и b подставим в уравнение (I) координаты точек

$D, (1; 0; 1)$ и $B, (0; 1; 1)$:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot 0 + 1 = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 1 + 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $a = -1$; $b = -1$.

Итак, уравнение плоскости α :

$$x + y - z = 0.$$

Ищем расстояние от точки $D(1; 0; 0)$ до плоскости α :

$$\rho(D; \alpha) = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Замечание. Эту задачу можно решить и без метода координат. Для этого проведем через каждую из данных прямых плоскость, параллельную другой (см. рис. 5). Легко показать, что эти плоскости перпендикулярны диагонали AC и делят её на три конгруэнтных части, откуда получается, что искомое расстояние равно трети длины диагонали куба.

17. Длина ребра правильного тетраэдра равна ℓ . Найти расстояние между скрещивающимися высотами граней тетраэдра.

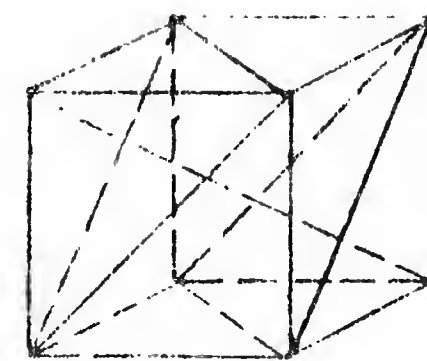


Рис. 5

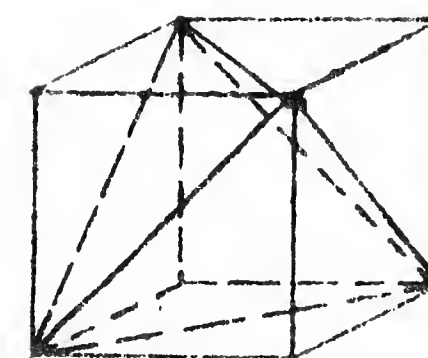


Рис. 6

Указание. Постройте тетраэдр до куба и введите координаты, как показано на рис. 6. Не забудьте рассмотреть оба возможных случая расположения высот.

18. (Задача № 14.2 из учебника "Геометрия 10"). Вектор \vec{r} образует с осями координат углы величиной α , β и γ соответственно. Доказать, что

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Замечание. Косинусы данных в условии углов называются направляющими косинусами вектора \vec{r} .

19. Вектор \vec{r} образует с осями Ox и Oy углы по 60° . Какой угол образует вектор \vec{r} с осью Oz ?

20. Центр нижнего основания куба соединен прямыми с четырьмя вершинами его верхнего основания. Вычислить углы между этими прямыми.

22. Найти величины углов между прямыми, соединяющими точку пересечения высот правильного тетраэдра с его вершинами.

23. В правильной треугольной призме боковые грани - квадраты. Через диагональ боковой грани и середину параллельного этой грани бокового ребра проведена плоскость. Найти угол её наклона к плоскости основания.

Замечание. Возможны различные решения этой задачи и совсем не обязательно пользоваться методом координат (это относится и к другим геометрическим задачам). Решайте задачи так, как Вам удобнее.

24. Основание пирамиды $SABC$ - правильный треугольник со стороной длины $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC длины 2 перпендикулярно плоскости основания. Найти величину угла и расстояние между пря-

мыми, одна из которых проходит через вершину S и середину ребра BC , а вторая - через точку C и середину ребра AB .

Решение. Введем систему координат, как показано на рис.7. Пусть M - середина ребра BC , K - ребра AB . Искомый угол будем искать как угол между векторами \vec{SM} и \vec{CK} .

Имеем:

$$S(0;0;2); C(0;0;0); K(0;2\sqrt{6};0),$$

$$M(\sqrt{2};\sqrt{6};0) -$$

см.рис.8. Поэтому

$$\vec{SM} = (\sqrt{2}; \sqrt{6}; -2), \quad \vec{CK} = (0; 2\sqrt{6}; 0),$$

$$\cos \varphi = \frac{0 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{2+6+4} \cdot \sqrt{0+24+0}} = \frac{12}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{откуда } \varphi = (\vec{SM}; \vec{CK}) = \frac{\pi}{4}.$$

Для нахождения нужного расстояния проведем прямую MN параллельно прямой CK , тогда $N = (\sqrt{2}; 2\sqrt{6}; 0)$ - см.рис.8.

Найдем уравнение плоскости SMN . Для этого в уравнение $ax + by + cz + d = 0$ подставим координаты точек S, M, N . В результате получим уравнение $x\sqrt{2} + z - 2 = 0$. Ищем расстояние от начала координат до плоскости SMN :

$$\rho(C; (SMN)) = \frac{|0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{2+0+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

[25.] Основание пирамиды $SABC$ - равнобедренный прямоугольный треугольник ABC , длина гипотенузы AB равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и $|SC| = 2$. Найти величину угла и расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC , а вторая - через вершину C и середину ребра AB .

[26.] (задача № 33 из учебника "Геометрия 10"). Выясните, пересекаются ли сферы, заданные уравнениями:

$$a) x^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1 \quad \text{и} \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4;$$

$$б) x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z + 4 = 0.$$

Указание. а) Найдите расстояние между центрами сфер.
б) Сначала запишите уравнения сфер и "каноническом виде".

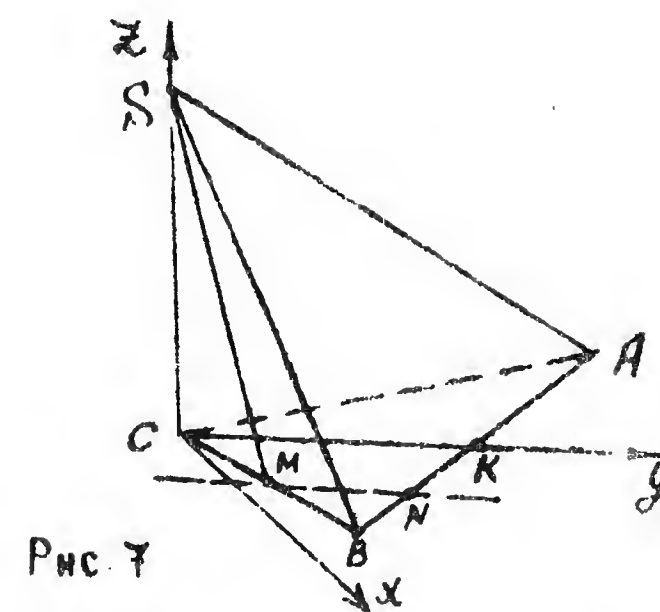


Рис. 7

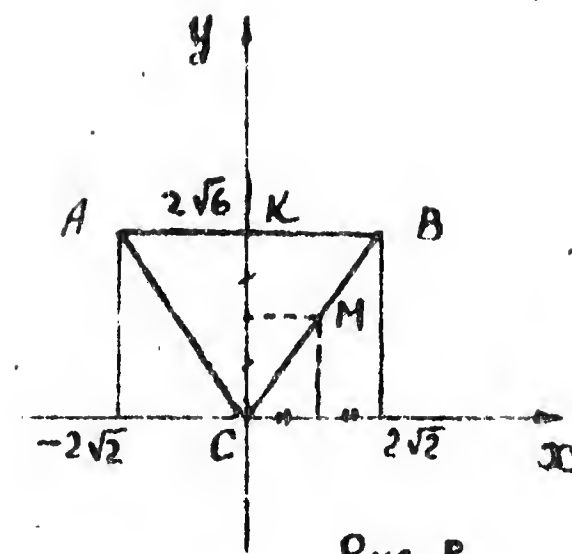


Рис. 8

[27.] Найдите уравнение плоскости, относительно которой симметричны точки $A(7;1;4)$ и $B(3;5;2)$.

Указание. Искомая плоскость - множество точек, находящихся на одинаковом расстоянии от точек A и B .

[28.] Доказать, что для любых чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ справедливо неравенство

$$(a, b, + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

Указание. Рассмотрите векторы $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Какой геометрический смысл имеют тогда левая и правая части неравенства?

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

"МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ"

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ВЗМШ

Составители: И.М.Гельфанд, Е.Г.Глаголева, А.А.Кириллов

*Для 10 класса применить невозможно,
т.к. слишком прост обязательные задачи*

Москва 1983

Методические разработки
для учащихся ВЗМШ
по теме "Метод координат в пространстве"

Это задание - продолжение соответствующей темы, пройденной Вами на первом курсе. Полезно повторить материалы задания "Метод координат на прямой и на плоскости". Посмотрите тетради с контрольными работами по этой теме, обратите внимание на замечания, сделанные Вам проверяющими.

Внимательно, с карандашом в руке прочитайте помещенные ниже разработки. Возможно, материал о четырехмерном пространстве покажется Вам поначалу трудным. Не пугайтесь этого - перечитайте его несколько раз, постарайтесь понять основные идеи, а затем вникните в детали.

З а д а н и е № 9

Обязательные задачи

- | | | |
|---------------------|----------------------------|------------------|
| 1. п. II № II.2 1) | 4. П. II № II.4 | 7. П. I2. № I2.3 |
| 2. № II.2 2) | 5. п. I2 № I2.1 1), 2), 3) | 8. П. I9 № I9.1 |
| 3. № II.3 | 6. № I2.2 | 9. № I9.3 |
| | | 10. П. 2I № 2I.2 |

Дополнительные задачи

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| II. п. 2I № 2I.3 | I2. П. 22 № 22.6 | 13. п. 22 № 22.7 |
|------------------|------------------|------------------|

Критерии оценок

- Обязательные задачи: "3" - решено не менее 6 обязательных задач;
"4" - решено не менее 8 обязательных задач;
нет грубых ошибок;
"5" - решены все обязательные задачи.
- Дополнительные задачи: "4" - решены 1-2 дополнительные задачи;
"5" - решены 3 дополнительные задачи.

Срок присылки задания № 1018-85

II. Координатные оси и плоскости

Положение точки в пространстве можно тоже определить с помощью прямоугольных декартовых координат, только нужно взять уже не две числовые оси (как в случае плоскости), а три: ось X - ось абсцисс, ось Y - ось ординат, ось Z - ось аппликат. Эти

оси проводят через одну и ту же точку O — начало координат — так, что каждые две из них взаимноперпендикулярны.

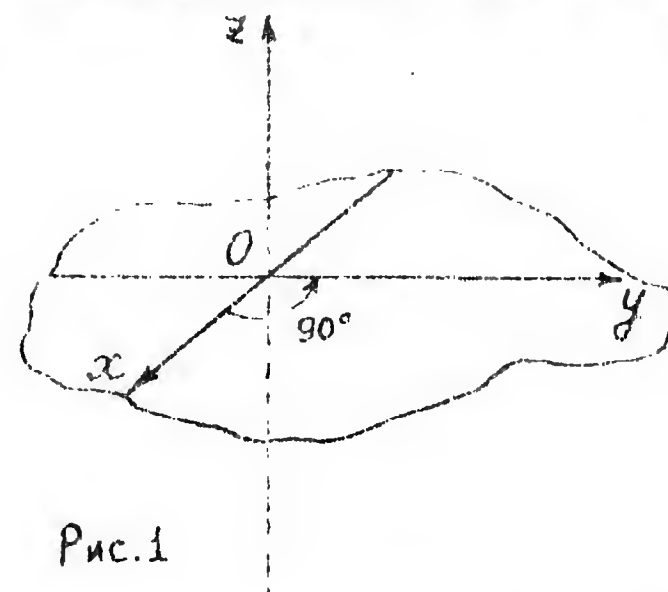


Рис. 1

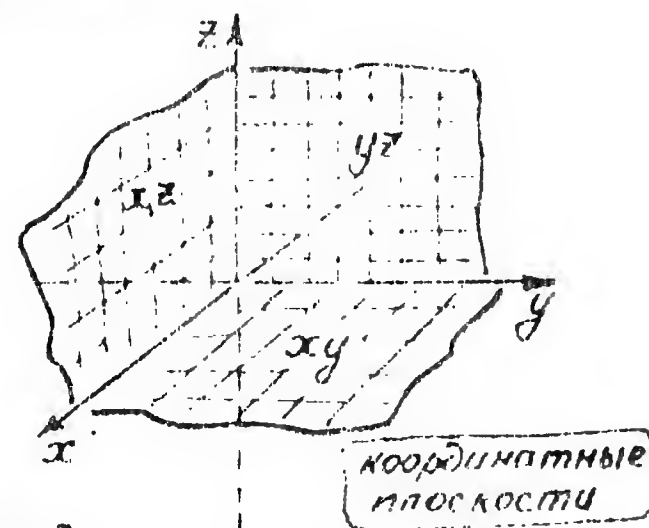


Рис. 2

Точка O принимается за начало отсчета по каждой из трех осей. Направления осей выбирают обычно так, чтобы положительная полуось x совмещалась с положительной полуосью y вращением на 90° против часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси z (рис. 1).

В пространстве, кроме координатных осей, удобно рассматривать еще координатные плоскости, т.е. плоскости, проходящие через две какие-либо координатные оси. Таких плоскостей три (рис. 2):

плоскость xy (проходящая через оси x и y) — множество точек вида $(x; y; 0)$, где x и y — любые числа;

плоскость yz (проходящая через оси y и z) — множество точек вида $(0; y; z)$, где y и z — любые числа;

плоскость xz (проходящая через оси x и z) — множество точек вида $(x; 0; z)$, где x и z — любые числа.

Теперь для каждой точки M пространства можно найти три числа x , y и z , которые будут служить её координатами.

Чтобы найти первое число, x , проведем через точку M плоскость, параллельную координатной плоскости yz (проведенная плоскость будет одновременно перпендикулярна к оси x). Точка пересечения этой плоскости с осью x (точка M_1 на рис. 3а) имеет на этой оси координату x . Это число x называется абсциссой точки M .

Чтобы найти вторую координату, через точку M проводят плоскость, параллельную плоскости xz (перпендикулярную к оси y), находят на оси y точку M_2 (рис. 3б). Число y — координата точки M_2 на оси y — называется ординатой точки

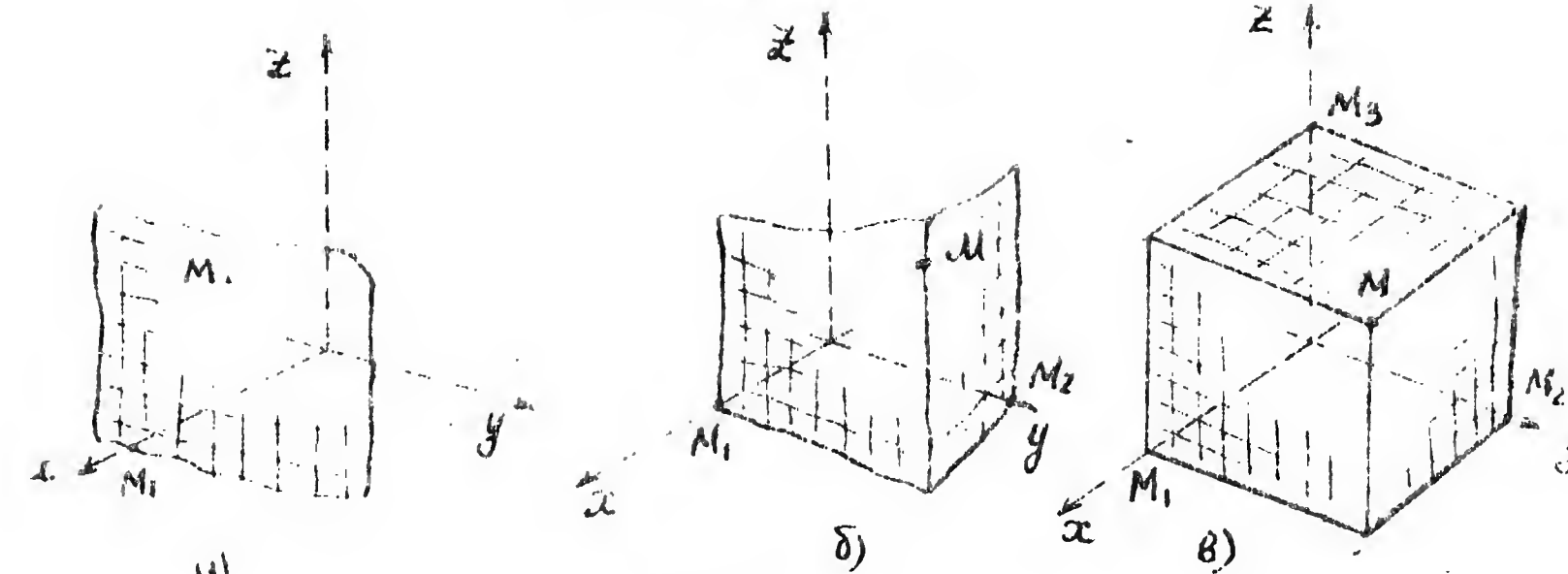


Рис. 3

Аналогично, проведя через точку M плоскость, параллельную плоскости xy (перпендикулярную к оси z), находят число z — координату точки M_3 (рис. 3в) на оси z . Это число z называется аппликатой точки M .

Таким образом, мы каждой точке пространства поставили в соответствие определенную тройку чисел — её координаты: абсциссу, ординату и аппликату.

Обратно, каждой тройке чисел $(x; y; z)$, заданных в определенном порядке (сначала x , затем y , потом z) можно поставить в соответствие определенную точку M пространства. Для этого надо воспользоваться описанным построением, сделав его от конца: отметить на осях точки M_1 , M_2 и M_3 , имеющие на этих осях соответственно координаты x , y , z , а затем провести через эти точки плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точка пересечения этих трех плоскостей и будет искомой точкой M . Очевидно, что числа $(x; y; z)$ будут служить её координатами.

Р Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками чисел (координатами этих точек).

Освоиться с координатами в пространстве Вам будет труднее, чем с координатами на плоскости: для изучения координат в пространстве нужно немного знать геометрию в пространстве — стереометрию. Необходимые для понимания координат в пространстве сведения, которые Вы легко поймете в силу их простоты и наглядности, получают в курсе стереометрии несколько более строгое обоснование.

В этом курсе можно будет доказать, что точки M_1 , M_2 и M_3 , построенные как точки пересечения осей координат с плоскостями,

проведенными через точку M параллельно плоскостям координат, являются проекциями M на оси координат, т.е. служат основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на оси координат. Так что для координат в пространстве можно дать определение, аналогичное определению координат на плоскости.

Координатами точки M в пространстве называются координаты проекций этой точки на координатные оси.

Р

Абсциссой точки M называется координата x точки M_1 (см.рис.3а) - проекции точки M на ось x .

Ординатой точки M называется координата y точки M_2 (см.рис.3б) - проекции точки M на ось y .

Аппликатой точки M называется координата z точки M_3 (см.рис.3в) - проекции точки M на ось z .

Можно показать, что многие формулы, выведенные для плоскости, нужно только немного видоизменить для случая пространства.

Так, например, расстояние между двумя точками, $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, вычисляется по формуле

Р

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

(Вывод этой формулы очень похож на вывод аналогичной формулы для плоскости. Попробуйте сделать его самостоятельно). В частности,

расстояние точки $A(x; y; z)$ от начала координат $O(0; 0; 0)$

выражается формулой

Р

$$|OA| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

II-1. Возьмем восемь точек: $(1; 1; 1)$, $(1; 1; -1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; 1; 1)$, $(-1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$, $(-1; -1; -1)$.

1) Какая из точек наиболее удалена от точки $(1; 1; 1)$? Найдите расстояние от этой точки до точки $(1; 1; 1)$.

2) Какие точки лежат ближе всего к точке $(1; 1; 1)$? Каково расстояние от этих точек до точки $(1; 1; 1)$?

II-2. Нарисуйте куб. Оси координат направьте по трем ребрам, выходящим из одной какой-либо вершины. За единицу масштаба возьмите ребро куба. Обозначьте вершины куба буквами

$A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ как на рис.4.

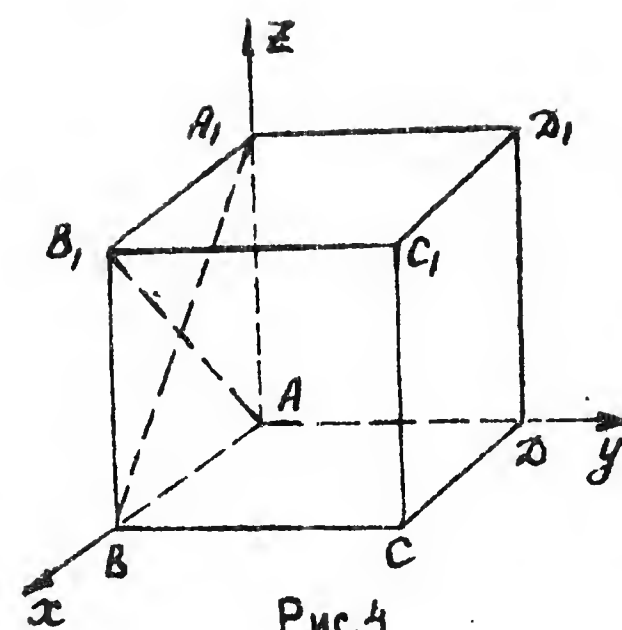


Рис.4

1) Найдите координаты всех вершин куба.

2) Найдите координаты точки пересечения диагоналей грани AA_1B_1B .

II-3. Чему равно расстояние от вершины $(0; 0; 0)$ куба задачи II-2 до точки пересечения диагоналей грани BB_1C_1C ?

II-4. Как вы думаете, какие из перечисленных точек: $A(1; 0; 5)$, $B(3; 0; 1)$, $C(1/3; 3/4; 2/5)$, $D(7/5; 1/2; 3/2)$, $E(2/5; -1/2; 0)$, $F(1; 1/2; 1/3)$

лежат внутри куба задачи II-2, а какие - вне его?

II-5. Запишите соотношения, которым удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри куба задачи II-2 и на его границе.

Ответ. Координаты x, y, z точек, лежащих внутри рассматриваемого куба и на его границе, могут принимать числовые значения от нуля до единицы включительно, т.е. удовлетворяют одновременно трем соотношениям: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

12. Задание фигур в пространстве

Так же как на плоскости, координаты в пространстве дают возможность задавать с помощью чисел и числовых соотношений не только точки, но и линии, поверхности и другие множества точек. Посмотрим, например, какое множество точек получится, если задать только две координаты, а третью считать произвольной. Условия

$x = a$, $y = b$, где a и b - заданные числа (например, $a = 5$, $b = 4$), задают в пространстве прямую, параллельную оси z (рис.5). Все точки такой прямой имеют одну и ту же абсциссу и одну и ту же ординату. Координата z может принимать любые значения.

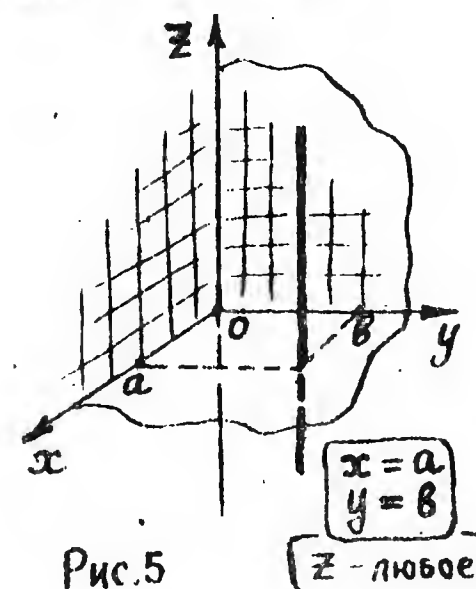


Рис.5

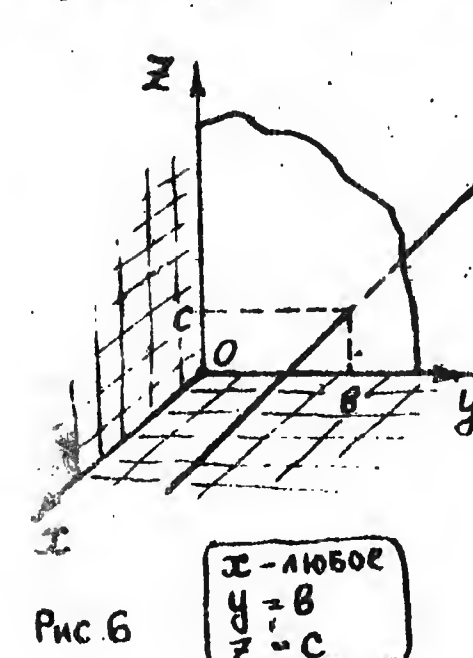


Рис.6

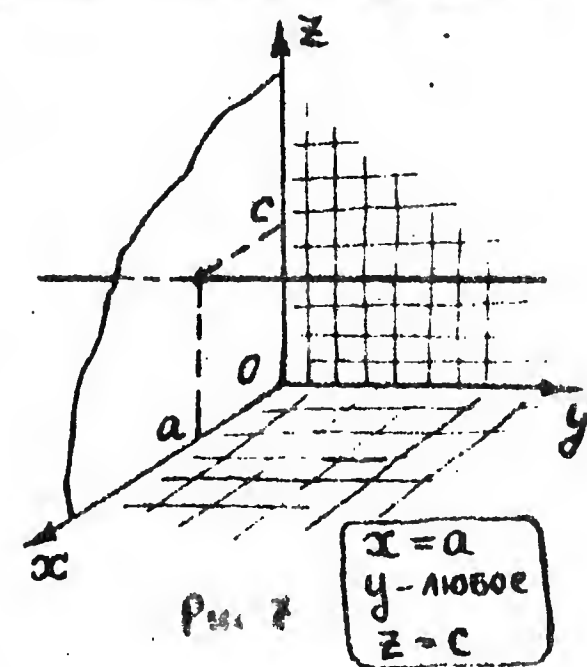


Рис.7

Точно также условия $\begin{cases} y=b \\ z=c \end{cases}$, определяют прямую, параллельную оси x (рис.6), условия $\begin{cases} z=c \\ x=a \end{cases}$ - прямую, параллельную оси y (рис.7).

Посмотрим, какое множество точек получится, если задать только одну координату, например, $z=1$. Ответ ясен из рис. 8: это плоскость, параллельная координатной плоскости xy (т.е. плоскости, проходящей через ось x и ось y) и отстоящая от неё на расстоянии 1 в направлении положительной полуоси z .

Разберем еще несколько примеров, показывающих, как можно задавать в пространстве различные множества с помощью уравнений и других соотношений между координатами.

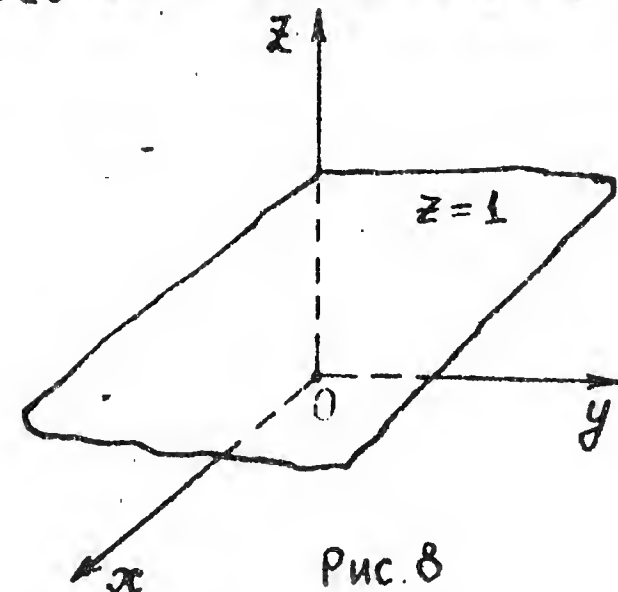


Рис. 8

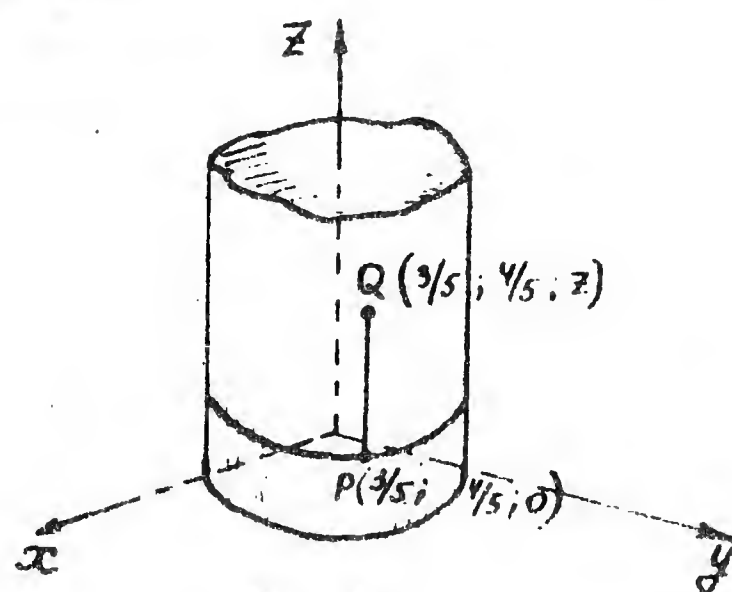


Рис. 9

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (I0)$$

Поскольку расстояние точки $(x; y; z)$ от начала координат задается выражением $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то ясно, что в переводе на геометрический язык соотношение (I0) означает, что точка с координатами $(x; y; z)$, удовлетворяющими этому соотношению, находится на расстоянии R от начала координат. Значит, множество всех точек, для которых выполняется соотношение (I0), это поверхность - сфера с центром в начале координат и радиусом R .

2. Рассмотрим, где расположены точки, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Так как это соотношение означает, что расстояние точки $(x; y; z)$

от начала координат меньше единицы, то искомое множество - это множество точек, лежащих внутри шара с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

3. Какое множество точек задается уравнением

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (II)$$

Рассмотрим сначала только точки плоскости xy , удовлетворяющие этому соотношению, т.е. точки, для которых $z=0$. Тогда уравнение (II), как мы знаем, задает окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1. У каждой точки этой окружности координата z равна нулю, а координаты x и y удовлетворяют соотношению (II). Например, точка

$P(3/5; 4/5; 0)$ удовлетворяет этому уравнению (рис.9).

Однако, зная эту точку, мы можем найти сразу много других точек, удовлетворяющих тому же уравнению. Действительно, так как в уравнение (II) не входит z , то и точка $(3/5; 4/5; 10)$ удовлетворяет уравнению, и точка $(3/5; 4/5; -5)$, и вообще все точки $Q(3/5; 4/5; z)$, где значение координаты z совершенно произвольно. Все эти точки лежат на прямой, проходящей через точку $(3/5; 4/5; 0)$ параллельно оси z . Таким же образом из каждой точки $(x^*; y^*; 0)$ нашей окружности, лежащей на плоскости xy , мы можем получить много точек, удовлетворяющих уравнению (II). Для этого проведем через эту точку окружности прямую параллельную оси z . Все точки этой прямой будут иметь x и y такие же, как и у точки окружности, а z может быть любым числом, т.е. это будут точки вида $(x^*; y^*; z)$. Но поскольку z в уравнение (II) не входит, а числа $(x^*; y^*; 0)$ уравнению удовлетворяют, то и числа $(x^*; y^*; z)$ тоже удовлетворяют уравнению (II). Ясно, что таким образом можно получить всякую точку, удовлетворяющую уравнению (II).

Итак, множество точек, определяемое уравнением (II), получается следующим образом: берем на плоскости xy окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 1, и через каждую точку этой окружности проводим прямую, параллельную оси z . Мы получаем так называемую цилиндрическую поверхность (рис.9).

4. Мы видели, что одно уравнение задает в пространстве, вообще говоря, некоторую поверхность. Но это не всегда так.

Например, уравнению $x^2 + y^2 = 0$ удовлетворяют только точки линии - оси z , так как из уравнения следует, что x и y

равны нулю. а все точки, для которых эти координаты равны нулю, расположены на оси z .

Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ изображает точку (начало координат), а уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = -1$ соответствует пустое множество.

⑤. Что будет, если рассмотреть точки, координаты которых удовлетворяют не одному уравнению, а системе уравнений?

Рассмотрим, например, такую систему:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1. \end{cases} \quad (I2)$$

Точки, удовлетворяющие первому уравнению, заполняют поверхность сферы радиуса 2 с центром в начале координат. Точки, удовлетворяющие второму уравнению, заполняют плоскость, параллельную плоскости xy и расположенную от неё на расстоянии 1 в положительную сторону оси z . Точки, удовлетворяющие и первому, и второму уравнению, должны лежать и на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, и на плоскости $z = 1$, т.е. лежать на их линии пересечения. Таким образом, эта система задает окружность, являющуюся линией пересечения сферы и плоскости (рис.10).

Мы видим, что каждое из уравнений системы задает поверхность, а оба уравнения вместе, т.е. система, задают линию.

Вопрос. Какие из указанных ниже точек лежат на первой поверхности, какие на второй, а какие - на линии их пересечения?

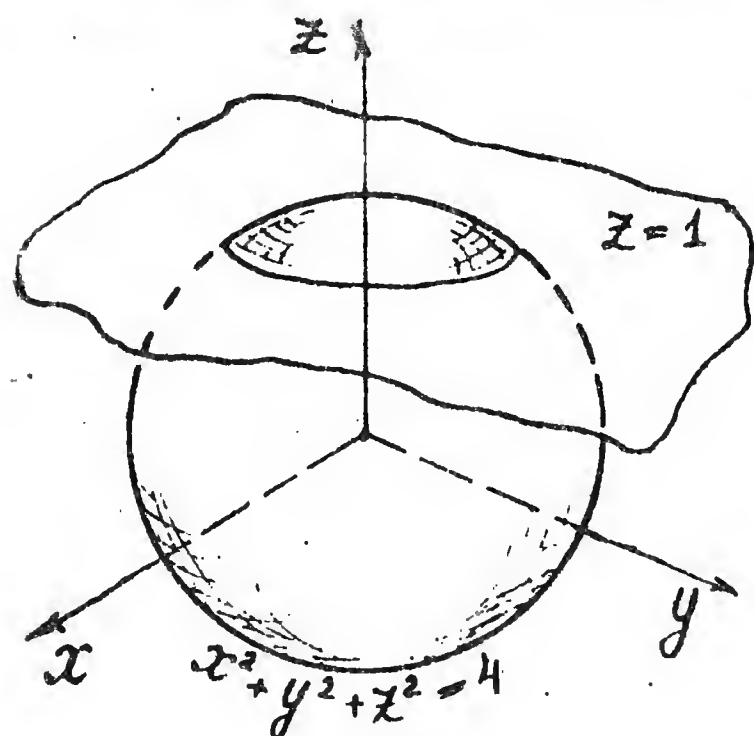


Рис. 10

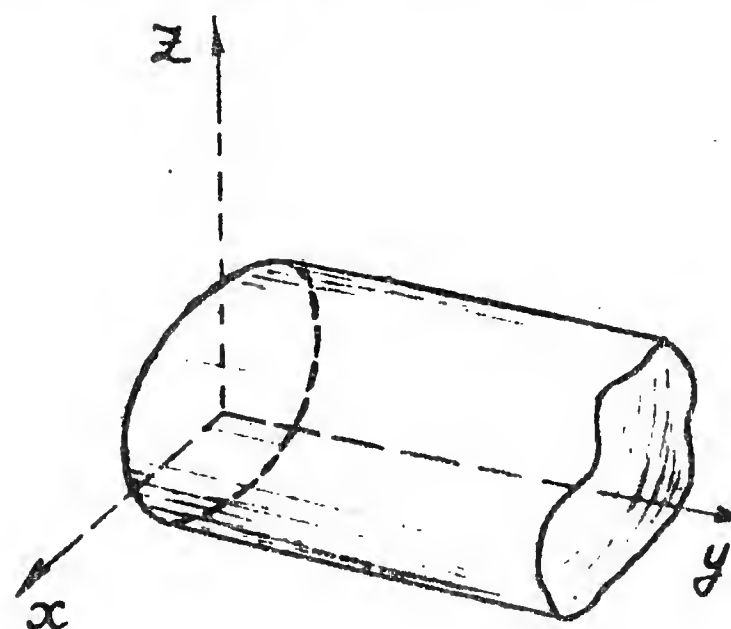


Рис. 11

⑥. Как задать в пространстве окружность, расположенную в плоскости xz с центром в начале координат и радиусом 1?

Уравнение $x^2 + z^2 = 1$ определяет в пространстве, как Вы уже видели, цилиндрическую поверхность. Чтобы получить только точки нужной нам окружности, к этому уравнению надо добавить условие $y = 0$, выделив тем самым из всех точек цилиндра точки, лежащие на плоскости xz (рис.11). Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

I2-1. Какие множества точек задают в пространстве соотношения:

$$1) z^2 = 1 ; 2) y^2 + z^2 = 1 ; 3) x^2 + y^2 + z^2 = 1 ?$$

I2-2. Имеются три системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \quad (I) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1, \\ x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Какие из этих систем определяют одну и ту же линию, а какие-разные?

I2-3. Как задать в пространстве биссектрису угла xoy ?

Какое множество будет задавать в пространстве одно уравнение

$$x = y ?$$

Теперь Вы уже знаете кое-что о методе координат, и мы можем поговорить с Вами об интересных вещах, больше связанных с современной математикой.

I3. Немного общих рассуждений

Алгебра и геометрия, которые сейчас большинство школьников воспринимают как совершенно разные науки, на самом деле очень близки. С помощью метода координат можно было бы изложить весь школьный курс геометрии без единого чертежа, используя только числа и алгебраические операции. Курс планиметрии начинался бы словами: "Назовем точкой пару чисел $(x; y)$ " Далее можно было бы определить окружность как совокупность точек, удовлетворяющих уравнению вида $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Прямой линией

называлась бы совокупность точек, удовлетворяющих уравнению $ax + by + c = 0$. Многие другие фигуры можно было бы также охарактеризовать системами уравнений и неравенств. Все геометрические теоремы превратились бы при этом в некоторые алгебраические соотношения. В наших следующих выпусках мы расскажем подробнее, как это делается.

Установление связи между алгеброй, с одной стороны, и геометрией, с другой стороны, было, по существу, революцией в математике. Оно восстановило математику как единую науку, в которой нет "китайской стены" между остальными её частями. Создателем метода координат считают французского философа и математика Рене Декарта (1596-1650). В последней части большого философского трактата Декарта, вышедшей в 1637 году, давалось описание метода координат и его применения к решению геометрических задач. Развитие идей Декарта привело к возникновению особой ветви математики, которую теперь называют аналитической геометрией.

Само это название выражает основную идею теории. Аналитическая геометрия — это та часть математики, которая решает геометрические задачи аналитическими (т.е. алгебраическими) средствами. Хотя аналитическая геометрия является сейчас уже вполне развитым и законченным разделом математики, идеи, лежащие в её основе, породили новые отрасли математики. Возникла и развивается алгебраическая геометрия, которая изучает свойства линий и поверхностей, заданных алгебраическими уравнениями. Эту часть математики никак нельзя считать законченной. Как раз в последние годы в ней получены новые фундаментальные результаты, оказавшие большое влияние и на другие разделы математики.

14. Геометрия помогает считать

При решении геометрических задач на первый план выступает одна сторона метода координат — аналитическое истолкование понятий, перевод геометрических образов и соотношений на язык чисел. Однако другая сторона метода координат — геометрическая интерпретация — имеет не менее важное значение. Знаменитый математик Герман Минковский (1864-1909) использовал геометрический подход для решения уравнений в целых числах, и математики его времени были поражены тем, насколько простым и ясным оказались при этом некоторые, казавшиеся раньше очень трудными, вопросы теории чисел.

Разберем один совсем простой пример, показывающий, как геометрия помогает решать алгебраические задачи.

Задача. Рассмотрим неравенство

$$x^2 + y^2 \leq n,$$

где n — некоторое целое положительное число. Спрашивается, сколько решений в целых числах (N) имеет это неравенство?

Решение. Для небольших значений n на этот вопрос легко ответить. Например, при $n=0$ есть только одно решение: $x=0$, $y=0$. При $n=1$ к этому решению прибавляются еще четыре: $x=0$, $y=1$; $x=1$, $y=0$; $x=0$, $y=-1$ и $x=-1$, $y=0$. Значит, при $n=1$ всего будет пять решений. При $n=2$, кроме уже перечисленных, имеется еще четыре решения: $x=1$, $y=1$; $x=-1$, $y=1$; $x=1$, $y=-1$; $x=-1$, $y=-1$. Всего при $n=2$ имеется 9 решений. Продолжая таким образом, мы можем составить таблицу.

Мы видим, что число решений N растет с возрастанием n , но угадать точный закон изменения N довольно трудно. Можно предположить, глядя на правую колонку таблицы, что отношение N/n с возрастанием n стремится к некоторому числу.

С помощью геометрической интерпретации мы сейчас покажем, что это действительно так и что отношение N/n стремится к известному Вам числу $\pi = 3,14159265 \dots$.

n	N	N/n
0	1	—
1	5	5
2	9	4,5
3	13	4,33
4	17	4,25
5	21	4,2
10	37	3,7
20	69	3,45
50	161	3,22
100	317	3,17

$$x^2 + y^2 \leq n$$

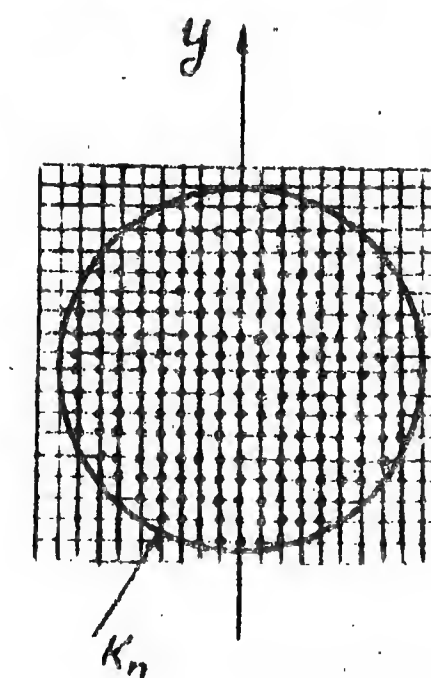


Рис 12

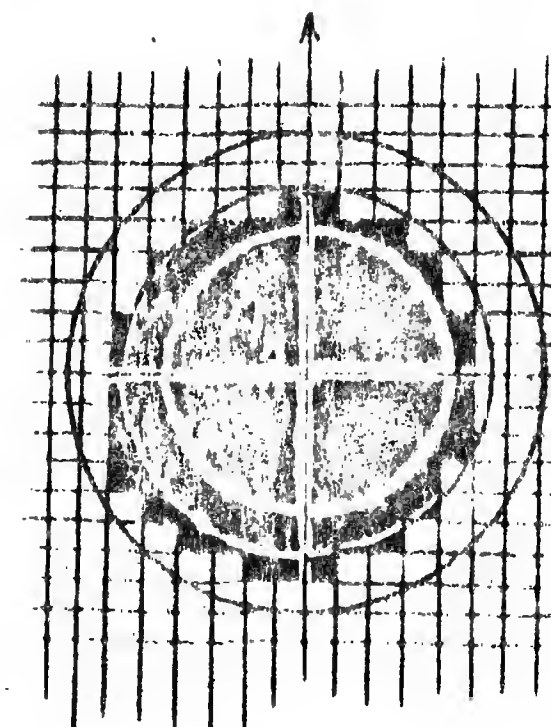


Рис 13

использовать такой важный раздел современной физики, как теория относительности Альберта Эйнштейна.

Любой математик может позавидовать Минковскому, который после того, как он очень удачно использовал геометрию в теории чисел, сумел еще раз с помощью наглядных геометрических соображений внести ясность в трудные математические вопросы, — на этот раз касающиеся теории относительности. В основе теории относительности лежит идея о неразрывной связи пространства и времени. Поэтому естественно считать момент времени, в который происходит какое-либо событие, четвертой координатой этого события, наряду с первыми тремя, определяющими точку пространства, в которой происходит это событие.

Получаемое так четырехмерное пространство называется пространством Минковского. С описания этого пространства начинается сейчас любой курс теории относительности. Открытие Минковского состоит в том, что основные формулы теории относительности — формулы Лоренца, записанные на языке координат для этого специального четырехмерного пространства — являются чрезвычайно простыми.

Таким образом, для современной физики оказалось большой удачей, что ко времени открытия теории относительности математики подготовили удобный, компактный и красивый аппарат многомерной геометрии, который в ряде случаев значительно упрощает решения задач.

Четырехмерное пространство

В заключение мы, как и обещали, расскажем Вам немного о геометрии четырехмерного пространства.

При построении геометрии на прямой, на плоскости и в трехмерном пространстве у нас есть две возможности: либо излагать материал с помощью наглядных представлений (этот способ характерен для школьного курса, поэтому трудно себе представить учебник геометрии без чертежей), либо — и эту возможность дает нам метод координат — излагать его чисто аналитически, назвав, например, точкой плоскости в курсе планиметрии пару чисел (координаты этой точки), а точкой пространства — тройку чисел.

При введении четырехмерного пространства первая возможность у нас отсутствует. Мы не можем непосредственно пользоваться наглядными геометрическими представлениями — ведь окружающее нас

пространство имеет лишь три измерения. Однако вторая дорога для нас не закрыта. В самом деле, мы определяем точку прямой как число, точку плоскости — как пару чисел, точку трехмерного пространства — как тройку чисел. Поэтому совершенно естественно построить геометрию четырехмерного пространства, определив точку этого воображаемого пространства как четверку чисел. Под геометрическими фигурами в таком пространстве нужно будет понимать множества точек (как, впрочем, и в случае обычной геометрии). Перейдем теперь к точным определениям.

18. Координатные оси и плоскости.

Р Определение. Точкой четырехмерного пространства называется упорядоченная¹⁾ четверка чисел $(x; y; z; t)$.

Что считать в пространстве четырех измерений координатными осями и сколько их?

Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся на время к плоскости и трехмерному пространству.

На плоскости (т. е. в пространстве двух измерений) координатные оси — это множества точек, у которых одна из координат может иметь любое числовое значение, а вторая равна нулю. Так, ось абсцисс — это множество точек вида $(x; 0)$, где x — любое число.

Например, на оси абсцисс лежат точки $(1; 0)$, $(-3; 0)$, $(\sqrt{5}/3; 0)$, а точка $(1/5; 2)$ не лежит на оси абсцисс. Ось ординат плоскости — это множество точек вида $(0; y)$, где y — любое число.

В трехмерном пространстве есть три оси:

ось x — это множество точек вида $(x; 0; 0)$, где x — любое число;

ось y — множество точек вида $(0; y; 0)$, где y — любое число;

ось z — множество точек вида $(0; 0; z)$, где z — любое число.

В четырехмерном пространстве, состоящем из всех точек вида $(x; y; z; t)$, где x, y, z, t — любые числа, естественно считать координатными осями такие множества точек, у которых одна из координат принимает любые числовые значения, а остальные равны нулю. Тогда ясно, что в четырехмерном пространстве есть четыре координатные оси:

¹⁾ Мы говорим "упорядоченная", так как при разном расположении одних и тех же чисел в четверке получаются разные точки: например, точка $(1; -2; 3; 8)$ отлична от точки $(3; 1; 8; -2)$.

ось x - это множество точек вида $(x; 0; 0; 0)$, где x - любое число;
 ось y - это множество точек вида $(0; y; 0; 0)$, где y - любое число;
 ось z - это множество точек вида $(0; 0; z; 0)$, где z - любое число;
 ось t - это множество точек вида $(0; 0; 0; t)$, где t - любое число.

В трехмерном пространстве, кроме координатных осей, имеются еще координатные плоскости. Это - плоскости, проходящие через какие-либо координатные оси. Например, плоскость yz - это плоскость, проходящая через ось y и ось z .

Всего в трехмерном пространстве есть три координатные плоскости:

плоскость xy - множество точек вида $(x; y; 0)$, где x и y - любые числа;
 плоскость yz - множество точек вида $(0; y; z)$, где y и z - любые числа;
 плоскость xz - множество точек вида $(x; 0; z)$, где x и z - любые числа.

Естественно и в четырехмерном пространстве называть координатными плоскостями множества точек, у которых какие либо две из четырех координат принимают любые числовые значения, а остальные две равны нулю. Например, множество точек вида $(x; 0; z; 0)$ мы будем называть координатной плоскостью xz четырехмерного пространства. Сколько же всего таких плоскостей?

Это нетрудно сообразить. Мы сейчас просто выпишем их все:

плоскость xy - множество точек вида $(x; y; 0; 0)$;
 плоскость xz - множество точек вида $(x; 0; z; 0)$;
 плоскость xt - множество точек вида $(x; 0; 0; t)$;
 плоскость yz - множество точек вида $(0; y; z; 0)$;
 плоскость yt - множество точек вида $(0; y; 0; t)$;
 плоскость zt - множество точек вида $(0; 0; z; t)$.

Для каждой из этих плоскостей переменные координаты могут принимать любые числовые значения, в том числе и нулевое. Например, точка $(5; 0; 0; 0)$ заведомо принадлежит плоскости xy и плоскости xt (а еще какой?). Тогда легко видеть, что, например, плоскость yz "проходит" через ось y в том смысле, что каждая точка этой оси принадлежит этой плоскости. Действительно, любая точка на оси y , т.е. точка вида $(0; y; 0; 0)$, принадлежит множеству точек вида $(0; y; z; 0)$, т.е. плоскости yz .

Вопрос. Какое множество образуют точки, принадлежащие одновременно и плоскости yz , и плоскости xz ?

Ответ: Это множество состоит из всех точек вида $(0; 0; z; 0)$, т.е. является просто осью z .

Итак, в четырехмерном пространстве существуют множества точек, аналогичные координатным плоскостям трехмерного пространства. Их шесть. Каждое из них состоит из точек, у которых, как и у точек координатных плоскостей трехмерного пространства, две какие-либо координаты могут принимать любые числовые значения, а остальные две равны нулю. Каждая из этих координатных плоскостей "проходит" через две координатные оси: например, плоскость yz проходит через ось y и ось z . С другой стороны, через каждую ось проходят три координатные плоскости. Так через ось x проходят плоскости xy , xz и xt . Мы будем говорить, что ось x является пересечением этих плоскостей. Все шесть координатных плоскостей содержат одну общую точку. Это точка $(0; 0; 0; 0)$ - начало координат.

Вопрос. Какое множество точек является пересечением плоскостей xy и yz ? xy и zt ?

Мы видим, что картина получается вполне аналогичной той, которая имеется в трехмерном пространстве. Мы даже сейчас попытаемся сделать схематический рисунок, который поможет создать некоторый наглядный образ расположения координатных плоскостей и осей четырехмерного пространства.

На рис.15 оси координат изображены прямыми, показаны координатные плоскости; все точно так же, как это было сделано на рис.2 для трехмерного пространства.

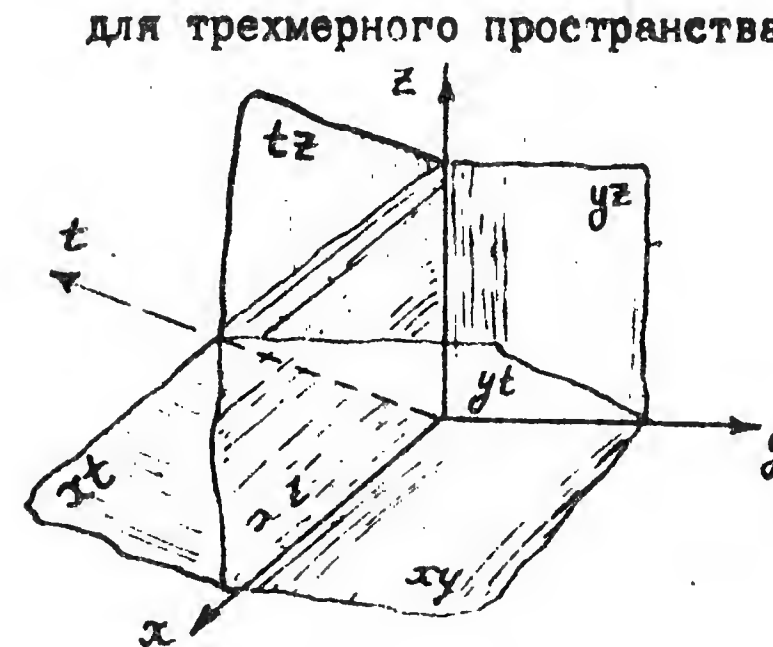


Рис.15

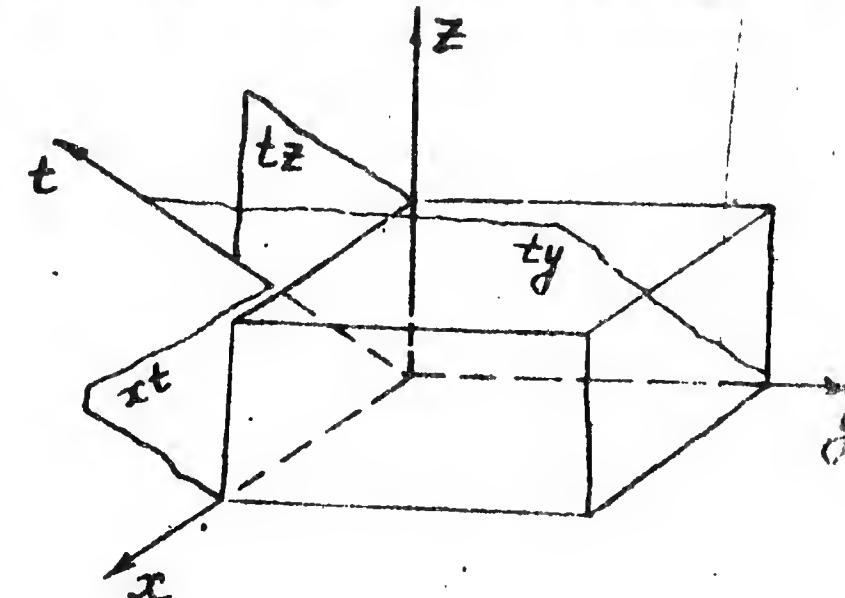


Рис.16

Однако в четырехмерном пространстве есть еще множества точек, которые можно назвать трехмерными координатными плоскостями. Этого, кстати сказать, следовало ожидать: на прямой имеется только начало координат; на плоскости есть и начало координат, и оси; в трехмерном пространстве, кроме начала и осей, появляются еще координатные плоскости. Естественно, что в четырехмерном пространстве появляются новые множества, которые мы будем называть трехмерными координатными плоскостями.

Это — множества, состоящие из всех точек, у которых какие-либо три из четырех координат принимают всевозможные числовые значения, а четвертая равна нулю. Таково, например, множество точек вида $(x; 0; z; t)$, где x, z, t принимают всевозможные значения. Это множество будем называть трехмерной координатной плоскостью xzt . Легко понять, что в четырехмерном пространстве существуют четыре координатные трехмерные плоскости:

плоскость xyz — множество точек вида $(x; y; z; 0)$;
плоскость xyt — множество точек вида $(x; y; 0; t)$;
плоскость xzt — множество точек вида $(x; 0; z; t)$;
плоскость yzt — множество точек вида $(0; y; z; t)$.

Можно также сказать, что каждая из трехмерных координатных плоскостей "проходит" через начало координат и что каждая из этих плоскостей "проходит" через три координатные оси (слово "проходит" мы здесь употребляем в том смысле, что начало координат и каждая из точек осей принадлежит плоскости).

Например, трехмерная плоскость xyt проходит через оси x, y и t .

Аналогично можно сказать, что каждая из двухмерных плоскостей является пересечением двух трехмерных плоскостей. Например, плоскость xy является пересечением трехмерных плоскостей xyz и xyt , т.е. состоит из всех точек, принадлежащих и тому, и другому множеству. Посмотрите на рис. 16. Он отличается от рис. 15 тем, что мы дорисовали на нем трехмерную координатную плоскость xyz . Она изображена параллелепипедом. Видно, что эта плоскость содержит оси x, y и z и плоскости xy, xz и yz .

19. Некоторые задачи.

Попробуем теперь разобраться в том, в каком смысле можно говорить о расстоянии между точками четырёхмерного пространства.

В пп. 3, 6 и 10 мы показали, что метод координат дает возможность определять расстояние между точками, не опираясь на геометрические представления. Действительно, расстояние вычисляется для точек $A(x_1)$ и $B(x_2)$ прямой по формуле:

$$|AB| = |x_1 - x_2|$$

или

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2};$$

для точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости — по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

А для точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ трехмерного пространства — по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Естественно и для четырёхмерного пространства определить расстояние аналогичным образом, а именно, ввести следующее

Определение. Расстоянием между двумя точками

$A(x_1; y_1; z_1; t_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2; t_2)$ четырёхмерного

пространства называется число $|AB|$, вычисляемое по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (t_1 - t_2)^2}.$$

В частности, расстояние точки $A(x; y; z; t)$ от начала координат $(0; 0; 0; 0)$ дается формулой

$$|OA| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Пользуясь этим определением, можно уже решать задачи из геометрии четырёхмерного пространства, совсем похожие на те, которые Вы решаете по школьным задачникам.

[19-1.] Докажите, что треугольник с вершинами $A(4; 7; -3; 5)$, $B(3; 0; -3; 1)$ и $C(-1; 7; -3; 0)$ — равнобедренный.

[19-2.] Имеются четыре точки четырёхмерного пространства: $A(1; 1; 1; 1)$, $B(-1; -1; 1; 1)$, $C(-1; 1; 1; -1)$, $D(1; -1; 1; -1)$. Докажите, что эти четыре точки равноудалены друг от друга.

[19-3.] Пусть A, B и C — точки четырёхмерного пространства. Мы можем определить угол ABC следующим образом. Поскольку

мы умеем вычислять расстояния в четырехмерном пространстве, найдем $|AB|$, $|BC|$ и $|AC|$, т.е. "длины сторон" треугольника ABC .

Построим на двумерной плоскости $\triangle A'B'C'$ такой, чтобы $|A'B'|$, $|B'C'|$, $|A'C'|$ равнялись бы соответственно $|AB|$, $|BC|$ и $|AC|$. Тогда угол $A'B'C'$ этого треугольника и будем называть углом ABC в четырехмерном пространстве. ¹⁾

Докажите, что треугольник с вершинами $A(4; 7; -3; 5)$, $B(3; 0; 3; 1)$ и $C(1; 3; -2; 0)$ — прямоугольный.

[19-4.] Возьмем точки A , B и C из упражнения 19-1. Вычислите углы A , B и C треугольника ABC .

Четырехмерный куб.

20. Определения сферы и куба.

Перейдем теперь к рассмотрению геометрических фигур в четырехмерном пространстве. Под геометрической фигурой (как и в случае обычной геометрии) будем понимать некоторое множество точек.

Возьмем, например, определение сферы: сфера есть множество точек, удаленных от некоторой точки на одно и то же расстояние (рис. 17). Это определение уже можно использовать, чтобы по аналогии определить сферу в четырехмерном пространстве.

Мы и примем это определение, переводя его на язык чисел (для простоты, как и в случае трехмерного пространства, возьмем сферу с центром в начале координат).

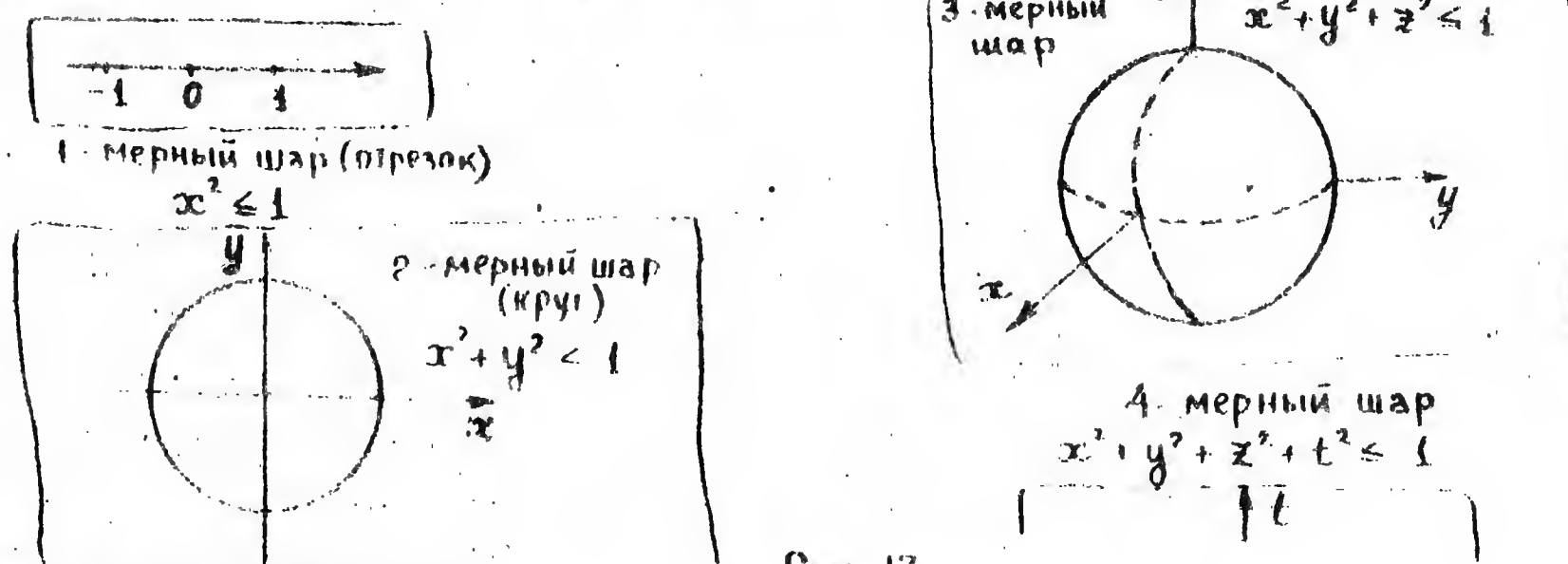


Рис. 17

¹⁾ Чтобы определение, как говорят математики, было корректным (имело бы смысл, было бы правомерным), необходимо доказать, что треугольник со сторонами $|AB|$, $|BC|$ и $|AC|$ может быть построен на плоскости. Для этого нужно убедиться в том, что каждое из этих расстояний меньше суммы двух других, т.е. доказать некоторые довольно простые неравенства.

Определение. Множество точек $(x; y; z; t)$, удовлетворяющих соотношению

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2,$$

называется четырехмерной сферой с центром в начале координат и радиусом R .

Если рассматривать не сферу, а шар, то указанное равенство надо заменить неравенством

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 < R^2$$

Это замечание относится также к двумерному и трехмерному случаям.

Расскажем теперь немного о четырехмерном кубе. Судя по названию, это фигура, аналогичная обыкновенному, хорошо Вам знакомому трехмерному кубу (рис. 18). На плоскости тоже есть фигура, аналогичная кубу — это квадрат. Аналогию между ними можно особенно легко увидеть, если рассмотреть аналитические определения куба и квадрата.

Действительно (как Вы уже знаете из упражнения 11-5), можно дать такое определение.

Кубом называется множество точек $(x; y; z)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Это "арифметическое" определение куба не нуждается уже ни в каком чертеже. Однако оно полностью соответствует геометрическому определению куба ¹⁾.

Для квадрата тоже можно дать арифметическое определение.

Квадратом на плоскости xy называется множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих соотношениям $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$

¹⁾ Конечно, в пространстве есть и другие кубы. Например, множество точек, определяемых соотношением $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$, тоже является кубом. Этот куб очень хорошо расположен относительно координатных осей: начало координат является его центром, координатные оси и координатные плоскости — осями и плоскостями симметрии. Однако для наших целей удобен именно куб, определяемый соотношениями (13). Такой куб мы будем иногда называть единичным, чтобы отличить его от других кубов.

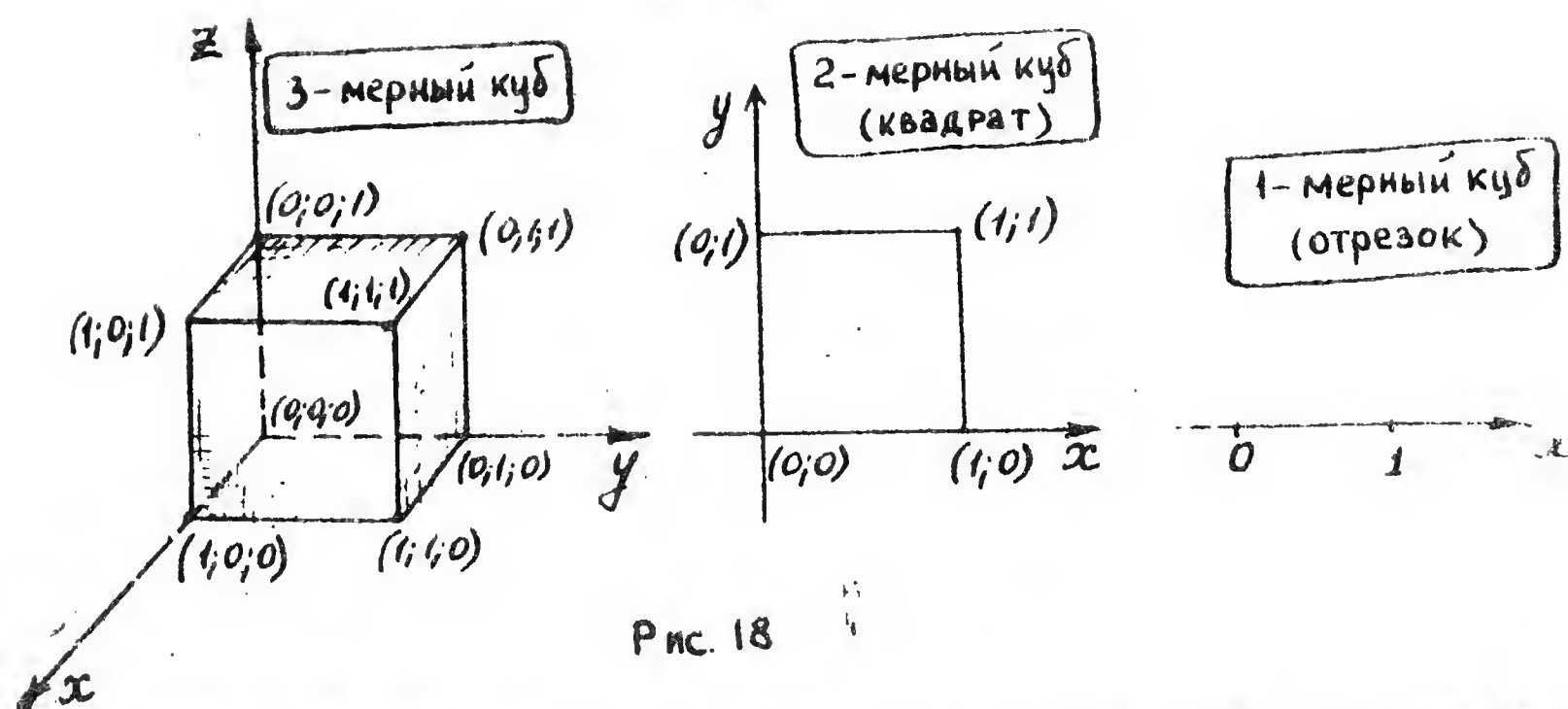


Рис. 18

Сравнивая эти два определения, легко понять, что квадрат действительно является, как говорят, двумерным аналогом куба. Мы будем называть иногда квадрат "двумерным кубом".

Можно также рассмотреть аналог этих фигур и в пространстве одного измерения — на прямой. Мы получим множество точек x прямой, удовлетворяющих соотношению:

$$0 \leq x \leq 1.$$

Ясно, что таким "одномерным кубом" является отрезок.

Надеемся, что теперь для Вас совершенно естественно выглядит следующее

Р Определение. Четырехмерным кубом называется множество точек $(x; y; z; t)$, удовлетворяющих одновременно четырём соотношениям:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq t \leq 1.$$

Не надо огорчаться, что мы не привели пока рисунок четырехмерного куба — мы это сделаем потом (не удивляйтесь, что можно нарисовать четырехмерный куб: ведь рисуем же мы трехмерный куб на плоском листе бумаги). Для этого сначала надо разобраться, как этот куб "устроен", какие элементы в нем можно различать.

21. Устройство четырехмерного куба.

Рассмотрим по порядку "кубы" различных размерностей, т.е. отрезок, квадрат и обычный куб.

Отрезок, определяемый соотношениями $0 \leq x \leq 1$, является очень простой фигурой. Про него, пожалуй, можно лишь сказать, что его граница состоит из двух точек 0 и 1. Остальные точки отрезка мы будем называть внутренними.

Граница квадрата состоит из четырех точек (вершин) и четырех отрезков. Таким образом, квадрат имеет на границе элементы двух типов: точки и отрезки. Граница трехмерного куба содержит элементы трех типов: вершины — их 8, ребра (отрезки) — их 12 и грани (квадраты) — их 6.

Запишем эти данные в виде таблицы:

Фигура	Состав границы	Точек (вершин)	Отрезков (сторон, ребер)	Квадратов (граней)
Отрезок		2	—	—
Квадрат		4	4	—
Куб		8	12	6

Эту таблицу можно переписать короче, если условиться писать вместо названия фигуры число n , равное её размерности:

для отрезка $n = 1$,

для квадрата $n = 2$,

для куба $n = 3$.

Вместо названия элемента границы тоже можно писать размерность этого элемента:

для грани $n = 2$,

для ребра $n = 1$.

При этом точку (вершину) удобно считать элементом нулевой размерности $n = 0$. Тогда предыдущая таблица примет вид

Размерность куба \ Размерность границы	0	1	2
1	2	—	—
2	4	4	—
3	8	12	6
4	?	?	?

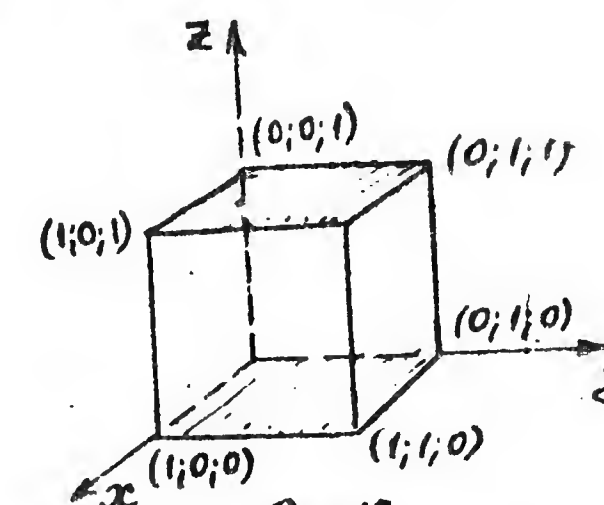


Рис. 19

Наша цель — заполнить четвертую строку этой таблицы. Для этого мы еще раз, но теперь уже аналитически ¹⁾ просмотрим границы отрезка, квадрата и куба (рис.19) и по аналогии попробуем сообразить, как устроена граница четырехмерного куба.

¹⁾ То есть чисто арифметически.

Граница отрезка $0 \leq x \leq 1$ состоит из двух точек:
 $x=0$ и $x=1$.

Граница квадрата $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$
 содержит четыре вершины:

$$\begin{aligned} x=0, y=0, \\ x=0, y=1, \\ x=1, y=0, \\ x=1, y=1, \end{aligned}$$

т.е. точки $(0;0)$, $(0;1)$, $(1;0)$ и $(1;1)$.

Куб $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$
 содержит восемь вершин. Каждая из этих вершин есть точка
 $(x; y; z)$,

в которой x , y и z заменяются либо нулём, либо единицей.
 Получаются следующие восемь точек:

$$(0;0;0), (0;0;1), (0;1;0), (0;1;1), (1;0;0), (1;0;1), (1;1;0), (1;1;1).$$

Вершинами четырехмерного куба

Р $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$

называются точки $(x; y; z; t)$, у которых x , y , z
 и t заменяются либо нулём, либо единицей.

Таких вершин 16 потому, что можно составить 16 различных
 четверок из нулей и единиц. В самом деле, возьмем тройки, состав-
 ленные из координат вершин трехмерного куба (их 8), и к каждой
 такой тройке припишем сначала 0, потом 1 (рис.20). Таким образом,
 из каждой такой тройки получится две четверки, всего четверок
 будет $8 \cdot 2 = 16$. Итак, вершины четырехмерного куба мы сосчитали.

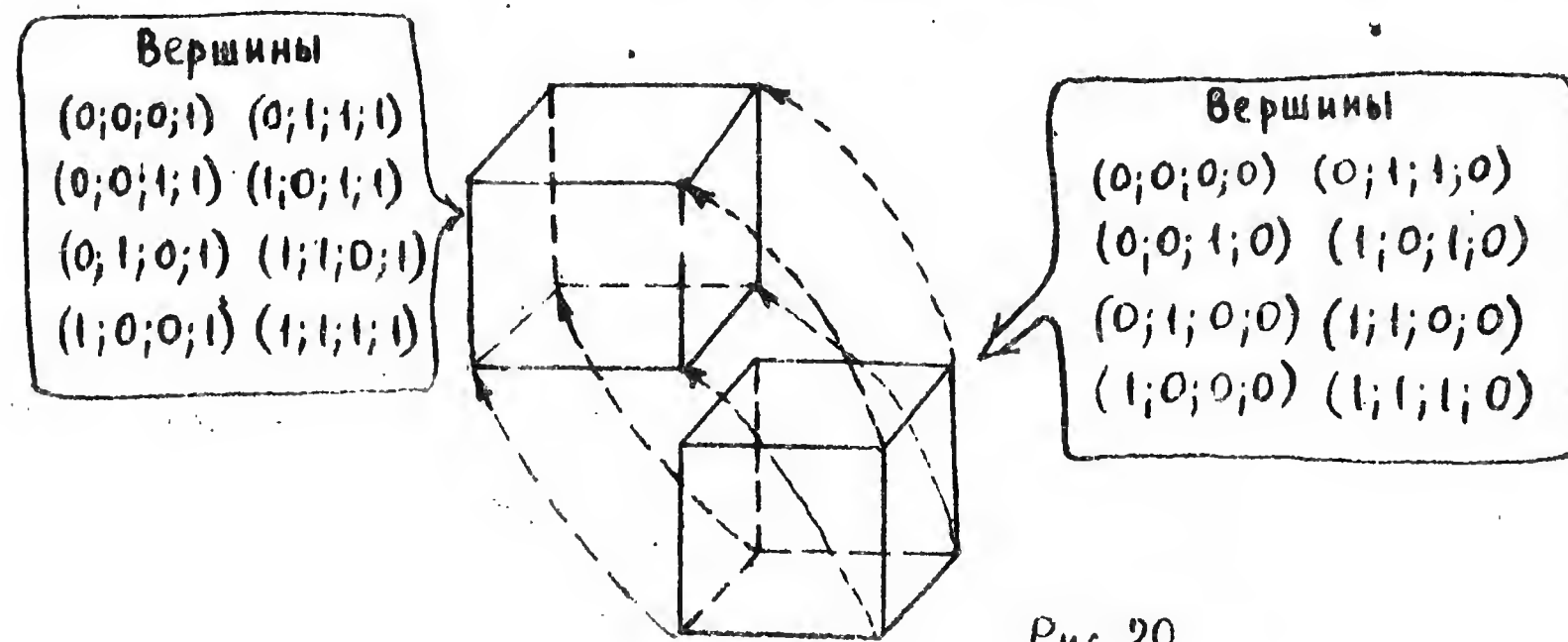


Рис.20

Подумаем теперь, что следует называть ребром четырехмерного
 куба. Снова воспользуемся аналогией. У квадрата ребра (стороны)
 определяются следующими соотношениями (см.рис.21 и 18):

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, y=0 & \quad (\text{ребро } AB); \\ 0 \leq y \leq 1, x=1 & \quad (\text{ребро } BC); \\ 0 \leq x \leq 1, y=1 & \quad (\text{ребро } CD); \\ x=0, 0 \leq y \leq 1 & \quad (\text{ребро } DA). \end{aligned}$$

Как мы видим, для ребер квадрата характерно, что у всех то-
 чек данного ребра какая-нибудь из координат имеет определенное
 числовое значение 0 или 1, а вторая координата принимает все зна-
 чения между 0 и 1.

Далее рассмотрим ребра (трехмерного) куба. Мы имеем (см.
 рис.21):

$$\begin{aligned} x=0, y=0, 0 \leq z \leq 1 & \quad (\text{ребро } AA_1); \\ 0 \leq x \leq 1, y=0, z=1 & \quad (\text{ребро } A_1B_1); \\ x=1, 0 \leq y \leq 1, z=1 & \quad (\text{ребро } B_1C_1). \end{aligned}$$

и т.д.

По аналогии дадим

Р

Определение. Ребрами четырехмерного куба называ-
 ются множества точек, для которых все координаты, кроме од-
 ной, постоянны (равны либо 0, либо 1), а четвертая при-
 нимает все возможные значения от 0 до 1.

Примеры ребер:

- 1) $x=0, y=0, z=1, 0 \leq t \leq 1$;
- 2) $0 \leq x \leq 1, y=1, z=0, t=1$;
- 3) $x=1, 0 \leq y \leq 1, z=0, t=0$.

и т.д.

Попробуем посчитать, сколько ребер у четырехмерного куба,
 т.е. сколько можно написать таких строчек. Чтобы не запутаться,
 будем считать их в определенном порядке. Прежде всего, будем
 различать четыре группы ребер: для первой пусть переменной коор-
 динатой является x (причем $0 \leq x \leq 1$), а y , z и t
 принимают постоянные значения 0 или 1 во всех всевозможных ком-
 бинациях. Но мы уже знаем, что существует 8 различных троек из

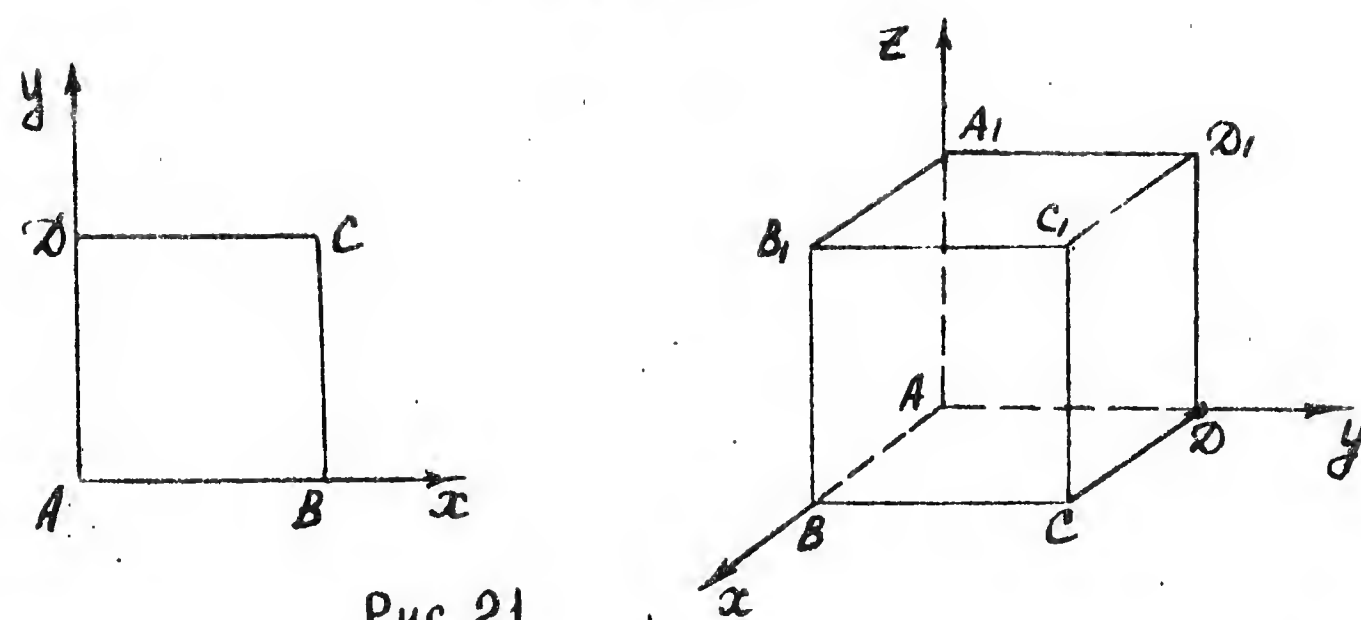


Рис. 21

нулей и единиц (вспомните, сколько вершин у трехмерного куба). Поэтому существует 8 ребер первой группы (для которых переменной координатой является x). Легко понять, что и ребер второй группы, для которых переменной является не x , а y , тоже 8. Таким образом, ясно, что всего у четырехмерного куба $4 \cdot 8 = 32$ ребра.

Вот теперь легко выписать соотношения, определяющие каждое из этих ребер, не боясь пропустить какое-нибудь.

Первая группа $0 \leq x \leq 1$			Вторая группа $0 \leq y \leq 1$			Третья группа $0 \leq z \leq 1$			Четвертая группа $0 \leq t \leq 1$		
y	z	t	x	z	t	x	y	t	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

У трехмерного куба, кроме вершин и ребер, имеются еще грани. На каждой из граней две координаты меняются (принимая всевозможные значения от 0 до 1), а одна координата постоянна (равна 0 или 1). Например, грань $ABBA_1$ (рис. 21) определяется соотношениями:

$$0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1.$$

По аналогии дадим такое

Р

Определение. Двумерной гранью ¹⁾ четырехмерного куба называется множество точек, для которых две какие-нибудь координаты могут принимать всевозможные значения между 0 и 1, а две другие — постоянны (равны либо 0, либо

1).

Пример грани:

$$x = 0, 0 \leq y \leq 1, z = 1, 0 \leq t \leq 1.$$

21-1. Сосчитайте число граней четырехмерного куба.

Указание. Мы советуем сначала, не прибегая к чертежу, а используя только аналитические (арифметические) определения, выписать все шесть строчек соотношений, определяющих шесть граней обычного трехмерного куба.

Ответ. У четырехмерного куба 24 двумерные грани.

Теперь мы можем заполнить четвертую строку нашей таблицы.

Размерность грани	0	1	2	3
Размерность куба				
1	2	—	—	—
2	4	4	—	—
3	8	12	6	—
4	16	32	24	?

Ясно, что эта таблица пока еще не закончена: в ней не хватает правого нижнего элемента. Дело в том, что, вероятно, для четырехмерного куба нужно добавлять еще один столбец. Действительно у отрезка был только один тип границы — вершины, у квадрата прибавились ребра, у куба прибавились квадраты — двумерные грани. Надо ожидать, что у четырехмерного куба, кроме уже знакомых элементов границы, появится еще новый вид элементов, размерность которых будет равна трем.

Попробуем дать

Р

Определение. Трехмерной гранью четырехмерного куба называется множество точек, у которых три координаты принимают всевозможные значения от 0 до 1, а одна — постоянна (равна либо 0, либо 1).

Число трехмерных граней легко сосчитать. Их восемь, так

¹⁾ Необходимость уточнения названия грани (двумерная) будет выяснена несколько позже.

как для каждой из четырех их координат есть два возможных значения 0 и 1, и мы имеем $2 \cdot 4 = 8$.

А теперь посмотрите на рис.22. На нем нарисован четырехмерный куб. На рисунке видны все 16 вершин, 32 ребра, 24 двумерные грани (они изображены параллелограммами), 8 трехмерных граней (они изображены параллелепипедами). На рисунке хорошо видно, какая грань содержит какое ребро и т.д.

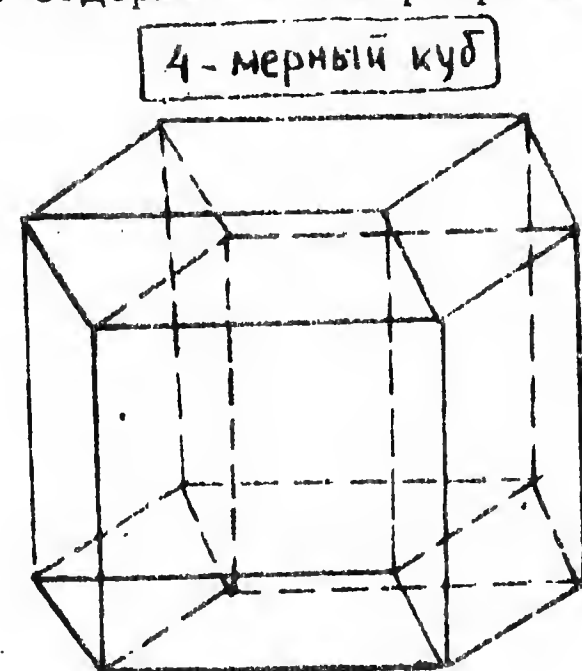


Рис. 22

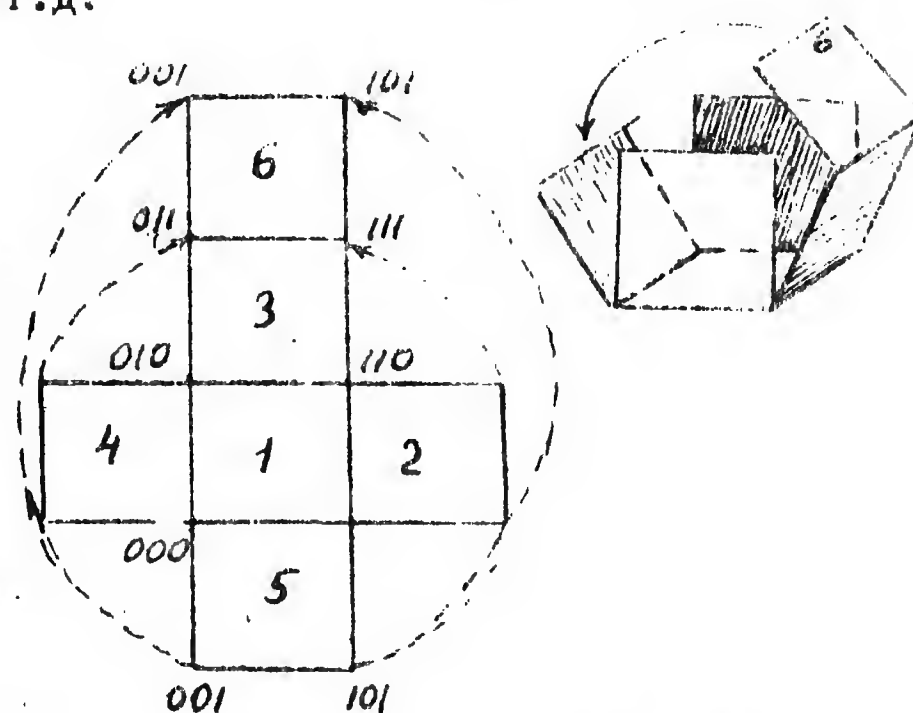


Рис. 23

Наглядное представление о четырехмерном кубе можно получить и другим способом. Представьте себе, что мы попросили Вас прислать модель обычного трехмерного куба. Конечно, Вы можете воспользоваться "трехмерной" почтой. Но трехмерные фигуры почти принимаются в виде посылок, а это сложно. Поэтому лучше сделать так: склеить из бумаги куб, потом его опять расклеить и послать нам выкройку, или, как говорят математики, развертку куба. Такая развертка куба изображена на рис.23.

Так как на рисунке проставлены координаты вершин, то легко понять, как надо склеить эту развертку, чтобы получился сам куб.

21-2. Запишите соотношения, определяющие каждую трехмерную грань четырехмерного куба.

21-3. Можно сделать развертку четырехмерного куба. Это будет некоторая трехмерная фигура. Очевидно, она будет состоять из 8 кубиков. Если Вам удастся сделать или представить себе эту развертку, зарисуйте её и на рисунке укажите координаты каждой вершины.

22. Задачи на куб.

Итак, мы немного разобрались в том, как устроен четырехмерный куб. Попробуем теперь представить себе его размеры. Длина каждого из ребер четырехмерного куба, как и квадрата, как и обычного куба, равна единице (под длиной ребра мы понимаем расстояние между вершинами, лежащими на этом ребре). Недаром мы называли наши "кубы" единичными.

22-1. Посчитайте расстояние между другими вершинами куба, не лежащими на одном ребре (для этого выберите одну из вершин, лучше всего вершину $(0;0;0;0)$ и посчитайте расстояния от этой вершины до всех остальных. Формула для вычисления расстояния между точками у Вас есть, координаты вершин Вы знаете, остается произвести несложные вычисления).

22-2. Решив задачу 22-1, Вы увидите, что все вершины можно разбить на 4 группы. Вершины первой группы находятся от $(0;0;0;0)$ на расстоянии 1; вершины второй группы — на расстоянии $\sqrt{2}$, вершины третьей группы — на расстоянии $\sqrt{3}$ и четвертой — на расстоянии $\sqrt{4} = 2$. Сколько у четырехмерного куба вершин каждой группы?

22-3. Вершина $(1;1;1;1)$ удалена от $(0;0;0;0)$ на самое большее расстояние, равное 2. Эту вершину мы будем называть противоположной вершине $(0;0;0;0)$, а отрезок, их соединяющий — главной диагональю четырехмерного куба. Что называть главной диагональю для кубов других размерностей и чему равны длины их главных диагоналей?

22-4. Теперь представьте себе, что трехмерный куб сделан из проволоки и в вершине $(0;0;0;0)$ сидит муравей. Тогда из одной вершины в другую муравью придется ползти по ребрам. По скольким ребрам ему придется ползти, чтобы попасть в вершину $(1;1;1;1)$ из вершины $(0;0;0;0)$? По трем ребрам. Поэтому вершину $(1;1;1;1)$ мы будем называть вершиной третьего порядка. Из вершины $(0;0;0;0)$ в вершину $(0;1;1;1)$ путь по ребрам состоит из двух звеньев. Такую вершину будем называть вершиной второго порядка. В кубе еще есть вершины первого порядка — это те, в которые муравей может попасть, пройдя по одному ребру. Таких вершин три $(0;0;1;1)$, $(0;1;0;1)$ и $(1;0;0;1)$. Вершин второго порядка у куба тоже три. Запишите их координаты (задача а). Из $(0;0;0;0)$ в каждую из вершин второго порядка существуют два пути, состоящие из двух звеньев. Например, в вер-

шину $(0;1;1)$ можно попасть через вершину $(0;0;1)$, а можно -- через вершину $(0;1;0)$. Сколькими трехзвенными путями можно попасть из вершины в противоположную (задача б)?

22-5. Возьмите четырехмерный куб с центром в начале координат, т.е. множество точек, удовлетворяющих соотношениям:

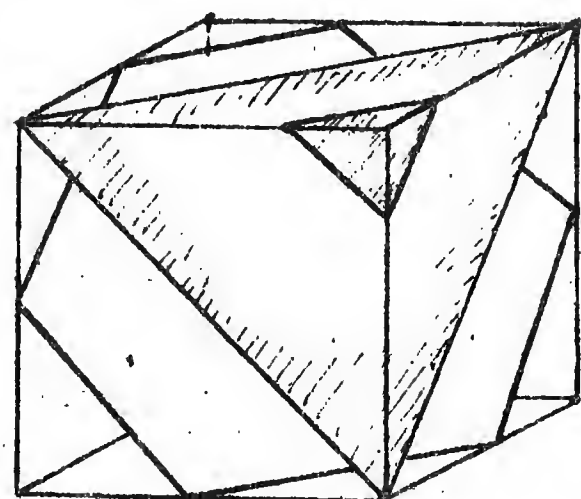
$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1, -1 \leq t \leq 1.$$

Найдите расстояния от вершины $(1;1;1;1)$ до всех остальных вершин этого куба.

Какие вершины будут вершинами первого порядка относительно вершины $(1;1;1;1)$ (т.е. в какие вершины можно попасть из вершины $(1;1;1;1)$, пройдя по одному ребру)? Какие вершины будут вершинами второго порядка? третьего? четвертого?

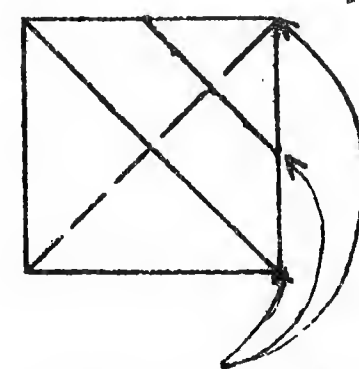
22-6. Этот вопрос может служить для Вас контрольным вопросом по четырехмерному кубу: сколько существует четырехзвенных путей, ведущих из вершины $(0;0;0;0)$ четырехмерного куба в противоположную вершину $(1;1;1;1)$, если идти по ребрам этого куба? Запишите подробно маршруты для каждого пути, указывая по порядку, через какие вершины нужно проходить.

22-7. Если обычный трехмерный куб пересечь некоторой плоскостью, то в пересечении, естественно, получится некоторая плоская фигура -- сечение куба. На рис.86 показано, какие сечения получаются, если куб пересекать плоскостями, перпендикулярными к главной диагонали. Можно представить себе эту картину иначе: куб движется "сквозь" плоскость, вырезая в плоскости последовательно разные сечения.



сечения 3-мерного куба
2-мерной плоскостью

Рис.24



сечения 2-мерного куба
1-мерной плоскостью

Рис.25

Аналогично, если квадрат ("двумерный куб") двигать через прямую ("одномерную плоскость"), перпендикулярную к главной диагонали, то сначала он вырежет на прямой одну только точку, потом эта точка превратится в отрезок, который при движении квадрата будет сначала увеличиваться (до какой длины?), а потом -- опять сожмется в точку (рис.25).

Продолжим аналогию в другую сторону: пусть четырехмерный куб проходит через трехмерное пространство. Тогда в трехмерном пространстве должны возникать трехмерные фигуры -- сечения четырехмерного куба.

Очевидно, это будут некоторые многогранники. Попробуйте сообразить, какие фигуры будут получаться, если четырехмерный куб будет проходить через трехмерное пространство, перпендикулярное к его главной диагонали.

Указание. Мы не ждем от Вас обязательно строгого решения этой задачи. Её нужно попробовать решить прежде всего по аналогии с трехмерным и двумерным случаями. Однако можно попробовать дать и точное доказательство, для чего придется, конечно, уточнить формулировку (например, придется подумать, что значит: "трехмерное пространство перпендикулярно к главной диагонали").

Ротаврият НИИОП АНН СССР

129327, Москва, ул. Ленинская, 4

Заявл. № 315 тираж 10000

1975-76 уч.год.

Методические разработки для учащихся ВЗМШ
по теме "Планиметрия".

Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ.

Часть I.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эти разработки посвящены геометрии на плоскости. При их составлении использованы книги: Ж.Адамар "Элементарная геометрия", Н.Васильев и В.Гутенмахер "Прямые и кривые", А.Тоом, В.Гутенмахер, Н.Васильев, Ж.Работ "Задачи устного экзамена по математике".

Текст разбит на четыре части, которые напечатаны отдельными выпусками. Нумерация параграфов и рисунков сквозная по всем четырем частям: в I части § I, во II - §§ 2,3, в III части - §§ 4-7 и в IV части - § 8.

СОДЕРЖАНИЕ.

I часть.	§ I. Основные факты школьной планиметрии (сводка теорем).
II часть.	§ 2. Первые задачи про множества точек.
	§ 3. Азбука
III часть.	§ 4. Пересечение и объединение.
	§ 5. Преобразования (сводка определений).
	§ 6. Метод координат (сводка формул)
	§ 7. Основные геометрические неравенства
IV часть.	§ 8. Множество задач
	Указания и решения

В тексте этой работы несколько основных линий. Вначале (§ I) - несколько формулировок теорем из школьного курса геометрии и ряд задач, продолжающих эти теоремы. Затем (§ 2 и дальше) речь идет о задачах иного типа: в них нужно не просто что-то посчитать или доказать, а провести небольшое исследование - найти множество точек или построить фигуру. Впрочем, основные приемы, которые здесь обсуждаются (использование соображений симметрии и геометрических преобразований, представление искомого множества как "объединения" некоторых других, наконец, метод координат), очень полезны при решении самих разнообразных геометрических задач. В § 7 мы вновь перечислим несколько теорем из школьного курса геометрии - на этот раз относящихся к геометрическим неравенствам. В большом § 8 собраны

самые разные задачи - он поможет вам проверить себя: сумеете ли вы подобрать ключ к такой задаче, про которую не известно, "на какую она теорему", "на какой метод", легкая она или трудная. Особняком стоит § 6. Это просто сводка результатов "метода координат", которые полезно знать для решения задач по геометрии.

Какие именно задачи удобно решать методом координат или с помощью тригонометрии, какие - чисто геометрически? Определенный ответ на этот вопрос дать трудно. Умение находить самые рациональные решения геометрических задач достигается, в основном, практикой, поэтому мы очень советуем вам постепенно прорешать почти все эти задачи (и после того, как вы получите контрольное задание). Существует много сборников геометрических задач - некоторые из них перечислены в конце текста, - так что любители геометрии не останутся без работы, хотя в нашей школе геометрии уделяется сравнительно скромное место.

§ 1. Основные факты школьной планиметрии.

1. Параллелограммы.

Параллелограммом называется четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.

Теорема 1.1. Во всяком параллелограмме противоположные стороны попарно конгруэнтны.

В этой теореме условие состоит из двух частей:

1) две противоположные стороны параллельны; 2) две другие стороны также параллельны. Заключение тоже состоит из двух частей: 1) две противоположные стороны конгруэнтны; 2) две другие также конгруэнтны.

Так как заключение обратного предложения можно получить, беря либо часть условия, либо полностью всё условие данного предложения, то теорема 1.1 имеет две обратные теоремы.

Обратные теоремы 1.1. Четырехугольник будет параллелограммом:

- 1°) если его противоположные стороны попарно конгруэнтны;
- 2°) если какие-нибудь противоположные его стороны конгруэнтны и параллельны.

Теорема 1.2. Диагонали параллелограмма делят друг друга в точке пересечения пополам.

Обратная теорема 1.2. Если диагонали четырехугольника делятся в точке пересечения пополам, то четырехугольник - параллелограмм.

Теорема 1.3. Диагонали прямоугольника конгруэнтны между собой.

Следствие. В прямоугольном треугольнике медиана, выходящая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

Обратная теорема 1.3. Всякий параллелограмм, в котором диагонали конгруэнтны - прямоугольник.

Следствие. Треугольник, в котором длина медианы равна половине длины соответствующей стороны - прямоугольный.

Теорема 1.4. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Обратная теорема 1.4. 1°) Всякий параллелограмм, диагонали которого перпендикулярны, есть ромб; 2°) всякий параллелограмм, диагонали которого делят углы пополам, есть ромб.

2° Прямые в треугольнике, проходящие через одну точку.

Теорема 2.1. Во всяком треугольнике перпендикуляры, восстановленные к сторонам в их серединах (медиатрисы), пересекаются в одной точке.

Теорема 2.2. Во всяком треугольнике три высоты пересекаются в одной точке.

Указание. Пусть дан треугольник ABC (рис. 1). Проведем через точку A прямую, параллельную (BC) , через точку B - прямую, параллельную (AC) и через C - прямую, параллельную (AB) . Мы получим, таким образом, новый треугольник $A'B'C'$. Можно доказать, что высоты треугольника ABC являются перпендикулярами, восстановленными к сторонам

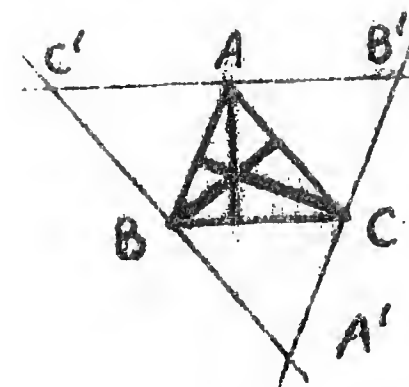


Рис. 1

нового треугольника в их серединах, и затем сослаться на теорему 2.1.

Теорема 2.3. Во всяком треугольнике:

- 1°) биссектрисы трех углов пересекаются в одной точке;
- 2°) биссектриса одного из углов и биссектрисы двух внешних углов, к нему не прилежащих, пересекаются в одной точке.

Теорема 2.4. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне и равен её половине.

Теорема 2.5. Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей на одной трети длины каждой из них, считая от соответствующего основания.

3° Свойство вписанного угла.

Углом, вписанным в окружность, называется угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец.

Теорема 3.1. Всякий вписанный в окружность угол измеряется половиной дуги, заключенной между его сторонами. Он конгруэнтен половине центрального угла, заключающего ту же дугу.

Следствия. 1°. Все углы, вписанные в одну и ту же дугу окружности, конгруэнтны как имеющие одну и ту же меру.

2°. Угол, вписанный в полуокружность - прямой угол.

Теорема 3.2. Угол, образованный касательной и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, отсекаемой этой хордой.

Теорема 3.3. Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися внутри окружности, измеряется полусуммой дуг, заключающихся: одна - между его сторонами, другая - между их продолжениями.

Теорема 3.4. Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися вне окружности, измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами.

Теорема 3.5. Во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна двум прямым углам.

Обратная теорема 3.5. Если в выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым углам, то четырехугольник может быть вписан в окружность.

4° Подобие.

Основная теорема 4.1. Если несколько параллельных прямых пересечены двумя секущими, то эти секущие делятся параллельными на пропорциональные части.

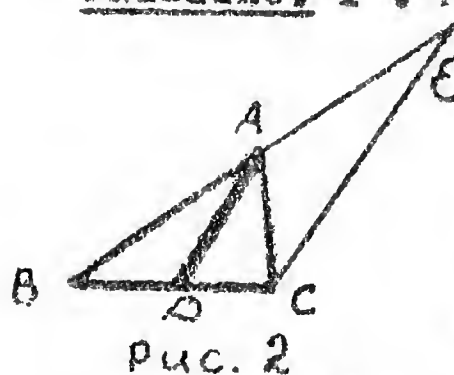
Следствие. Прямая DE , параллельная стороне BC треугольника ABC , делит две другие стороны AB и AC на пропорциональные части.

Обратная теорема к следствию. Если прямая делит две стороны треугольника на пропорциональные части, то она параллельна третьей стороне.

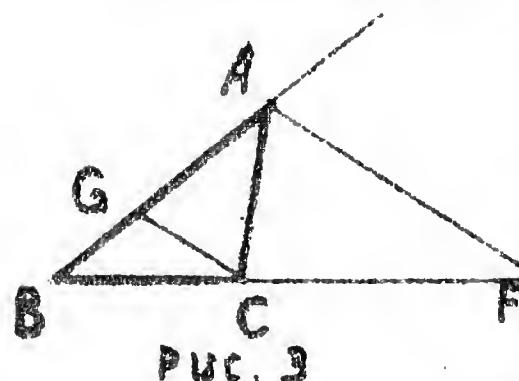
Теорема 4.3. Во всяком треугольнике:

- 1°) биссектриса любого угла делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам;
- 2°) биссектриса внешнего угла делит противоположную сторону внешним образом на две части, пропорциональные прилежащим сторонам.

Указание. 1°. Пусть $[AD]$ - биссектриса угла A треугольника ABC (рис. 2). Нужно доказать, что $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Проведите прямую (CE) , параллельную (AD) , до пересечения в точке E с (AB) и докажите, что $|AE| = |AC|$; затем воспользуйтесь теоремой 4.2 для треугольника BEC .



Указание 2°. Биссектриса $[AF]$ внешнего угла A (рис. 3) треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке F (если треугольник - не равнобедренный). Нужно доказать, что $\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Проведите прямую (CG) , параллельную (AF) , и докажите, что $|AG| = |AC|$.



Обратная теорема 4.3. 1°. Если прямая, выходящая из вершин треугольника, делит внутренним образом противоположную сторону на части, пропорциональные двум прилежащим сторонам, то она является бис-

сектрисой угла при вершине.

2°. Если прямая, выходящая из вершины треугольника, делит внешним образом противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то она является биссектрисой соответствующего внешнего угла.

Два треугольника называются подобными, если они имеют равные углы и их соответствующие стороны пропорциональны.

Теорема 4.4. (лемма о подобии треугольников). Всякая прямая (DE) параллельная стороне BC треугольника ABC , образует с двумя другими его сторонами треугольник ADE , подобный первому.

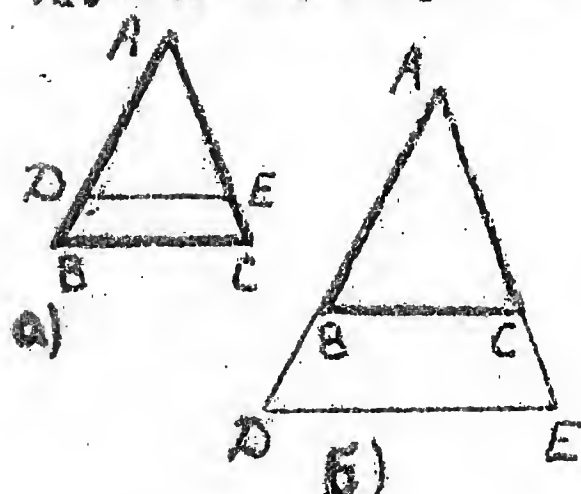


Рис. 4

Примечание. Прямая (DE) может быть как внутренней по отношению к $\triangle ABC$ (см. рис. 4а), так и внешней (рис. 4б).

Теорема 4.5. (признаки подобия треугольников). Два треугольника подобны, если выполнено одно из следующих условий:

1°) они имеют по два угла, соответственно конгруэнтных друг другу;

2°) они имеют по конгруэнтному углу, за-

ключенному между пропорциональными сторонами;

3°) три стороны одного пропорциональны трем сторонам другого.

Отношение соответственных сторон подобных треугольников называется коэффициентом подобия.

Теорема 4.6. Отношение площадей подобных треугольников равно отношению квадратов их периметров и равно квадрату коэффициента подобия.

5°. Метрические соотношения в треугольнике.

Введем следующие обозначения: a, b, c - длины сторон треугольника;

A, B, C - углы против этих сторон соответственно;

m_a, m_b, m_c - длины медиан, выходящих соответственно из этих углов;

$\beta_a, \beta_b, \beta_c$ - длины биссектрис, выходящих соответственно из этих углов;

h_a, h_b, h_c - длины высот треугольника;

R - радиус описанной окружности;
 $\frac{1}{2}(a+b+c)=p$ - полупериметр треугольника.

Пифагора теорема 5.1. Если угол C прямой, то

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Обратная теорема 5.1. Если $a^2 + b^2 = c^2$, то угол C прямой.

Теорема косинусов 5.2. Имеет место равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Теорема синусов 5.3. Имеют место равенства

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C.$$

Следствие. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

Теорема 5.4. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$

Теорема 5.5. $\beta_a^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = \frac{4b^2 c^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{(b+c)^2}.$

Теорема 5.6. $h_a^2 = \frac{1}{4a^2} (2b^2 c^2 + 2c^2 a^2 + 2a^2 b^2 - a^4 - b^4 - c^4) = \frac{1}{4a^2} p(p-a)(p-b)(p-c) = \frac{b^2 c^2 \sin^2 A}{a^2}.$

6°. Пропорциональные отрезки в круге.

Теорема 6.1. Если через точку, лежащую вне окружности, провести касательную и секущую, то касательная есть средняя пропорциональная между всей секущей и её внешней частью.

Следствие I. Квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.

2°. Если через точку A , взятую в плоскости данной окружности, провести к этой окружности секущие, то произведение рас-

стояний от точки A до двух точек пересечения каждой секущей с окружностью есть величина постоянная.

Теорема 6.2. Если в круге провести две хорды $[AB]$ и $[CD]$ (см. рис. 5), пересекающиеся в точке E внутри круга, то $|AE| \cdot |BE| = |DE| \cdot |CE|$.



Рис. 5

7. Площади многоугольников.

Приведем аксиоматическое определение площади многоугольника, перечислив те её свойства, которые необходимы.

- А 1. Площадь многоугольника — положительное число.
- А 2. Площади равных (конгруэнтных) многоугольников равны.
- А 3. Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
- А 4. Площадь треугольника равна половине произведения длины его основания на длину его высоты.

8. Лемма о прямых в треугольнике, проходящих через одну точку.

Задача 8.1. Пусть A', C' — точки, лежащие соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC и пусть R — точка пересечения $[AA']$ и $[CC']$. Даны отношения

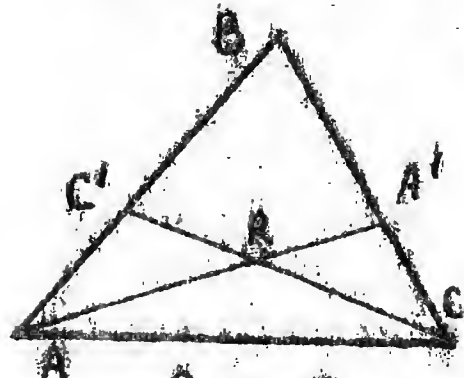


Рис. 6

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = k_c, \quad \frac{|BA'|}{|A'C|} = k_a.$$

Найти отношение $\frac{|AA'|}{|A'R|} = q_a$.

Решение. Ключом к решению будет дополнительное построение.

Проведем через точку A' прямую, параллельную (CC') . Обозначим через D точку пересечения построенной прямой с (AB) . Теперь мы можем свести нашу задачу к задаче на прямой.

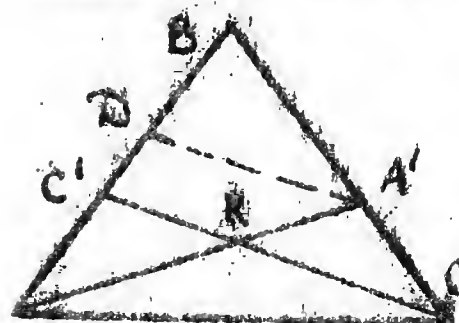


Рис. 7

Задача 8.1 а). На отрезке AB лежат две точки R' и D , причем $|AC'| < |AD|$.

Даны отношения $\frac{|AC'|}{|C'B|} = k_c, \quad \frac{|BD|}{|DC'|} = k_a$.

Найти отношение $\frac{|AD|}{|AC'|} = q_a$. (В самом деле, из подобия треугольников BDA' и BCC' следует, что $\frac{|BD|}{|DC'|} = \frac{|BA'|}{|A'C|}$, а из подобия треугольников ADA' и $A'C'R$ вытекает, что $\frac{|AA'|}{|A'R|} = \frac{|AD|}{|DC'|}$.)

Введем новые обозначения: $|AB| = d, |AC'| = x, |C'D| = y$, и запишем задачу 8.1 а) в этих обозначениях.

Задача 8.1б). Известно, что $\frac{x}{d-x} = k_c$ (1)

$$\frac{d-x-y}{y} = k_a \quad (2)$$

Найти $q_a = \frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1$.

Решение 8.1б). Перепишем условие (1) в виде

$$\frac{d-x}{x} = \frac{1}{k_c} \quad \text{или} \quad \frac{d}{x} = 1 + \frac{1}{k_c} \quad (3).$$

Перепишем условие (2) в виде $\frac{d}{y} = \frac{x}{y} + 1 + k_a$ (4).

Разделив почленно (4) на (3), получим $\frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{y} + 1 + k_a}{1 + \frac{1}{k_c}}$.

Отсюда находим $\frac{x}{y} = (1 + k_a)k_c$.

Искомое отношение равно: $1 + k_c + k_a k_c$.

Ответ к задаче 8.1: $q_a = 1 + k_c + k_a k_c$.

Задача 8.2. Пусть A', C' — точки, лежащие соответственно на сторонах BC и AB треугольника ABC и пусть R — точка пересечения (AA') и (CC') . Даны отношения

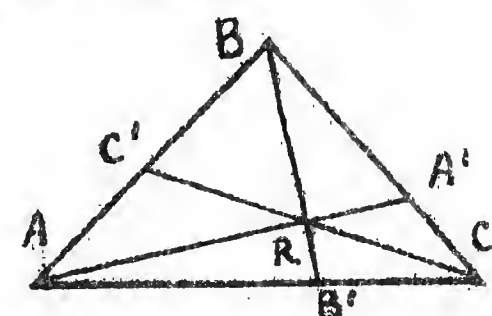
$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = k_c, \quad \frac{|BA'|}{|A'C|} = k_a.$$

Показать, что отношение

$$q_c = \frac{|C'R|}{|CC'|} = 1 + \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_a k_c}.$$

Теорема 8.3. Пусть R — точка внутри треугольника ABC и

A', B', C' - точки пересечения прямых AR, BR, CR соответственно с прямыми BC, AC, AB . Тогда U' пусть



$$\frac{|AC'|}{|C'B|} = k_c, \quad \frac{|BA'|}{|A'C|} = k_a,$$

$$\frac{|CB'|}{|AB'|} = k_b$$

Рис. 8 Тогда $k_a k_b k_c = 1$.

Доказательство. Из задачи 8.1 имеем $\varphi_a = 1 + k_c + k_a k_c$ (5)
а из задачи 8.2 $\varphi_a = 1 + \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_b k_a}$ (6).
Приравняв правые части (5) и (6), получаем $k_a k_b k_c = 1$.

Обратная теорема 8.3. (теорема Чевы). Пусть A', B', C' - точки, лежащие соответственно на сторонах BC, AC, AB треугольника ABC и пусть $k_a k_b k_c = 1$, где $k_a = \frac{|BA'|}{|A'C|}, k_b = \frac{|CB'|}{|AB'|}, k_c = \frac{|AC'|}{|C'B|}$. Тогда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

Указание. Провести две из этих прямых, например, (AA') и (BB') . Затем провести прямую через точку C и точку R пересечения (AA') и (BB') . Используя прямую теорему 2.3, показать методом от противного, что прямая CC' совпадает с прямой CR .

Теорема 8.4. В обозначениях теоремы 2.3 пусть

$$\varphi_a = \frac{|AA'|}{|A'R|}, \quad \varphi_b = \frac{|BB'|}{|B'R|}, \quad \varphi_c = \frac{|CC'|}{|C'R|}$$

Тогда
$$\frac{1}{\varphi_a} + \frac{1}{\varphi_b} + \frac{1}{\varphi_c} = 1.$$

Упражнение 8.5. Проверьте справедливость теорем 2.3 и 2.4 для: а) медиан; б) биссектрис.

1975-76 уч.год.

Методические разработки для учащихся ВЭМШ
по теме "Планиметрия".

Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер.

Часть II.

В этой части разработок мы вначале предлагаем несколько задач с решениями на нахождение множеств точек, удовлетворяющих некоторым условиям.

Надо внимательно прочитать решения этих задач. Тогда вам будет понятен текст на стр.9-10, где мы обсуждаем точную постановку задачи о нахождении "геометрического места точек".

Далее, в § 3 приводится "азбука", то есть несколько множеств точек, к которым сводятся многие задачи.

Отметим, что множества точек из "азбуки" используются также при доказательстве многих теорем, решении задач на построение и др.

§ 2. Первые задачи про множества точек.

Сначала решим следующую задачу, которая часто дается на устных экзаменах и имеет неожиданный, на первый взгляд, ответ.

Задача 2.1. Концы отрезка длины d скользят по двум сторонам данного прямого угла. Какую линию описывает середина отрезка?

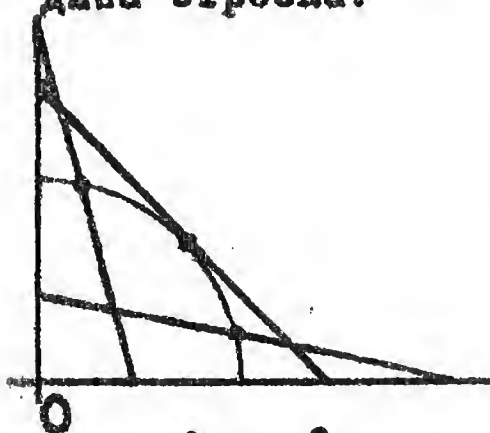


Рис. 9

Постройте несколько точек этой линии! Если вы сделаете это достаточно аккуратно, то увидите, что все они находятся на одинаковом расстоянии от вершины O данного угла.

Возникает предположение: искомая линия — дуга окружности радиуса $d/2$ с центром O . Теперь нужно это доказать.

Доказательство. Докажем сначала, что середина M данного отрезка $AB=d$ всегда находится на расстоянии $d/2$ от точки O . Это следует из того факта, что медиана OM прямоугольного треугольника AOB равна половине гипотенузы AB .

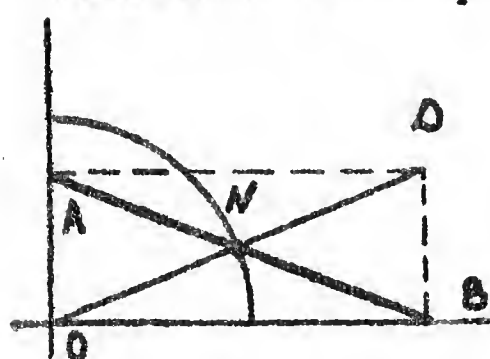


Рис. 10

Затем мы должны доказать, что середина отрезка пробегает всю дугу окружности, лежащую внутри угла, а не какую-нибудь её часть (рис. 10). В самом деле, через любую точку N нашей дуги мы можем провести луч ON , отложить на нем отрезок $[NA] = [ON] = d/2$, опустить из D перпендикуляры $[DA]$ и $[DB]$ на стороны угла — и нужный отрезок AB с серединой в точке N готов!

Можно дать другое (аналитическое) решение этой задачи.

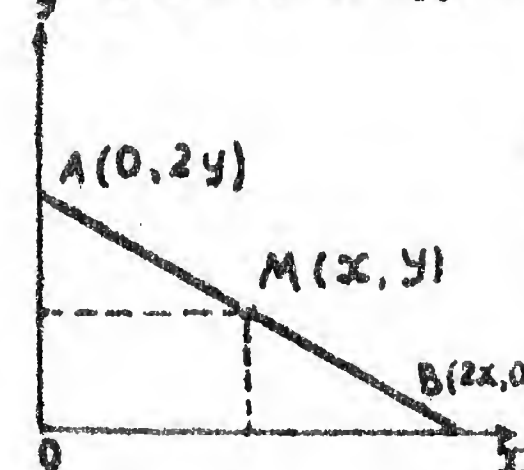


Рис. 11

Примем стороны угла за оси координат Ox и Oy . Пусть x, y — координаты точки M (середины отрезка AB). Тогда точка A имеет координаты $(0, 2y)$, точка B — координаты $(2x, 0)$, причем $x \geq 0, y \geq 0$. По условию, расстояние между точками A и B равно d :

$$\sqrt{(2x-0)^2 + (0-2y)^2} = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = d$$

Таким образом, координаты (x, y) точки M искомого множества удовлетворяют следующим условиям:

$$x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = (d/2)^2.$$

Мы знаем (см. § 6), что $x^2 + y^2 = (d/2)^2$ — уравнение окружности с центром $(0, 0)$ радиуса $d/2$. Таким образом, искомое множество — часть этой окружности, лежащая внутри данного угла $x \geq 0, y \geq 0$ — дуга с концами в точках $(d/2, 0)$ и $(0, d/2)$.

2.2. Дан квадрат $ABCD$. Найти на плоскости множество точек M таких, что сумма площадей треугольников AMB и CMD равна сумме площадей треугольников BMC и DMA . (Рис. 12).

Поскольку площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то, принимая за основания треугольников стороны квадрата, можно свести задачу к следующей.

Дан квадрат. Найти все такие точки плоскости, что сумма расстояний каждой из них до двух противоположных сторон квадрата равна сумме расстояний до двух других его сторон (под расстоянием от точки до стороны квадрата понимают расстояние до прямой, на которой лежит сторона).

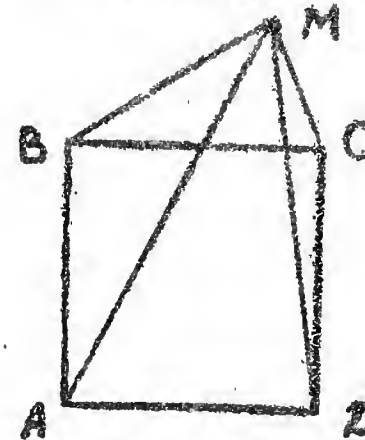


Рис. 12

Решение. Возьмем любую точку M внутри квадрата $ABCD$. Сумма расстояний от точки M до двух противоположных сторон равна длине стороны квадрата. Поэтому всякая точка, лежащая внутри квадрата (и на его сторонах), нам подходит (т.е. принадлежит искомому множеству). Остается исследовать все точки, лежащие вне квадрата.

Точки, расположенные в полосе между продолжениями двух параллельных сторон квадрата, явно не годятся: сумма расстояний от каждой такой точки Q до этих двух сторон равна длине стороны квадрата, а сумма расстояний до двух других сторон заведомо больше.

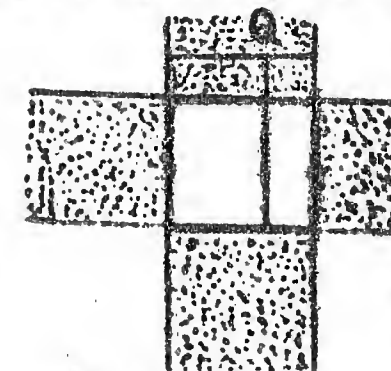


Рис. 13

Теперь рассмотрим точки, лежащие внутри угла, образованного продолжениями двух соседних сторон квадрата (BC и DC). Точки, лежащие на биссектрисе этого угла, удовлетворяют требованию задачи. Докажем, что другие точки не подходят.

Возьмем любую точку N внутри угла, не лежащую на биссектрисе.

се. Опустим из неё перпендикуляры NH и NL на продолжения сторон AB и AD квадрата. Одна из них пересечет биссектрису в некоторой точке M . (Рис.14). Очевидно, что

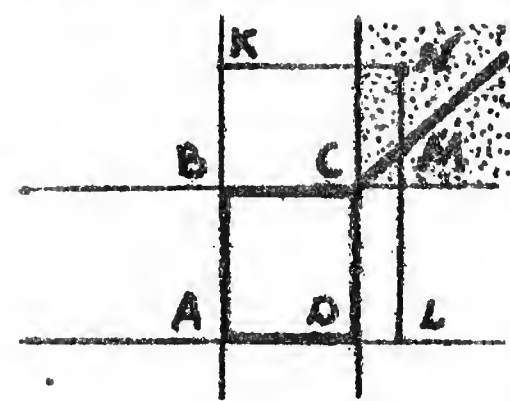


Рис. 14

сумма расстояний от точки N до прямых AB и CD такая же, как от точки M , а сумма расстояний до прямых BC и AD — больше. Но мы знаем, что суммы расстояний от точки M равны. Следовательно, точка N не удовлетворяет требованию задачи. Ясно, что аналогичное рассуждение можно провести и по отношению к точкам, лежащим внутри других углов.

Таким образом, мы доказали, что множество всех точек плоскости, удовлетворяющих требованию задачи, состоит из внутренности квадрата и продолжений его диагоналей (рис.15).

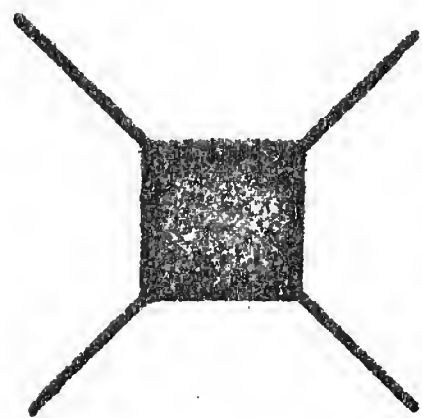


Рис. 15

Замечание. Поскольку все стороны квадрата фигурируют в условии задачи совершенно равноправно, неудивительно, что все его четыре оси симметрии являются и осями симметрии полученного множества точек.

Теперь немного обобщим задачу.

2.3. Найти множество всех точек плоскости таких, что сумма расстояний от каждой из них до двух противоположных сторон данного прямоугольника равна сумме расстояний до двух других его противоположных сторон.

Решение. Эта задача отличается от предыдущей только тем, что здесь вместо квадрата задан произвольный прямоугольник; обозначим длины его сторон через a и b . Случай, когда $a=b$, мы уже рассмотрели. Рассмотрим теперь прямоугольник, отличный от квадрата: пусть $a < b$.

Точки, лежащие внутри прямоугольника, а также между продолжениями больших его сторон, не удовлетворяют требованию задачи.

Пусть теперь точка M находится между продолжениями меньших сторон прямоугольника. Обозначим через x её расстояние до ближайшей большей стороны прямоугольника, тогда расстояние до противоположной стороны равно $x+a$. Для того, чтобы точка удовлетворяла требованию задачи, нужно, чтобы выполнялось равенство $x+(x+a)=b$, откуда

$$x = \frac{b-a}{2}.$$

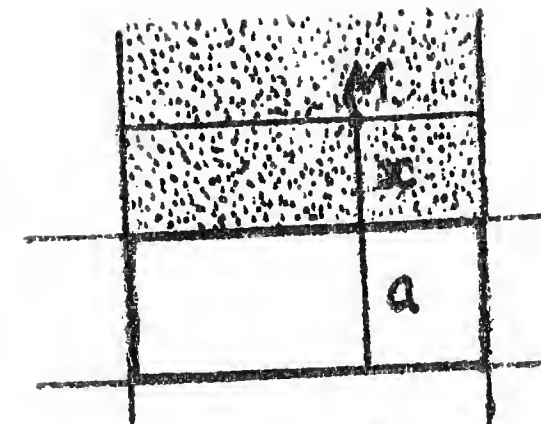


Рис. 16

Наконец, рассмотрим любую точку M , лежащую в угле, образованном продолжениями двух соседних сторон BC и CD прямоугольника (рис.18). Обозначим через x и y расстояния от точки M до сторон CD и BC соответственно. Тогда требование задачи можно записать так: $(x+b)+x=(y+a)+y$ или $y=x+(b-a)/2$. Заметим теперь, что числа a и y можно рассматривать как координаты точки M в системе координат с осями Cx и Cy .

В этой системе координат уравнение $y=x+(b-a)/2$ определяет прямую, параллельную биссектрисе угла BCD . (Рис.19).

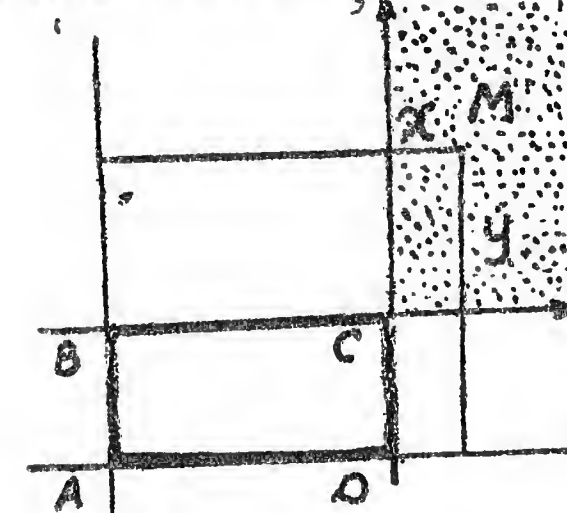


Рис. 17

Итак, мы доказали, что среди точек, лежащих в рассматриваемом угле, требования задачи удовлетворяют те и только те точки, которые лежат на прямой $y=x+(b-a)/2$.

Такие же рассуждения можно провести и для остальных трех углов. Итак, мы исследовали все точки плоскости. Множество всех точек, удовлетворяющих поставленному требованию, изображено на рис.20.

Рис. 18

Замечание. Поскольку прямоугольник имеет две оси симметрии, и пары его симметричных сторон фигурируют в условии совершенно равноправно, можно было сразу догадаться (рис.21), что требуемое множество точек будет иметь те же две оси симметрии; поэтому при решении достаточно было исследовать точки не всей плоскости, а только одной из четвертей, на которые её делят эти оси.

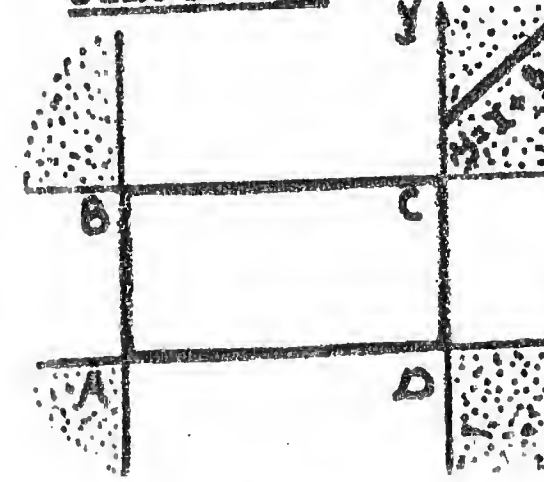


Рис. 19

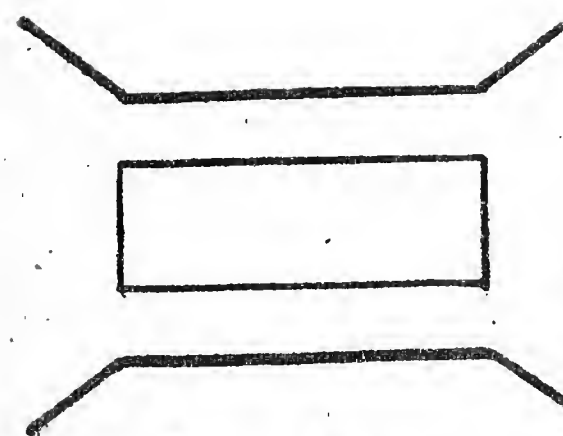


Рис. 20

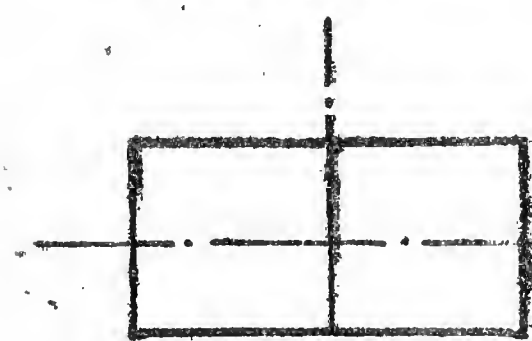


Рис. 21

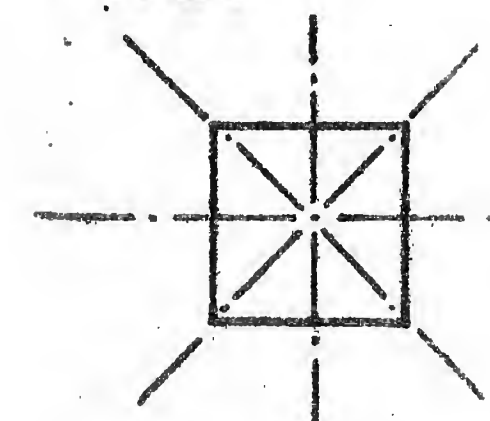


Рис. 22



Рис. 23

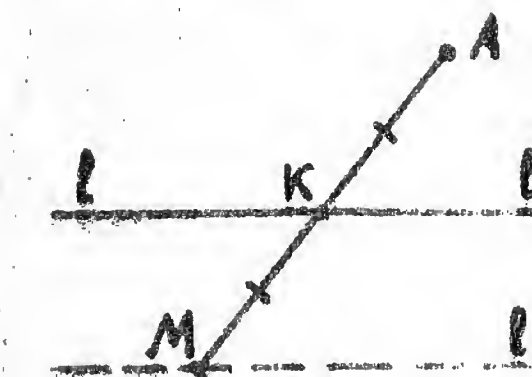


Рис. 24

При решении задачи 2.2, где имеются четыре оси симметрии, можно было ограничиться исследованием только одной восьмой части плоскости (рис.22).

2.4. Дана прямая l и точка A .
а) найти множество середин отрезков AL , где L - произвольная точка прямой l .

б) найти множество точек N таких, что середина отрезка MA лежит на прямой l .

в) найти множество точек N таких, что конец L отрезка NL с серединой в данной точке A лежит на прямой l .

Решение задачи б). Для каждой точки K прямой l можно построить единственный отрезок AM , у которого конец A - данная точка, а K - середина: для этого нужно отложить на продолжении отрезка AK отрезок $[KM] \cong [AK]$ (рис. 24).

Итак, любая точка M искомого множества получается из какой-то точки прямой l , если её "отодвинуть в 2 раза дальше" от точки A . При подобном преобразовании - гомотетии с центром в точке A и с коэффициентом 2 - прямая l перейдет, конечно, в прямую l' , параллельную l и отстоящую от точки A вдвое дальше, чем прямая l . Эта прямая l' (показанная на рисунке пунктиром) и будет искомым множеством (ср §5.5).

Указание к задаче в). Постройте прямую l' симметричную прямой l относительно центра A . Она и будет искомым множеством.

2.5. Дан угол и внутри него точка A . Постройте отрезок, концы которого лежат на сторонах угла, а середина - в данной точке A .

2.6. Где может находиться четвертая вершина квадрата, если две его вершины лежат на одной стороне данного прямого угла, а третья - на другой (рис.25).

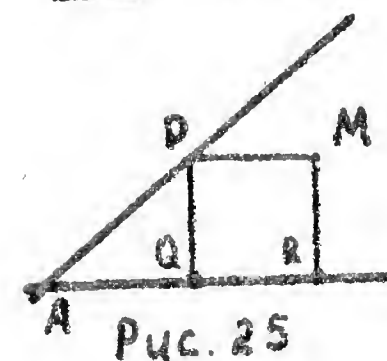


Рис. 25

Указание к задаче 2.6. Легко найти одну точку такого множества: нужно взять на одной стороне угла точку P , опустить из неё перпендикуляр PQ на другую и, приняв этот перпендикуляр за сторону квадрата, построить весь квадрат и найти его четвертую вершину M .

Теперь заметим, что другие точки искомого множества можно получить, если весь рисунок сжать к вершине угла A (или растянуть от вершины A) в несколько раз; при этом точка M (рис.26) описывает луч с вершиной в точке A .

Условие задачи допускает и вторую возможность (рис.27). Две вершины квадрата могут лежать на другой стороне угла.

Ясно, что этим исчерпывается все возможные случаи: любой квадрат, вписанный в угол так, как сказано в задании, получается гомотетией с центром в точке A либо из одного, либо из другого квадрата. Потому ответ в этой задаче такой: искомое множество - два луча с вершиной в точке A .

О преобразованиях мы подробнее поговорим в § 5.

2.7. Дана прямая l . Найти множество точек, которые:

- находятся от неё на данном расстоянии $d > 0$
- находятся от неё на расстоянии не меньше d

Ответ к задаче б). Две полуплоскости, ограниченные прямыми, параллельными l и отстоящими от неё на расстояние d (рис.28).

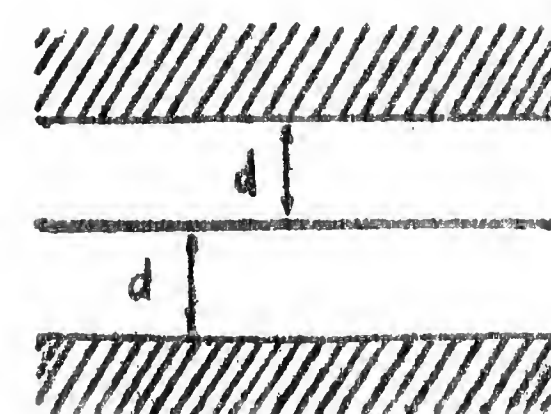


Рис. 28

2.8. а). Найти множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных параллельных прямых равна данной величине $d > 0$.

б). Найти множество точек, сумма расстояний от которых до трех сторон квадрата (или их продолжений) равна величине $d > 0$.

Указание к задаче а). Пусть расстояние между прямыми равно c . Рассмотрите отдельно случаи $d > c$, $d = c$ и $d < c$.

2.9. Найти множество точек, сумма расстояний от которых до сто-

- а) данного квадрата,
 - б) данного правильного треугольника
- равна постоянной величине c .

2.10. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, идущими по взаимно перпендикулярным дорогам с одинаковой скоростью v ?

Решение. Примем дороги за оси координат и направим их туда, куда идут пешеходы (рис.29). Если в момент времени $t=0$ положения пешеходов $(a, 0)$ и $(0, b)$, то в произвольный момент времени t пешеходы будут находиться в точках $(a+vt, 0)$ и $(0, b+vt)$. Следовательно, середина отрезка между ними будет иметь координаты $x = (a+vt)/2$, $y = (b+vt)/2$ (t - произвольное вещественное число). Исключая t из этих двух равенств, мы найдем уравнение искомой линии $y = x + (b-a)/2$. Это прямая, параллельная биссектрисе угла xOy .

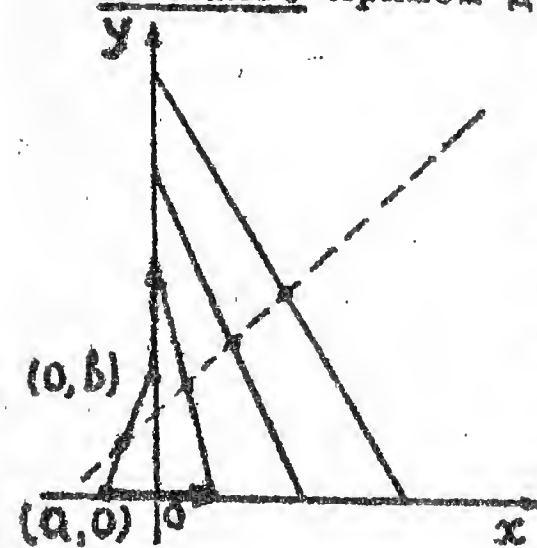


Рис. 29

2.11. Найти множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до четырех сторон данного прямоугольника (или до их продолжений) равна квадрату его диагонали.

Решение. Здесь удобно выбрать систему координат, оси которой параллельны сторонам прямоугольника, и (для симметрии) принять за начало координат центр прямоугольника. Тогда, если длина стороны, параллельной оси Ox (рис.30), равна $2a$, а длина стороны, параллельной оси Oy , равна $2b$, то уравнения прямых, на которых лежат стороны....

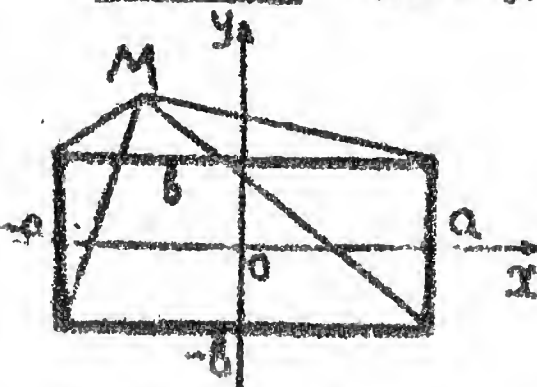


Рис. 30

Доведите это решение до конца.

2.12. а) Найти множество точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух противоположных вершин данного прямоугольника равна сумме квадратов расстояний до двух других его вершин.

б). Та же задача, в формулировке которой вычеркнуто (два раза) слово "квадратов".

У задачи а) неожиданный ответ: искомое множество - вся плоскость!

Итак, во всех перечисленных задачах требовалось найти множество точек, удовлетворяющих некоторому условию, или, как говорят иногда, геометрическое место точек.

Разумеется, "множество точек" - очень общее понятие. Это может быть все, что угодно: одна или несколько точек, любая линия, фигура или пространственное тело. Множество можно задавать самыми разными способами: можно перечислить все его элементы (если это конечное множество) или написать уравнение, связывающее координаты его точек, и т.д.

Собственно говоря, условие каждой задачи этого параграфа тоже есть описание некоторого множества точек. Поэтому давайте уточним, что мы понимаем здесь под словами "найти множество точек", в каких терминах мы хотим описывать множества точек.

В этом задании нам встречаются только фигуры, известные из школьного курса геометрии: прямые, окружности, куски плоскости, ограниченные этими линиями. Поэтому условимся: в каждой задаче, где требуется найти множество точек, удовлетворяющих некоторому условию, нужно указать, из каких известных фигур состоит искомое множество - их "название", а также положение и размеры. Таким образом, каждая новая задача раскроет нам какое-нибудь новое свойство одной из знакомых фигур. (Главное - догадаться, какой!)

Но чтобы полностью убедиться в том, что мы правильно нашли требуемое множество точек M , нужно доказать два утверждения:

- 1) все точки, удовлетворяющие данному условию, принадлежат множеству M , или, что то же самое, все не принадлежащие множеству точки плоскости (пространства) нам не подходят;
- 2) все точки, принадлежащие множеству M , удовлетворяют данному условию, т.е. мы не исключили в M ни одной лишней точки.

Например, так написано решение задачи 2.1. При решении задач 2.2

и 2.3 мы не выделяли отдельно доказательство каждого из этих двух утверждений: мы просто исследовали все точки плоскости и для каждой из них выяснили, принадлежит ли она нужному нам множеству или нет.

Задачи, которые мы решаем в этом и двух следующих параграфах: "найти множество точек, удовлетворяющих условию...", очень близки к обычной алгебраической задаче: решить уравнение (систему уравнений), неравенство. Действительно, решить уравнение или неравенство — значит найти множество чисел, удовлетворяющих некоторому условию; решить систему с двумя неизвестными — найти множество пар чисел, удовлетворяющих некоторым условиям.

Когда мы решаем уравнение или систему уравнений, у нас получается, как правило, конечное множество решений, и мы можем просто перечислить все решения — именно в такой форме и записывается обычно ответ. Но если решений бесконечное множество (а при решении неравенств чаще всего так и бывает), ответ обычно записывается с помощью "стандартных множеств", например, таких: отрезок $1 \leq x \leq 2$ или луч $-1 \leq x < +\infty$ (ту же роль в геометрии играют окружности, прямые, плоскости, и т.д.).

Решая уравнение или неравенство, всегда нужно следить за тем, чтобы

- 1) были найдены все решения — ни одного не потеряно — и
- 2) все найденные числа действительно являлись решениями, т.е.

мы не приобрели ничего лишнего.

Аналогия с задачами на геометрические места здесь не только внешняя. С помощью метода координат часто можно свести одно к другому: задачу по геометрии — к алгебраической задаче или наоборот.

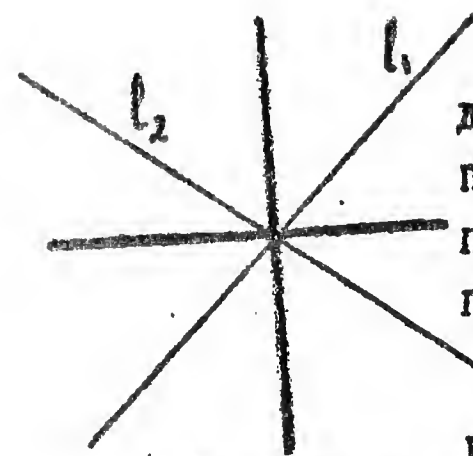
Метод координат еще неоднократно пригодится нам в следующих параграфах. Все нужные формулы вы можете посмотреть в § 6.4. III

§ 3. А з б у к а .

Этот параграф — справочник "геометрических мест" — облегчит нам в дальнейшем решение многих задач.

[А] Множество точек, расстояние от которых до данной точки O равно данному числу r , есть окружность радиуса r с центром в точке O .

Это определение окружности.



[Б] Множество точек, одинаково удаленных от двух данных пересекающихся прямых l_1 и l_2 , представляет собой пару взаимноперпендикулярных прямых, делящих пополам углы, образованные прямыми l_1 и l_2 .

Какое множество получается, если прямые l_1 и l_2 параллельны?

Рис. 32

[В] Множеством точек, одинаково удаленных от двух данных точек A и B , является прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

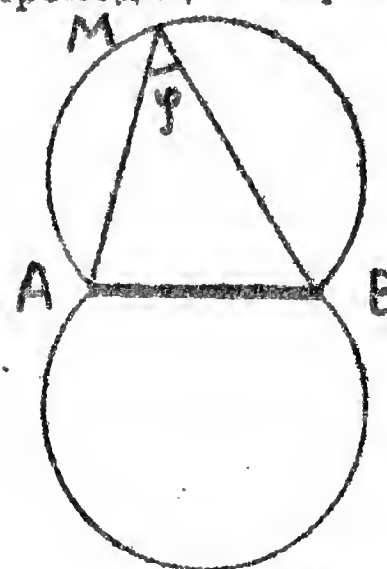


Рис. 33

[Г] Множеством точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом φ (т.е. множеством точек M , для которых $\angle AMB = \varphi$), являются две дуги окружности с концами в точках A и B .

В частности, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ мы получаем окружность с диаметром $[AB]$.

Решение. Ясно, что искомое множество симметрично относительно прямой AB .

Поэтому нам достаточно исследовать только точки по одну сторону от этой прямой.

Построим равнобедренный треугольник AOB , в котором $\angle AOB = 2\varphi$, а затем через точки A и B проведем окружность с центром O . Пусть M — произвольная точка дуги AmB . Тогда угол $\angle AMB$ равен φ , поскольку он измеряется половиной дуги AB (см. теорему 3.1 в § 1).

Поэтому из всех точек дуги AmB отрезок AB виден под углом φ .

Покажем, что остальные точки верхней полуплоскости не принадлежат нашему множеству. Пусть точка K лежит внутри круга. Продолжим отрезок AK до пересечения с окружностью в точке M (рис. 35). Угол $\angle AMB$ — внешний угол для треугольника MKB , не смежный с углом $\angle KMB$, поэтому $\angle AMB > \angle KMB = \varphi$.

Проведите аналогичное рассуждение для точек, лежащих вне круга.

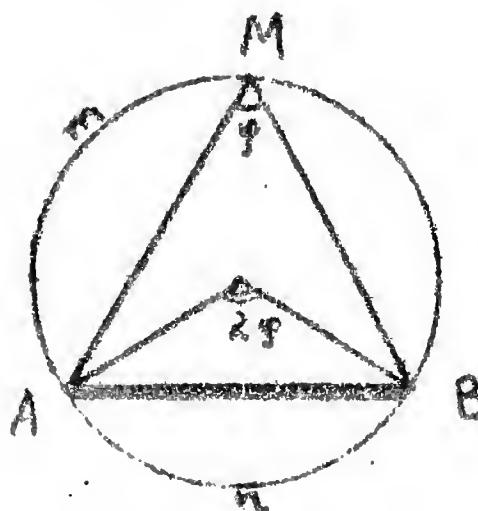


Рис. 34

* Мы разберем случай, когда $\varphi < \frac{\pi}{2}$; для $\varphi > \frac{\pi}{2}$ проведите рассуждение сами.

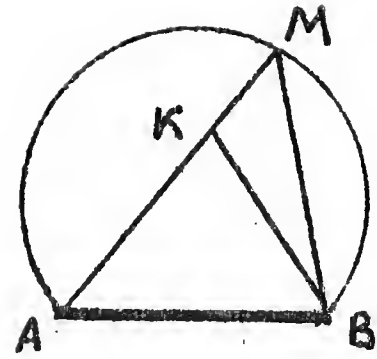


Рис. 35

Часто более удобно использовать вместо Γ следующее множество точек:

Г_x. Если две пересекающиеся прямые проходят через данные точки A и B и равномерно вращаются вокруг этих точек так, что угол между ними остается постоянным, то точка M пересечения этих прямых описывает окружность.

Доказательство. Обозначим прямую AB через ℓ . Очевидно, что до тех пор, пока ни одна из двух вращающихся прямых не совпадет с ℓ , точка M перемещается по одну сторону от ℓ , и угол $\angle AMB$ остается постоянным:

$$\angle AMB = \varphi$$

Следовательно, точка описывает дугу окружности с концами в точках A и B , соответствующую углу φ . В тот момент, когда одна из прямых (например, AM) проходит при своем вращении положение ℓ , точка M совпадает с одной из точек A или B (в данном случае, с B), а затем при дальнейшем движении, точка M переходит в другую полуплоскость и одновременно угол $\angle AMB$ заменяется смежным: теперь $\angle AMB = \pi - \varphi$, так что в новой полуплоскости точка перемещается уже по дуге окружности, соответствующей вписанному углу $\pi - \varphi$. Легко видеть, что обе эти дуги вместе составляют одну окружность и что когда прямые сделают полный оборот, точка M опишет всю эту окружность.

Если прямые вращаются с угловой скоростью ω , то точка их пересечения движется по своей окружности

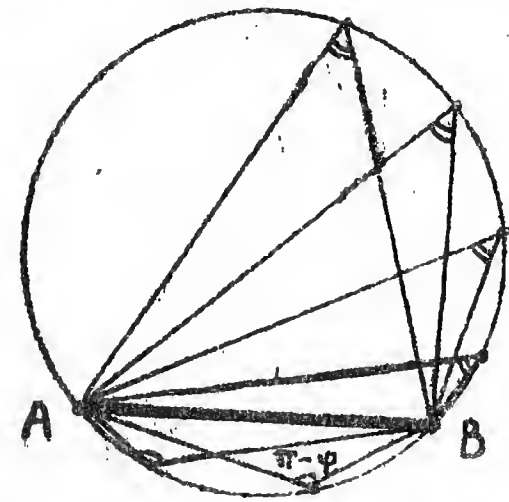


Рис. 36

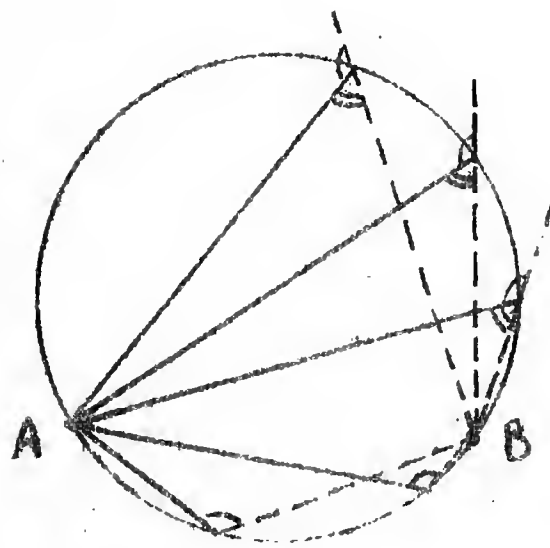


Рис. 37

с угловой скоростью 2ω . (Покажите!)

Д. Множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равно k (k — некоторое положительное число), есть пара прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых.

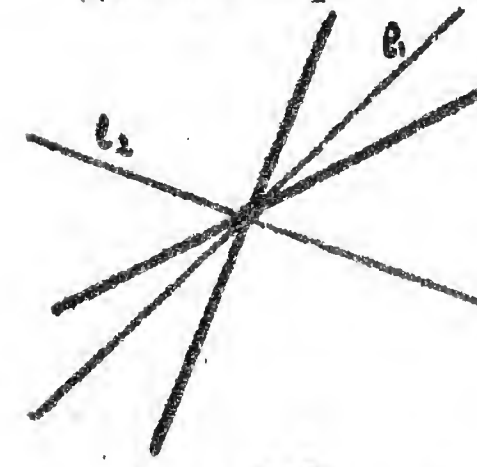


Рис. 38

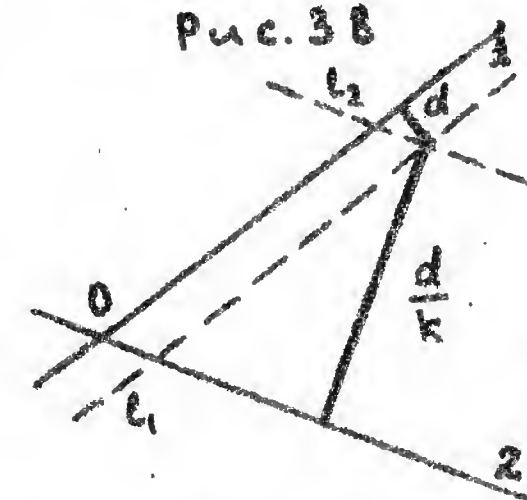


Рис. 39

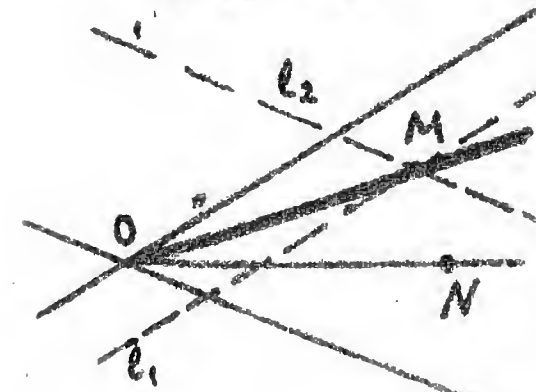


Рис. 40

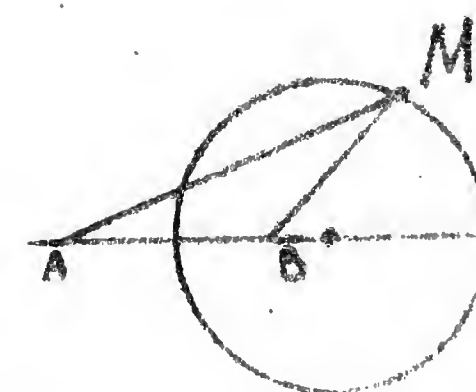


Рис. 41

Доказательство. Достаточно рассмотреть один из четырех углов, на которые данные прямые делят плоскость. Остальные исследуются аналогично.

Одну точку искомого геометрического места найти легко: проведем прямую ℓ_1 , параллельную первой из данных прямых на некотором расстоянии d от неё, и прямую ℓ_2 , параллельную второй прямой на расстоянии d/k от неё. (На рисунке эти прямые показаны пунктиром.) Точка их пересечения удовлетворяет требуемому условию: отношение её расстояний до данных прямых равно $d/d/k = k$.

Очевидно, что если условию удовлетворяет какая-нибудь точка M , то ему удовлетворяют и все точки луча OM (O — точка пересечения данных прямых). Действительно, если растянуть всю плоскость от точки O в несколько раз (или сжать её в точке O), то отношение расстояний от точки M до данных прямых не будет, очевидно, меняться. (Слово "очевидно" здесь нужно понимать в таком смысле: "легко доказать, используя подобие треугольников".)

Итак, мы доказали, что искомого множеству принадлежит некоторый луч, выходящий из точки O . Но, может быть, есть еще какие-нибудь точки, принадлежащие нашему множеству, — скажем, точка N . Тогда найдется еще целый луч ON , отличный от первого и принадлежащий искомого множеству. Но это невозможно, поскольку очевидно, что на пунктирной прямой ℓ_1 лежит только одна точка искомого множества.

Е. Множество точек, отношение расстояний от которых до данных двух точек A и B равно

(k - некоторое положительное число, не равное 1), есть окружность. Пусть $|AB| = 2c$, тогда радиус этой окружности равен $\frac{2ck}{(1-k^2)}$, расстояние её центра до середины отрезка AB равно $c(1+k^2)(1-k^2)$.

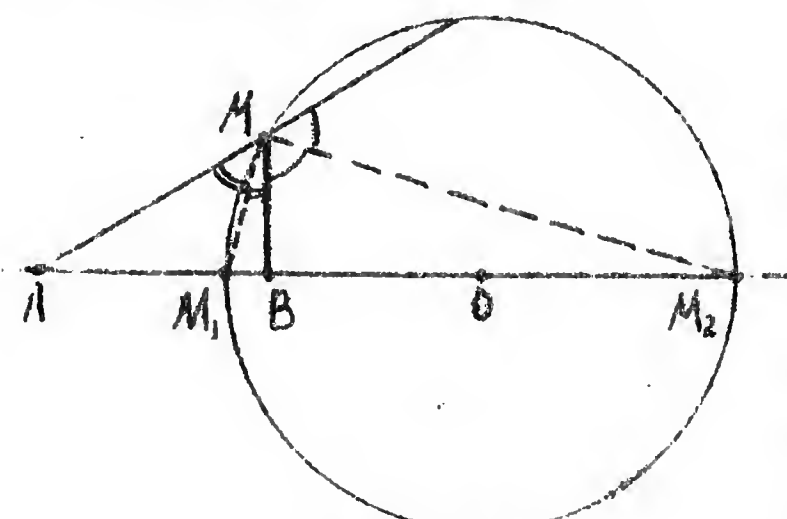


Рис. 42

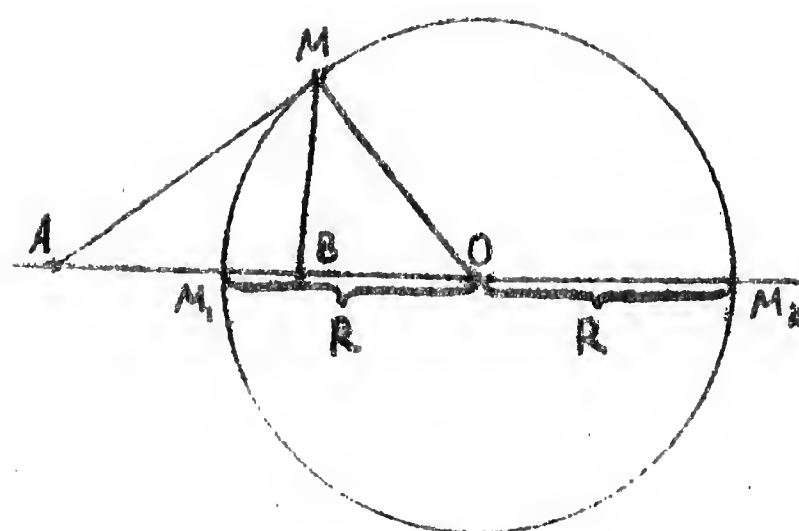


Рис. 43

Эту задачу можно решить аналитически так, как это делается стр. 28-29 "Метода координат".

Но можно доказать утверждение Е и чисто геометрически, опираясь на теоремы о биссектрисе внутреннего и внешнего угла треугольника, точнее, на обратные к ним теоремы 4.3 из § I.

На прямой AB существует ровно две точки M_1 и M_2 , для которых отношение расстояний до A и до B равно k (уравнение $\frac{|x-a|}{|x-b|} = k \Leftrightarrow \frac{(x-a)^2}{(x-b)^2} = k^2$

при $k \neq 1$ имеет два решения): одна из них - M_1 - лежит на отрезке AB , а другая - M_2 вне него (рис. 42).

Если M - какая-то точка, не лежащая на прямой AB ,

для которой $\frac{|MA|}{|MB|} = k$;

то есть $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|M_1A|}{|M_1B|} = \frac{|M_2A|}{|M_2B|}$, то (MM_1) и (MM_2) - биссектрисы и поэтому $\angle M_1MM_2 = 90^\circ$, то есть M лежит на окружности с диаметром $[M_1M_2]$.

Несколько сложнее доказать обратное: что для каждой точки этой окружности $\frac{|MA|}{|MB|} = k$. Предварительно сделаем некоторые вычисления, которые интересны и сами по себе. Пусть O - центр построенной окружности, R - её радиус. Тогда (см. рис. 43; он соответствует $k > 1$):

$$\frac{|AO|-R}{R-|BO|} = \frac{|AO|+R}{|BO|+R} = k \quad (1)$$

(если $k < 1$, то точка A и B "меняются ролями" - B будет вне окружности, а A внутри, $|AO|-R$ и $R-|BO|$ будут отрицательны, но их отношение по-прежнему равно $\frac{|MA|}{|MB|} = k$).

Из (1) следует

$$\frac{|AO|}{R} = k, \quad \frac{R}{|BO|} = k \quad (2)$$

(Мы воспользовались здесь тем, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$,

то $\frac{a+c}{b+d} = k$ и $\frac{a-c}{b-d} = k$). Теперь равенство $\frac{|MA|}{|MB|} = k$

сразу следует из подобия: $\triangle AOM \sim \triangle MOB$

(угол O общий, $\frac{|AO|}{|MO|} = \frac{|MO|}{|BO|} = k$). [Е] доказано.

Кстати, заметим, что из (2) следует равенство $|AO|/|BO| = R^2$. Про такие две точки говорят, что A переходит в B при инверсии относительно окружности с центром O и радиусом R .

[I.] Множество точек на плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B равна постоянной величине d , есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB . Эта прямая проходит на расстоянии $\frac{d}{2|AB|}$ от середины отрезка AB , причем ближе к A , если $d < 0$, и ближе к B , если $d > 0$.

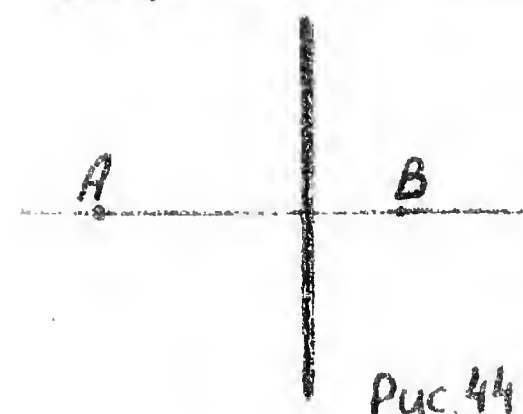


Рис. 44

[II.] Множество точек на плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B равна постоянной величине c , есть окружность радиуса $\sqrt{c-2a^2}$ с центром в середине отрезка AB (если $c > 2a^2$), одна точка (если $c = 2a^2$).

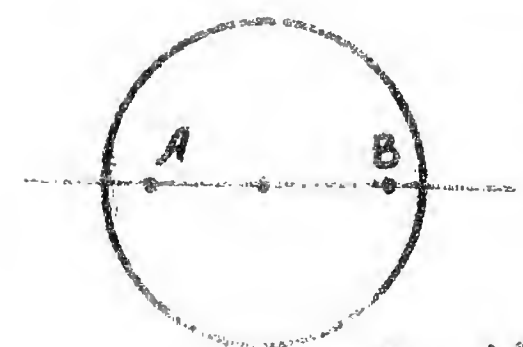


Рис. 45

или пустое множество (если $C < 2a^2$); где $|AB| = 2a$.

При доказательстве Π_- и Π_+ удобно воспользоваться методом координат (см. § 6). Докажем, например, Π_- .

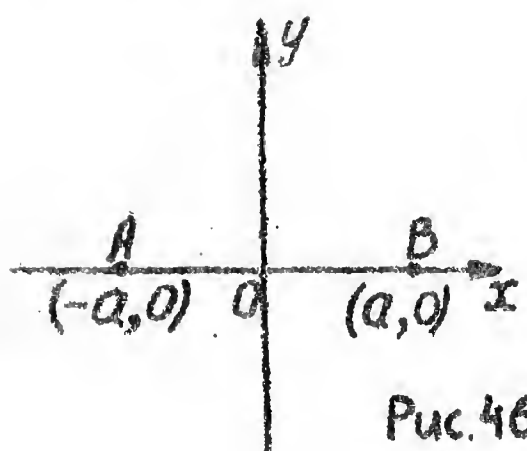


Рис. 46.

Доказательство. Выберем систему координат так, чтобы данные точки A и B лежали на оси Ox симметрично относительно оси Oy . Пусть координаты этих точек: $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. Тогда множество точек Π_- задается уравнением $[(x+a)^2 + y^2] - [(x-a)^2 + y^2] = C^2$, или после упрощений, $x = \frac{C^2}{4a}$.

Докажите сами Π_+ .

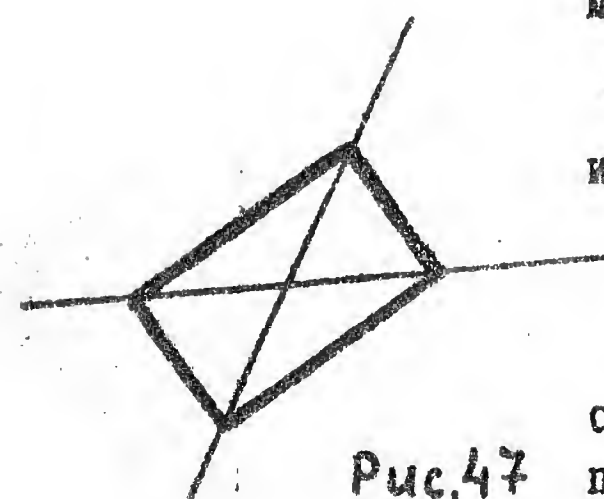


Рис. 47

Π_+ . Множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна постоянной величине $C (C > 0)$ есть контур прямоугольника, диагонали которого лежат на данных прямых.

Π_- . Множество точек, разность расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна по модулю постоянной величине $C (C > 0)$, есть продолжения сторон прямоугольника (включая его вершины), диагонали которого лежат на данных прямых.

Π_+ и Π_- можно доказать алгебраически (здесь удобно принять за оси координат биссектрисы углов между данными прямыми для того, чтобы все формулы были симметричными, а затем воспользоваться формулой для расстояний от точки (x_0, y_0) до прямой

$ax + by + c = 0$, приведенной в § 6). Но проще доказать эти утверждения геометрически.

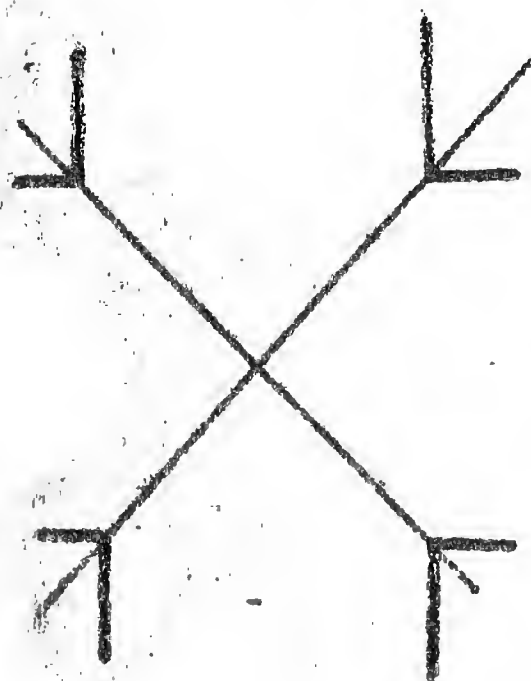


Рис. 48

причем достаточно, конечно, рассмотреть точки, лежащие в одном из углов, на которые данные прямые делят плоскость. Предоставляем это читателю.

Разберитесь, что за множество точек получится в Π_- , если исключить слова "по модулю" т.е. искать множество точек, для которых расстояние до первой прямой больше расстояния до второй на величину C .

Π_+ Множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек A и B равна постоянной величине C , — эллипс (если $C > 2|AB|$).

Π_- Множество точек, разность расстояний от которых до двух данных точек A и B равна по модулю постоянной величине C — гипербола (если $C < 2|AB|$).

Π_+ Множество точек, одинаково удаленных от данной точки A и от данной прямой C — парабола.

Покажем еще, как можно множества точек записывать коротко, в виде "формул". Условимся множество точек, удовлетворяющих какому-то условию, обозначать так: в фигурных скобках пишется сначала буква, которую мы используем для обозначения "произвольной точки" множества (у нас это, как правило, буква M , но это может быть и любая другая точка); затем ставится черта $|$, а за ней пишется то условие, с помощью которого выделяется нужное нам множество точек. Например, множество точек из задачи 2.2 запишется так:

$$\{M | S_{OAMB} + S_{OAMD} = S_{OABC} + S_{OADC}, ABCD - \text{квадрат}\}$$

Условимся еще расстояние от точки K до точки L (до прямой E) обозначать через $P(K, L)$ (соответственно $P(K, E)$).

Тогда множества нашей азбуки запишутся так:

- $\{M | P(M, O) = r\}$,
- $\{M | P(M, E_1) = P(M, E_2)\}$,
- $\{M | P(M, A) = P(M, B)\}$,
- $\{M | \angle AMB = \varphi\}$,
- $\{M | P(M, E_1) / P(M, E_2) = k\}$,
- $\{M | P(M, A) / P(M, B) = k\}$,
- $\{M | P^2(M, A) - P^2(M, B) = c\}$,

- ж. $\{M | \rho^2(M, A) + \rho^2(M, B) = c\}$,
 и. $\{M | \rho(M, e_1) + \rho(M, e_2) = c\}$,
 и. $\{M | |\rho(M, e_1) - \rho(M, e_2)| = c\}$,
 к. $\{M | \rho(M, A) + \rho(M, B) = c\}$,
 л. $\{M | |\rho(M, A) - \rho(M, B)| = c\}$,
 м. $\{M | \rho(M, A) = \rho(M, B)\}$.

Итак, мы перечислили некоторые множества точек, определяемые простыми геометрическими условиями. Этот список, конечно, можно было бы продолжить или, наоборот, сократить. Мы включили в азбуку те множества точек, которые часто будут нужны нам при решении задач (кроме трех последних [к], [л] и [м]: хотя они и очень естественные, но требуют специального знакомства — поскольку здесь возникают уже не прямые и не окружности; в школьном курсе геометрии их у нас не изучают). Вместо того, чтобы каждый раз описывать то или иное множество точек, мы сможем просто записать одну букву: Г, Ж, и т.п.

Теперь приведем несколько задач, которые почти сразу приводят к одному из множеств А — И.

Например, первые задачи сразу получаются, если вы вспомните (Г), что множество точек

$\{M | \angle AMB = 90^\circ\}$
 окружность с диаметром AB .

3.1. Даны две точки A и B . Найти множество точек на плоскости, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B .

3.2. Даны две точки A и B . Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на всевозможные прямые, проходящие через точку B .

3.3. На плоскости даны окружность и точка A . Найти множество середин хорд, высекаемых данной окружностью на прямых, проходящих через данную точку A . (Разумеется, надо рассмотреть все случаи: когда точка A лежит внутри окружности, вне окружности и на ней).

3.4. Даны две точки A и B . Найти множество точек M , для которых треугольник AMB является

- а) прямым, б) остроугольным, в) тупоугольным.

3.5. На плоскости заданы окружность и две точки A и B на ней. Пусть N — произвольная точка этой же окружности. На продолжении отрезка AN от точки N откладывается отрезок $NM = BN$. Найти множество точек M .

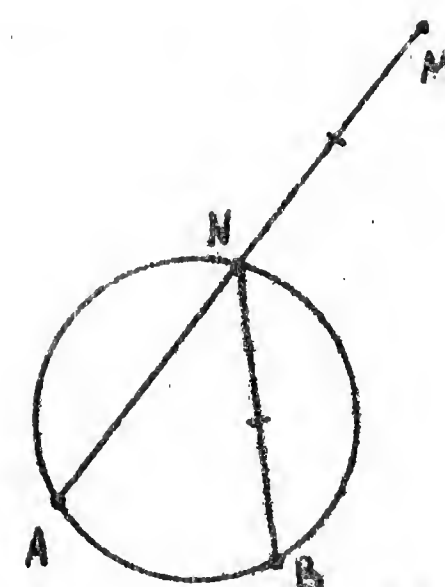


Рис. 49

Решение. Пусть M — некоторая точка, построенная так, как указано в задаче. Соединим точки M и N отрезками с точкой B . По условию $BN = NM$, поэтому $\angle NBM = \angle NMB$. Но так как $\angle ANB = \angle NBM + \angle NMB$ то $\angle AMB = \frac{\angle ANB}{2}$.

Поскольку угол $\angle ANB$ для всех точек N , лежащих на одной из дуг AB , один и тот же (см. Г), то угол $\angle AMB$ для всех соответствующих точек M постоянен, т.е. все эти точки лежат на дуге AMB , вмещающей угол, вдвое меньше, чем угол $\angle ANB$ (Г). Легко заметить, что центр дуги AMB лежит в точке C (на середине дуги AB данной окружности).

Все ли точки дуги AMB мы получим? Нет, не все. Заметим, что когда точка N пробегает дугу AB от точки B до точки A хорда AN вращается вокруг точки A от прямой AB до касательной к данной окружности в точке A . Поэтому искомого множеству принадлежит только часть дуги AMB , а именно, дуга EMB (E — точка пересечения дуги AMB с касательной в точке A). При этом можно считать, что точка B принадлежит нашему множеству (она получается для того положения N , когда N совпадает с B и "длина отрезка NB равна 0"). Точка E , строго говоря,

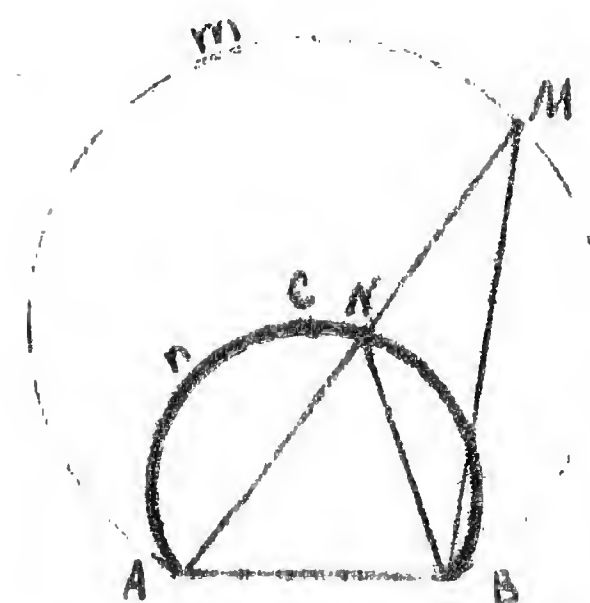


Рис. 50

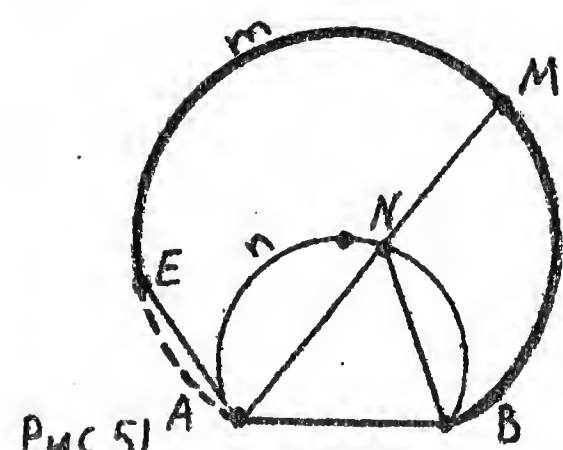


Рис. 51

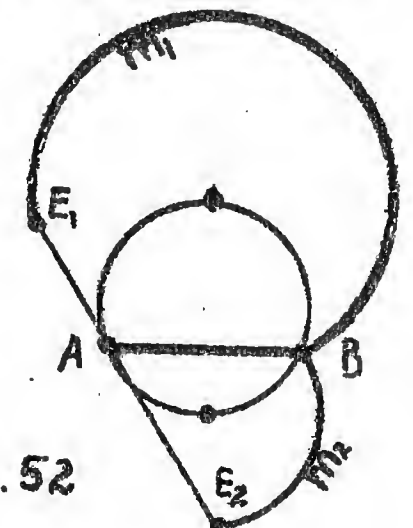


Рис. 52

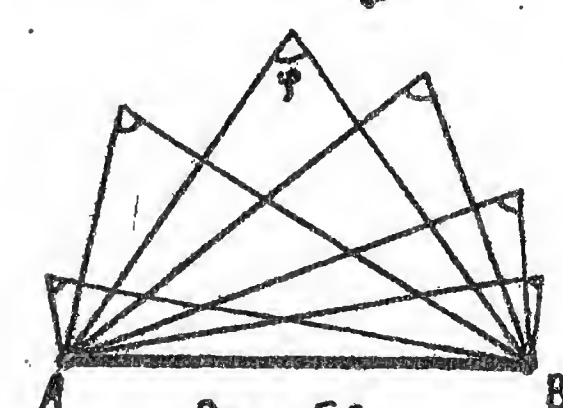


Рис. 53

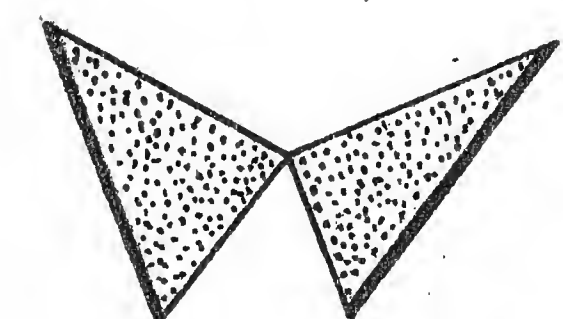


Рис. 54

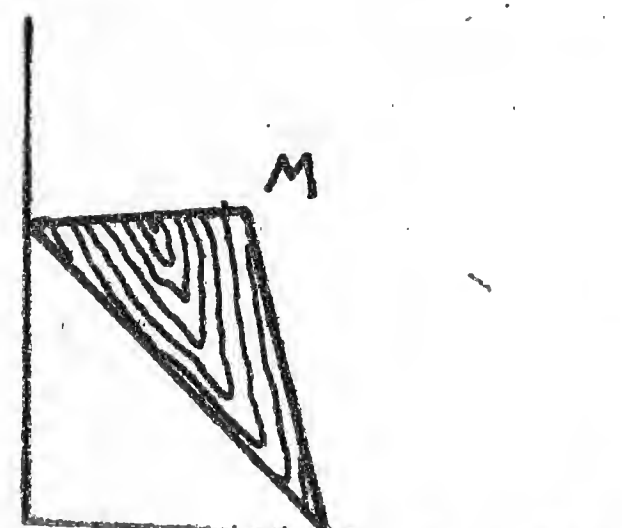


Рис. 55

не принадлежит нашему множеству; когда точка N совпадает с точкой A , не имеет смысла говорить о направлении прямой AN .

Впрочем, когда точка N приближается к точке A , направление прямой AN приближается к направлению касательной. Если условиться, что вполне естественно, "в предельном положении", когда N совпадает с A , считать направление (AN) совпадающим с (AE) и отложить на нем отрезок NB , равный в этом случае $[AB]$, то получится как раз точка E .

Аналогично рассматриваются точки, лежащие по другую сторону от прямой AB .

Итак, искомое множество точек состоит из двух дуг $E_1 m_1 B$ и $E_2 m_2 B$.

3.6. Рассмотрим всевозможные треугольники с данным основанием AB , угол при вершине которых равен φ .

Найти множество

- точек пересечения медиан;
- точек пересечения биссектрис;
- точек пересечения высот.

3.7. У данной окружности хорда $[AB]$ закреплена, а хорда $[CD]$ перемещается, не меняя своей длины. Найти множество точек пересечения прямых а) AD и BC б) AC и BD .

3.8. На плоскости даны два отрезка AB и CD . Найти множество точек M плоскости, для которых площади треугольников ABM и CDM равны.

3.9. Деревянный прямоугольный треугольник перемещается по плоскости так, что вершины его острых углов двигаются по двум сторонам данного прямого угла. Как будет двигаться вершина прямого угла этого треугольника?

Методические разработки для учащихся ВЗМШ по теме "Планиметрия".

Н.Б.Васильев, В.Д.Гутенмахер.

Часть III.

В предисловии к части II мы говорили о том, что азбука из § 3 помогает при решении задач на построение.

В § 4 части III мы разберем, в частности, несколько таких задач.

Геометрические преобразования — одна из основных тем школьной геометрии. Им посвящается § 5. Правда, материал изложен здесь не так, как в школьном учебнике, но мы считаем, что Вам будет полезно взглянуть на несколько иные определения геометрических преобразований, сравнить их со школьными.

В конце § 5 показаны примеры того, как с помощью геометрических преобразований можно решать различные задачи.

С методом координат вы уже знакомы в первых заданиях ВЗМШ. В § 6 приводится сводка знакомых вам формул, а также выводится формула расстояния от точки до прямой.

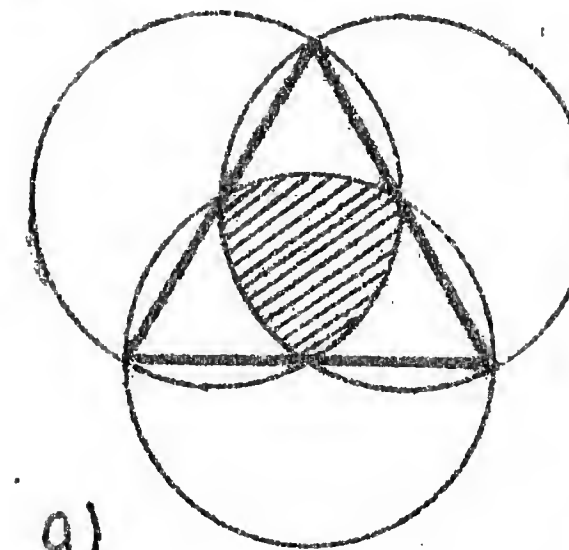
В § 7 даны несколько теорем о геометрических неравенствах.

§ 4. Пересечение и объединение.

Задача 4.1.

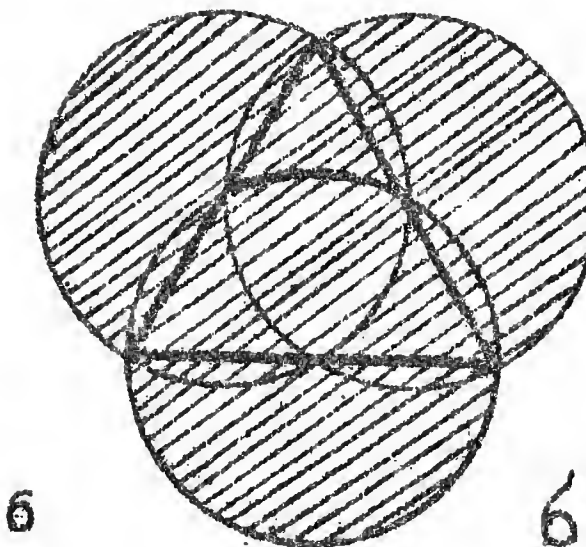
Дан равносторонний треугольник. Найти множество точек плоскости, из которых:

- а) все стороны данного треугольника видны под тупыми углами;
- б) хотя бы одна сторона данного треугольника видна под тупым углом.



а)

Рис. 56



б)

Ответ: а) общая часть трех кругов, построенных на сторонах треугольника как на диаметрах (см. рис. 56а));

б) множество всех точек, принадлежащих хотя бы одному из кругов (см. рис. 56б).

Пусть даны два или несколько множеств точек (на плоскости или в пространстве).

Пересечением этих множеств называется множество всех точек, принадлежащих одновременно всем данным множествам.

Объединением этих множеств называется множество всех точек, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств.

Эти определения годятся даже для бесконечного числа множеств.

Примеры.

1. Пересечение двух окружностей состоит из двух точек, из одной точки или пусто.

2. Пересечение пары и плоскости — круг, множество, состоящее из одной точки, или пустое множество.

3. Пересечение плоскости и прямой — пусто, состоит из одной точки или из всех точек прямой.

✱

4. Объединение двух concentрических кругов — большой круг, а их пересечение — меньший круг.

5. Множество точек, являющееся ответом к задаче 2.2, представляет собой объединение квадрата (с внутренностью) и двух взаимно перпендикулярных прямых, на которых лежат диагонали квадрата.

6. Объединение окружностей радиуса r , центры которых лежат на окружности радиуса R с центром в точке O , есть кольцо с центром в точке O , внутренний радиус которого равен $|R - r|$, а внешний радиус равен $R + r$ (при $R \neq r$), или полный круг радиуса $R + r$ (при $R = r$).

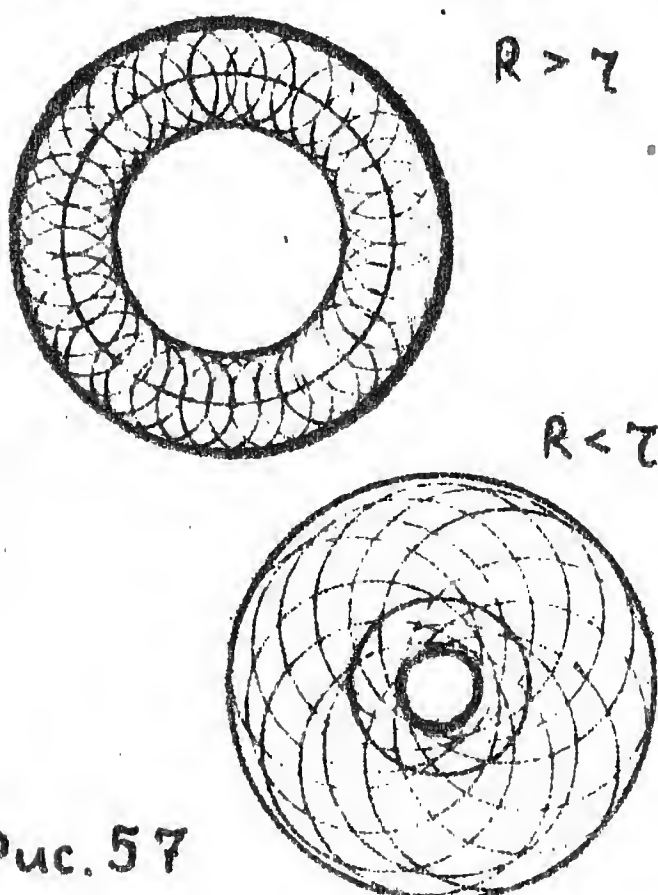


Рис. 57

4.2. На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3 попарно пересекающиеся в трех различных точках. Найти множество точек, равноудаленных от всех трех прямых.

Решение. Условие, что точка M одинаково удалена от трех прямых l_1, l_2, l_3 можно разбить на два условия: (1) точка M одинаково удалена от прямых l_1 и l_2 ; (2) точка M одинаково удалена от прямых l_2 и l_3 . Множество точек, удовлетворяющих условию (1), — пара взаимноперпендикулярных прямых, проходящих через точку пересечения прямых l_1, l_2 (см. [В]). Назовем эти прямые a_1 и a_2 . Точно так же множество точек, удовлетворяющих условию (2), — пара взаимно перпендикулярных прямых b_1 и b_2 .

Пересечение. В предыдущих параграфах мы решали в основном задачи, в которых требовалось найти множество точек, удовлетворяющих одному какому-нибудь условию. Если в задаче требуется найти точки, удовлетворяющие одновременно нескольким условиям, то можно поступить так: найти множество точек, удовлетворяющих отдельно каждому условию, и взять пересечение этих множеств. С такой ситуацией мы встречаемся и в алгебраических задачах: множество решений системы уравнений есть пересечение множеств решений отдельных уравнений, составляющих эту систему.

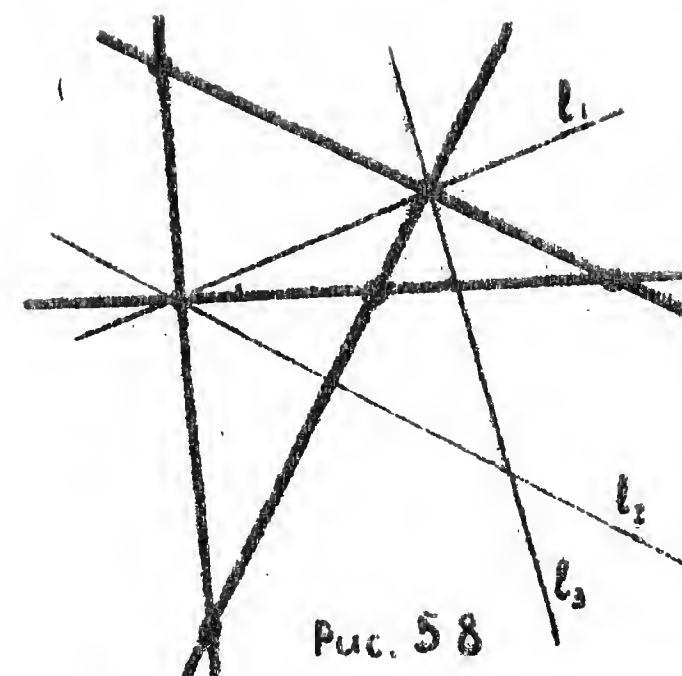


Рис. 58

Пересечение множеств (1) и (2) состоит из четырех точек пересечения прямых a_1 и b_1, a_2 и b_2, a_1 и b_2, a_2 и b_1 . (Нетрудно показать, что никакие две из прямых a_1, a_2, b_1, b_2 не параллельны).
Ответ: множество состоит из четырех точек. Эти точки являются центрами вписанной и трех "внеписанных" окружностей треугольника, образованного прямыми l_1, l_2, l_3 .

Точно так же находится множество точек, равноудаленных от трех данных точек A, B, C — вершин треугольника. Это множество всегда состоит из одной точки (центра окружности, описанной около треугольника ABC). Интересно, что при решении этой задачи мы по ходу дела доказываем, что три перпендикуляра, восстановленных в серединах сторон, пересекаются в одной точке — точно так же, как раньше, при решении задачи 4.2, мы доказали, что шесть биссектрис внутренних и внешних углов треугольника пересекаются по три в четырех точках.

4.3. Даны две пересекающиеся прямые. Найти множество точек, которые находятся от каждой из данных прямых на расстоянии:
а) равном 1; б) не больше 1; в) не меньше 1.

4.4. Дана прямая l и точка A на расстоянии a от неё. Найдите множество точек, которые находятся от прямой l и от точки A на расстоянии:
а) равном r ; б) не большем r .

Указание. Не забудьте о том, что ответ зависит от параметров a и r . Разберите все случаи!

4.5. Дан квадрат $ABCD$. а) Найти множество точек, плоскости, расстояние которых от центра квадрата меньше, чем от каждой из его вершин.

б) Найти множество точек, которые ближе к прямой AB , чем к прямым BC, CD и DA .

4.6. Дан треугольник ABC . Найти на плоскости множество точек M таких, что площадь каждого из треугольников MAB, MBC, MCA меньше площади треугольника ABC .

Часто подобный прием: "разбить условие задачи на два и взять пересечение" — используется в задачах на построение. Многие из этих задач сводятся к построению некоторой точки, для которой удастся вывести из условия задачи два простых требования такие, что множество точек, удовлетворяющих каждому из них, есть кусок прямой или окружности. Пересечение этих линий и определяет положение искомой точки.

Рассмотрим самую простую задачу.

4.7. Построить треугольник по трем сторонам a , b , c (a , b и c — данные отрезки).

Решение. Возьмем произвольную прямую и отложим на ней отрезок BC конгруэнтный a . (Мы будем, как это

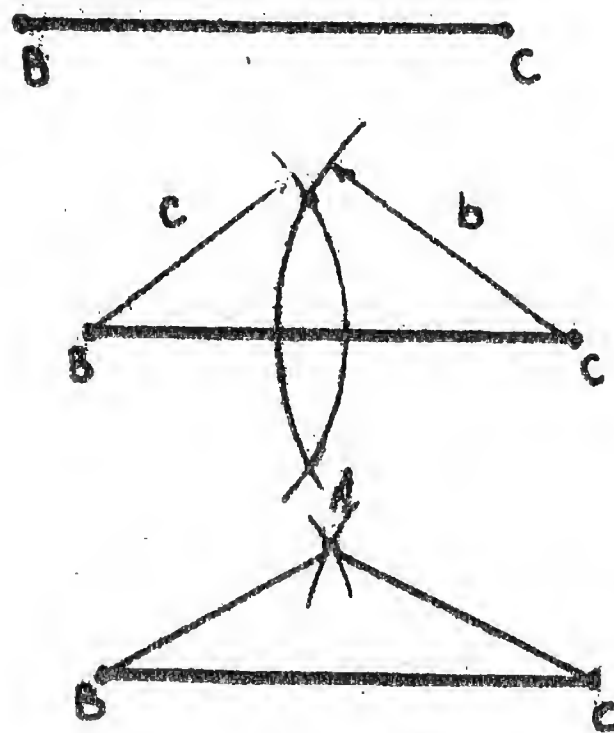


Рис. 59

принято, обозначать вершины будущего треугольника теми же буквами, что и противоположные им стороны.) Вершина A треугольника ABC должна находиться на расстоянии b от точки C и на расстоянии c от точки B . Множество точек, отстоящих от точки C на расстоянии b , есть окружность радиуса b с центром C , а множество точек, отстоящих от точки B на расстоянии c — окружность радиуса c с центром B . Вершина A должна принадлежать обеим этим множествам, т.е. должна принадле-

жать их пересечению. Построив эти окружности и соединив их точку пересечения с точками B и C , получим искомый треугольник ABC .

Наша задача имеет решение в том и только в том случае, когда построенные окружности пересекаются, т.е. если каждый из отрезков a , b и c меньше суммы двух других.

Обратите внимание на последний абзац решения. Подобное "исследование" — необходимая часть решения каждой задачи с параметрами.

В следующих задачах на построение Вам пригодятся те "геометрические" места, которые встречались в §§ 3 и 4.

4.8. Построить треугольник, если заданы одна его сторона, а

также высота и медиана, проведенные к этой стороне.

4.9. Построить ромб, если заданы его высота и одна из диагоналей.

4.10. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах.

4.11. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

4.12. Построить треугольник по основанию, периметру и углу при вершине.

4.13. На данной прямой лежат точки A , B , C , D .

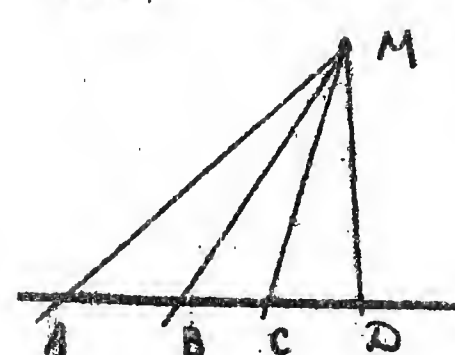


Рис. 60

Построить на плоскости точку, из которой отрезки $[AB]$, $[BC]$ и $[CD]$ видны под одним и тем же углом.

Объединение. Если в задаче требуется найти точки, которые удовлетворяют хотя бы одному из нескольких условий, то, разумеется, нужно найти множества точек, удовлетворяющих отдельно каждому из условий, и взять объединение этих множеств.

Именно так мы поступаем при решении уравнения $f(x) = 0$, левая часть которого разлагается на множители $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Мы находим множество решений каждого из уравнений

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0.$$

и берем их объединение.

4.14. На плоскости даны две точки A и B . Найти множество точек M таких, что в треугольнике ABM два угла равны.

Решение. Чтобы треугольник AMB имел два равных угла, должно выполняться хотя бы одно из трех условий:

$$1) |AM| = |MB|, \quad 2) |AM| = |AB|, \quad 3) |BM| = |AB|.$$

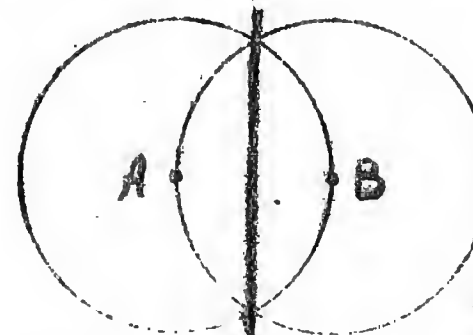


Рис. 61

Искомое множество является поэтому объединением следующих трех множеств:

1) прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину;

- 2) окружность радиуса $[AB]$ с центром в точке A ;
 3) окружность радиуса $[AB]$ с центром в точке B .

Из этого объединения, строго говоря, нужно исключить точки, лежащие на прямой AB (они приводят к "вырожденному" треугольнику AMB).

4.15. Найти множество середин отрезков, у которых один конец лежит на данной окружности, а другой — на другой данной окружности.

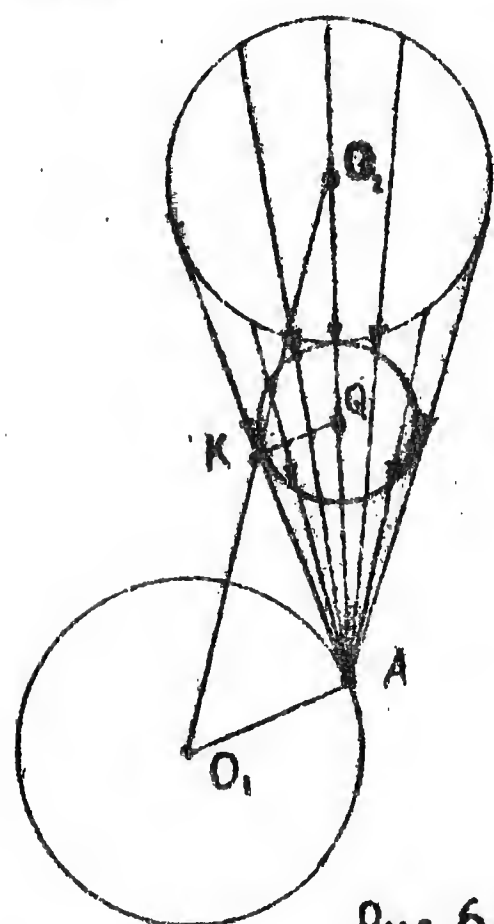


Рис. 62

Решение. Обозначим радиусы данных окружностей через r_1 и r_2 ($r_1 \leq r_2$) и их центры O_1 и O_2 соответственно. Зафиксируем сначала какую-нибудь точку A первой окружности и найдем множество середин отрезков, у которых один конец совпадает с точкой A . Очевидно, что это множество будет окружностью радиуса $r_2/2$ с центром Q в середине отрезка O_2A . (Эта окружность получается сжатием окружности O_2 в два раза к точке A , то есть гомотетией (§5.5) с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$.)

Заметим, что точка Q лежит на расстоянии $\frac{r_1}{2}$ от точки K — середины отрезка O_1O_2 .

Если мы будем двигать точку A по окружности O_1 , то точка Q будет двигаться по окружности радиуса $\frac{r_1}{2}$ с центром в точке K . Таким образом, искомое множество есть объединение всех окружностей радиуса $r_2/2$, центры которых лежат на окружности радиуса $r_1/2$ с центром в точке K .

Тем самым множество всех точек, удовлетворяющих условию задачи, представляет собой кольцо с внешним радиусом $(r_1+r_2)/2$ и внутренним $|r_1-r_2|/2$ (см. пример 6 стр. 33) . В случае, когда $r_1 = r_2$ это множество превращается в круг.

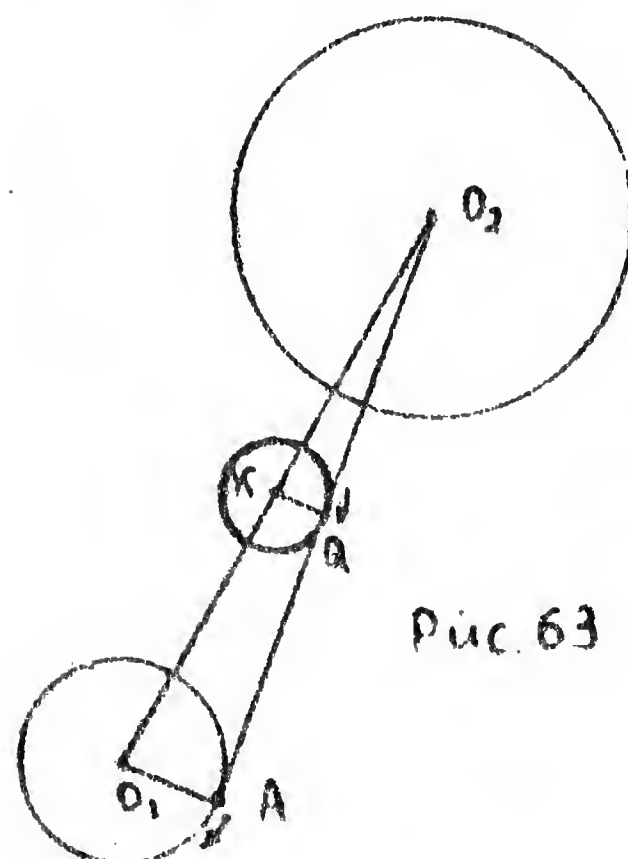


Рис. 63

4.16. $ABCD$ — квадрат. Найдите множество середин отрезков, у которых:

- а) один конец лежит на стороне $[AB]$, другой — на стороне $[CD]$;
 б) один конец лежит на диагонали $[AC]$, другой — на диагонали $[BD]$;
 в) один конец лежит на стороне $[AB]$, другой — на стороне $[AD]$.

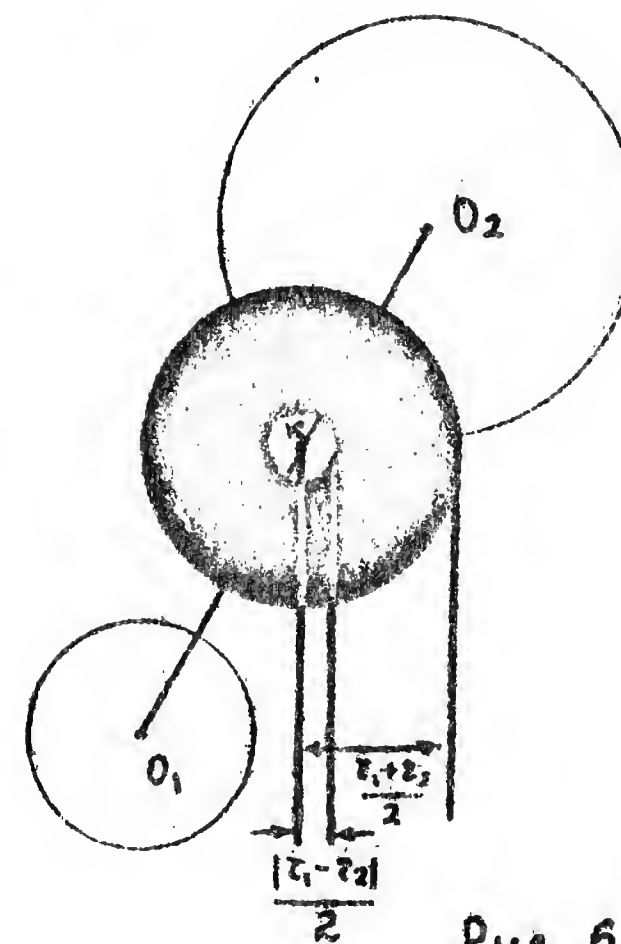


Рис. 64

4.17. ABC — равнобедренный треугольник. Найдите множество точек M таких, что оба треугольника AMB и AMC — равнобедренные.

4.18. Через деревню A , окруженную со всех сторон дугами, проходит одна прямолинейная дорога. Человек может идти по дороге со скоростью 5 км/час, по дугу — 2 км/час. Начертить множество точек, до которых он мог бы дойти из A за один час.

§ 5. Преобразования (сводка определений).

Геометрические преобразования плоскости — это функции, у которых и "область определения", и "множеством значений" является множество точек плоскости. Мы уже неоднократно употребляли названия некоторых преобразований. Здесь для удобства они собраны вместе.

1. Параллельный перенос (или поступательное перемещение):

каждая точка M сдвигается в точку M' в одном и том же направлении и на одно и то же расстояние.

Можно говорить о переносе на данный вектор \vec{a} , тогда $\vec{MM'} = \vec{a}$ для всех точек M .

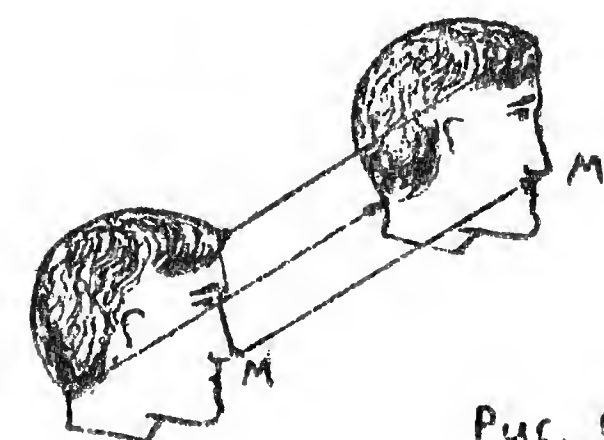


Рис. 65

2. Симметрия относительно прямой e :

каждой точке M ставится в

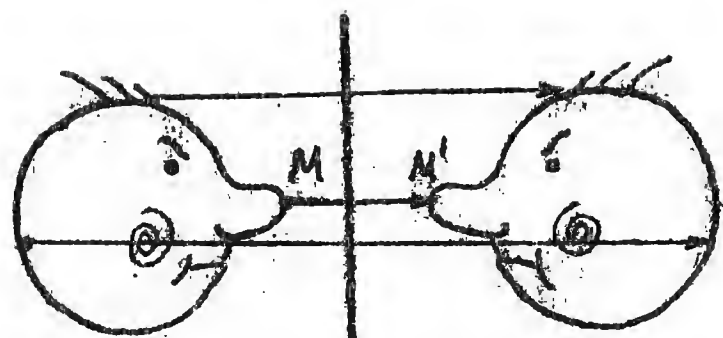


Рис. 66

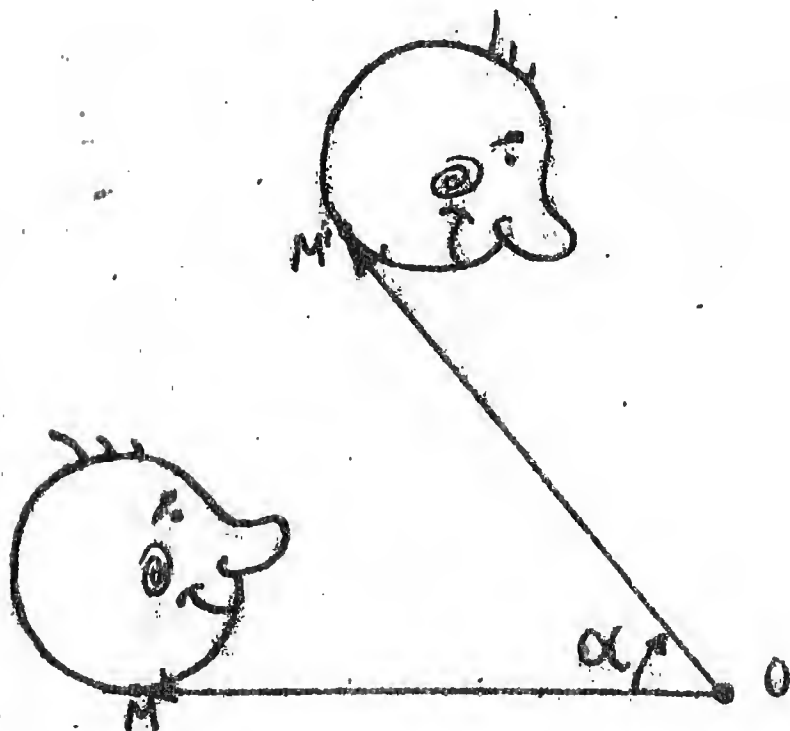


Рис. 67

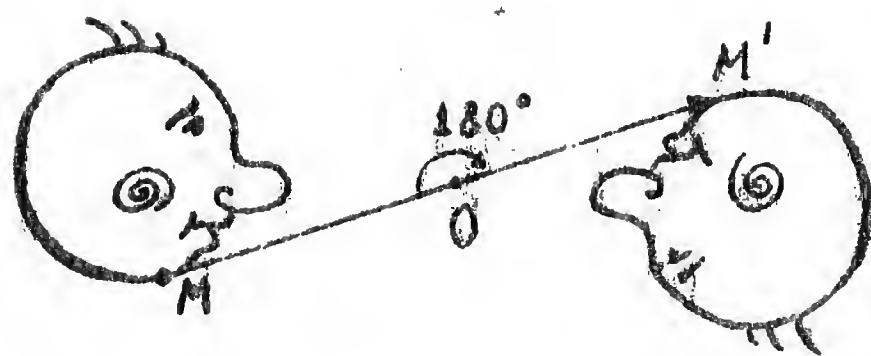


Рис. 68

соответствие точка M' так, что $(MM')e$ и середина $[MM']$ лежит на прямой e .

3. Поворот на угол α вокруг точки O : (заметим, что кроме угла α и точки O , нужно всегда указывать и направление поворота — по или против часовой стрелки. Часто считают, что положительные значения α соответствуют вращению против часовой стрелки, отрицательные — по).

4. Симметрия относительно точки O : каждая точка M переходит в точку M' такую, что середина отрезка MM' лежит в точке O . Это — то же самое преобразование, что и поворот на угол 180° вокруг точки O .

Все эти преобразования сохраняют расстояния между точками:

$$\rho(M, N) = \rho(M', N')$$

Такие преобразования называются перемещениями (или, в более старой терминологии — движениями).

5. Гомотетия с центром O и коэффициентом $k > 0$.

Каждая точка M переходит в такую точку M' , которая лежит на луче $[OM)$ и для которой $\frac{OM'}{OM} = k$.

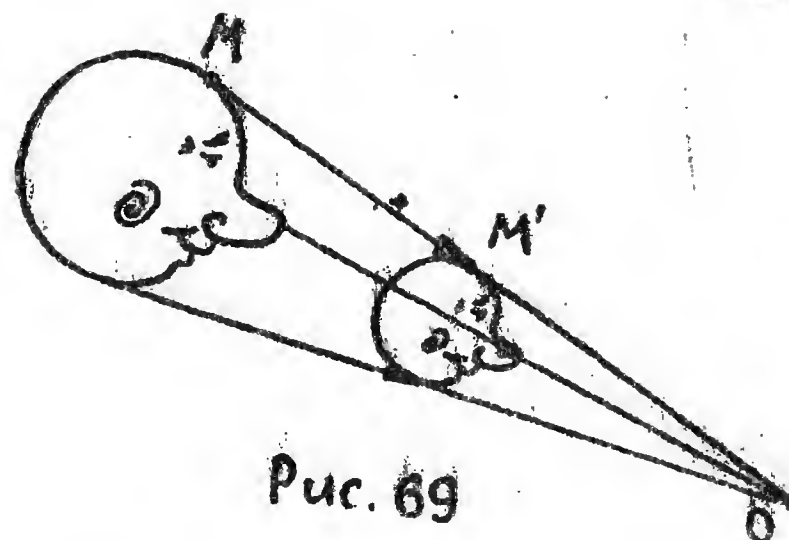


Рис. 69

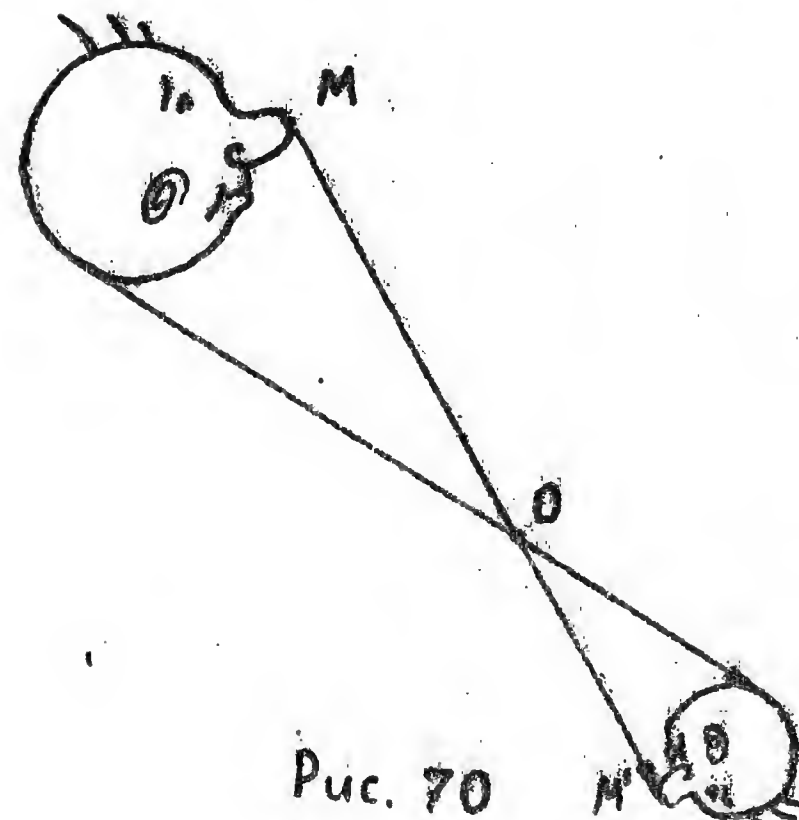


Рис. 70

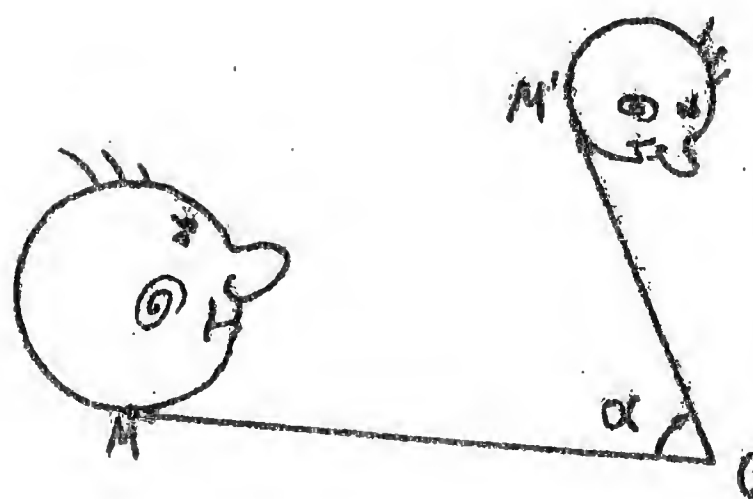


Рис. 71

6. "Обратная" гомотетия, или гомотетия с центром O и коэффициентом $k < 0$. Каждая точка M переходит в такую точку M' , что точка O лежит на отрезке MM' и $\frac{OM'}{OM} = |k|$. (При $k = -1$ получаем симметрию относительно точки O .)

7. Центрально-подобный поворот на угол α с центром O и коэффициентом $k > 0$:

$\angle MOM' = \alpha$, $\frac{OM'}{OM} = k$ (с учетом направления!).

Заметим, что при $\alpha = 180^\circ$ получаем гомотетию с коэффициентом $(-k)$, так что наш пункт 7 охватывает пункты 3, 4 и 5 как частные случаи.

Мы не будем строить здесь красивую теорию геометрических преобразований. О ней можно почитать в уже упоминавшейся книге И.М. Яглома и других. Укажем только одну теорему:

если преобразование $M \rightarrow M'$ обладает тем свойством, что отрезок $[M'N']$ параллелен $[MN]$ и $\frac{M'N'}{MN} = k$,

то при $k \neq 1$ это преобразование — обязательно гомотетия с коэффициентом k или $-k$, а при $k = 1$ — либо (1) перенос, либо (2) симметрия отно-

сительной некоторой точки O (Поэтому преобразования (I) и (2) иногда считаются частным случаем гомотетии).

Заметим, что у нас геометрическое преобразование определено сразу на всей плоскости. Но... Впрочем, предоставим лучше слово Ж. Адамару.

« Однако не всегда следует применять преобразование ко всей рассматриваемой фигуре. Напротив, во многих случаях оказывается удобнее преобразовать только часть фигуры.

Последнее имеет, в частности, место в случае тех простых преобразований, о которых мы только что говорили: перемещения, симметрия, гомотетии и общего случая подобия. В большинстве случаев нет никакого смысла применять эти преобразования ко всей фигуре, поскольку свойства преобразованной фигуры не проще и не сложнее свойств первоначальной фигуры: обе фигуры обладают одними и теми же свойствами¹⁾. Напротив, во многих задачах бывает необходимо подвергнуть одному из этих преобразований определенную часть фигуры.

Пример I. Рассмотрим следующую задачу: даны две параллельные прямые и две точки A и B , находящиеся вне этих параллельных и расположенные по обе стороны от них; найти ломаную линию наименьшей длины, соединяющие точку A и B , если вершины этой ломаной лежат на данных прямых и отрезок ломаной между обеими параллельными имеет данное направление: (LK) .

Пусть $ACDB$ — искомая ломаная; точка D получается из точки C с помощью поступательного перемещения, которое можно, очевидно, считать известным, так как отрезки, отсекаемые двумя данными параллельными прямыми на любой прямой данного направления, имеют одну и ту же длину. Мы можем выполнить это поступательное перемещение над отрезком AC ; точка A преобразуется в точку E , положение которой известно, а отрезок AC — в отрезок ED той же длины. Отсюда легко вывести, что точки E , D , B должны лежать на одной прямой. »

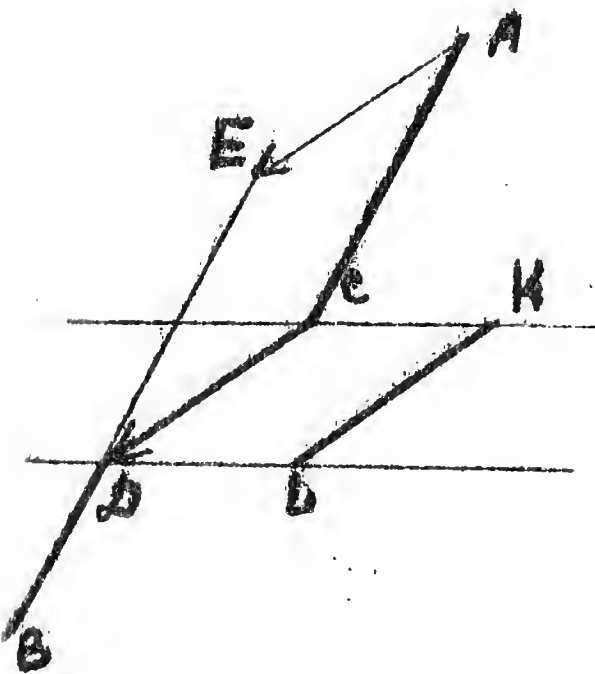


Рис. 72

Г) Геометрия изучает как раз те свойства фигур, которые не изменяются при их перемещении.

Теперь несколько задач. Одну задачу — прямо на тему "геометрические преобразования" — мы уже разбирали (§ 2, № 2.4). Там использовали гомотетии и симметрии. Вот примеры использования других преобразований.

5.1. Построить трапецию, по заданным основаниям a , b и боковым сторонам c и d .

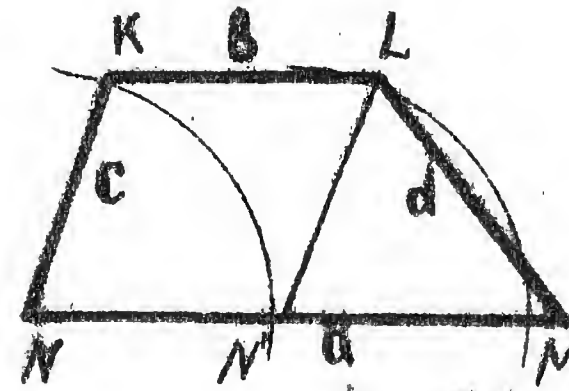


Рис. 73

Указание. Заметим, что точка K (см. рис. 73) получается переносом из точки L на расстояние B в направлении (NM) . Отсюда ясно, что дело сводится к построению треугольника $N'L'M$ по трем сторонам: c , d и $|a-b|$. (Здесь N' — точка, полученная тем же переносом из точки N .)

5.2. Дана точка A и прямая e . Найти множество вершин C равнобедренных треугольников ABC , у которых вершина B лежит на прямой e .

Указание. Вершина C получает из B поворотом на 60° (в ту или другую сторону!) вокруг точки A . Поэтому искомым множеством будет две прямые, получающиеся из e при повороте на $\pm 60^\circ$ вокруг точки A .

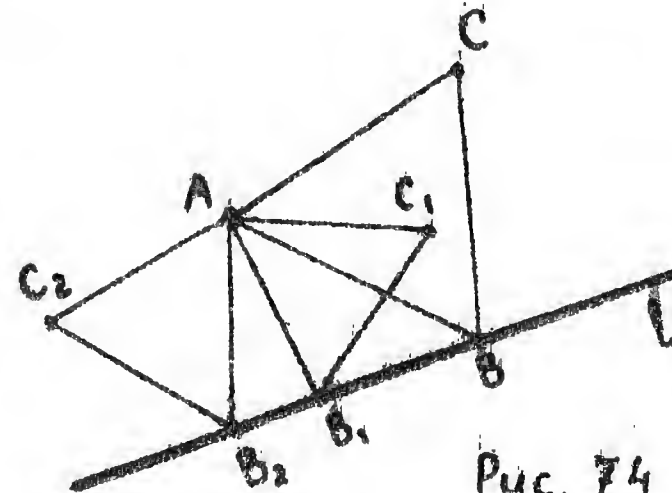


Рис. 74

5.3. Даны две точки A и B и две прямые e_1 и e_2 . Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы C лежало на e_1 , и D - на e_2 .

5.4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Проведите через точку A прямую, на которой обе окружности высекают равные хорды.

5.5. A_1, B_1, C_1 – середины сторон соответственно $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ треугольника ABC . Докажите, что треугольник A_1, B_1, C_1 получается из треугольника ABC гомотетией. Каков её центр? Коэффициент? Докажите, что при этой гомотетии точка пересечения высот треугольника ABC переходит в центр O описанной около него окружности.

5.6. Пусть O - центр окружности, описанной около треугольника ABC ; точки K, C, M симметричны точке O относительно прямых AB, BC, CA . Докажите, что $\triangle KLM \cong \triangle ABC$. Будут ли эти треугольники гомететичны?

§ 6. Метод координат (основные формулы).

Как только на плоскости выбрана система координат Oxy , каждой точке A плоскости ставится в соответствие пара чисел (x, y) - её координаты. Соответствие между точками плоскости и парами чисел взаимно однозначно (т.е. каждой точке соответствует одна пара чисел, и обратно).

Середина отрезка между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ имеет координаты $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. Вообще точка, делящая отрезок A_1A_2 в отношении $\rho_1 : \rho_2$ имеет координаты $(\frac{\rho_2 x_1 + \rho_1 x_2}{\rho_1 + \rho_2}, \frac{\rho_2 y_1 + \rho_1 y_2}{\rho_1 + \rho_2})$.

Расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ равно $\rho(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Отсюда следует, что множество точек (x, y) , координаты которых удовлетворяют уравнению $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ есть окружность с центром в точке (x_0, y_0) радиуса r .

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$ (a, b, c - некоторые числа, причем a и b не равны нулю одновременно), есть прямая. Обратно, каждая прямая задается уравнением $ax + by + c = 0$. При этом числа a, b, c определяются для данной прямой однозначно с точностью до пропорциональности (если умножить их все на одно и то же число k , то полученное уравнение $kax + kby + kc = 0$ будет определять ту же прямую).

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l , задаваемой уравнением $ax + by + c = 0$, равно $\rho(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Покажем, как можно вывести эту формулу, когда $b \neq 0$. В этом случае уравнение прямой можно записать так: $y = -\frac{ax+c}{b}$. Найдем на прямой точку (x^*, y^*) , расстояние от которой до точки (x_0, y_0) наименьшее. Квадрат расстояния от точки (x, y) лежащей на прямой, до точки (x_0, y_0) равен

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= (x - x_0)^2 + \left(\frac{ax+c}{b} - y_0\right)^2 = \\ &= Ax^2 + Bx + C = A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4A}, \end{aligned}$$

где $A = 1 + \frac{a^2}{b^2}$, $B = 2\frac{ac + aby_0 - b^2x_0}{b}$, $C = x_0^2 + \left(\frac{c}{b} + y_0\right)^2$.

Минимум квадрата расстояния достигается при

$$x^* = -\frac{B}{2A} = -\frac{b(ac + aby_0 - b^2x_0)}{a^2 + b^2}$$

и равен $\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$ что и требовалось доказать.

§ 7. Основные геометрические неравенства.

Теорема 7.1. Длина каждой стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

Следствия. 1°. Длина каждой стороны треугольника больше разности длин двух других сторон.

2°. Периметр выпуклого многоугольника меньше периметра любого многоугольника, внутри которого содержится первый.

Теорема 7.2. В треугольнике из двух сторон большую длину имеет та, против которой лежит больший угол.

Следствие. Против тупого или прямого угла треугольника всегда лежит наибольшая сторона.

Теорема 7.3. Если два треугольника имеют по неравному углу, заключенному между соответственно равными сторонами, то против большего из неравных углов лежит большая сторона.

Много полезных теорем о геометрических неравенствах можно получить, слегка переделав теоремы об основных "геометрических местах" - множествах точек - из §3 ("Азбука").

Приведем несколько примеров.

[А] Множество точек, расстояние от которых до данной точки O меньше данного положительного числа r , есть внутренность круга радиуса r с центром в точке O . (А множество точек $\{M \mid \rho(M, O) > r\}$ - внешность этого круга.)

[В] Прямая, проходящая через середину отрезка AB и ему перпендикулярная, разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них (содержащей точку A) расположены все точки, которые ближе к A , чем к B , в другой - все точки, которые ближе к B , чем к A .

[Г] Для любой точки M , лежащей внутри двух симметричных сегментов с общей хордой $[AB]$, $\angle AMB > \angle ANB$, где N - любая точка на дуге одного из сегментов; для любой точки M , лежащей вне этих сегментов, $\angle AMB < \angle ANB$.

Следствие. Если медиана $[AK]$ треугольника ABC по длине меньше (больше) половины стороны $[BC]$, то угол BAC тупой (острый).

Эти теоремы (их описок можно было бы продолжить) позволяют доказывать многие геометрические неравенства, решать задачи на отыскание максимумов и минимумов.

Часто геометрические неравенства бывает удобно доказывать с помощью алгебраических выкладок или тригонометрических формул. Например, из формулы косинусов 5.2 сразу следует, что если для сторон a, b, c треугольника выполнено неравенство $a^2 > b^2 + c^2$ ($a^2 < b^2 + c^2$), то угол A тупой (острый).

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся ВЭМШ.

Ваше очередное задание № ¹⁰ мы предлагаем выполнить
по § I брошюры Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера "Элементы
планиметрии". Вот номера контрольных задач:
~~(ВМЕСТО НОМЕРОВ НА СТР. 6 БРОШЮРЫ)~~

Обязательные задачи

1. I.1	5. I.5	9. I.8	13. I.11
2. I.2	6. I.6	10. I.9	14. I.12
3. I.3	7. I.7a	11. I.10a	15. I.13a-b
4. I.4	8. I.7b	12. I.10b	

Дополнительные задачи

16. I.14a	19. I.16a	22. I.23
17. I.14b	20. I.18	23. I.25a
18. I.14b	21. I.20	24. I.27a

Критерии оценок

Обязательные задачи : "зачет" - решено не менее 10 задач;
"4" - решено не менее 13 задач;
"5" - решено 15 задач.
Дополнительные задачи: "4" - решено не менее 5 задач;
"5" - решено не менее 7 задач.

Срок присылки задания №
Составитель С.Л.Табачников

20/11

1975-1976 уч. год

Методические разработки для учащихся II курса ВЭМ
по заданиям № II и № 12 по теме "Планиметрия".

Задание № II.

Это задание включает в себя задачи из I и IV частей. Советуем Вам внимательно просмотреть все теоремы и следствия, которые приведены в I части (многие из них известны Вам из школьного курса).

Обязательные задачи.

- | | |
|-----------------------------------|------------------------|
| 1. Доказать теорему 2.5 на стр. 4 | 5. 5.4 на стр. 7 |
| 2. 3.3 на стр. 4 | 6. 6.1 на стр. 7 |
| 3. 3.4 на стр. 4 | 7. 6I на стр. 5I ч. IV |
| 4. Обратная теорема 4.3 на стр. 5 | |

Дополнительные задачи.

- | | |
|--------------------|-------------------------|
| 8. 5.5 на стр. 7 | 11. 62 на стр. 5I ч. IV |
| 9. 6.2 на стр. 8 | 12. 95 на стр. 55 ч. IV |
| 10. 8.4 на стр. 10 | |

Критерии оценок.

Обязательные задачи: "3" - решено не менее 4 обязательных задач;
"4" - решено не менее 6 обязательных задач;
"5" - решены все обязательные задачи.
Дополнительные задачи: "4" - решены 2-3 дополнительные задачи;
"5" - решено 5 дополнительных задач.

Срок присылки задания № II - 15 ноября 1975 года.

По вине типографии в IV части отсутствует несколько страниц.

Задание № 12.

В задании № 12 вошли задачи из II части "Планиметрия". Внимательно разберите материал на стр. 2-5 (обратите внимание на использование метода координат), а также §3, в котором даны примеры "геометрических мест", часто встречающихся при решении задач.

Обязательные задачи.

- | | |
|---------------------|-----------------------------|
| 1. 2.12a) на стр. 9 | 5. 3.4a), б), в) на стр. 19 |
| 2. 3.1 на стр. 18 | 6. 3.6a), б) на стр. 20 |
| 3. 3.2 на стр. 18 | 7. 3.8 на стр. 20 |
| 4. 3.3 на стр. 18 | 8. 2.9a) на стр. 8 |

Дополнительные задачи.

- | | |
|----------------------|--------------------|
| 9. 2.9б) на стр. 8 | 12. 3.7 на стр. 20 |
| 10. 2.12б) на стр. 9 | 13. 3.9 на стр. 20 |
| 11. 3.6a) на стр. 20 | |

Критерии оценок.

Обязательные задачи: "3" - решено не менее 4 задач;
"4" - решено не менее 6 задач;
"5" - решено не менее 8 задач.

Дополнительные задачи: "4" - решено 2 дополнительные задачи;
"5" - решено 4 дополнительные задачи.

Срок присылки задания № 12 - 30 ноября 1975 года.

Робягат В задании замечены следующие опечатки:

часть	стр.	напечатано	следует читать
I	7	5.6 $h_a^2 = \dots = \frac{1}{4}a^2 p(p-a)$	$h_a^2 = \dots = \frac{1}{4}a^2 p(p-a)$
I	9	8.2. $q_2 = k^2 / 1cc^2$	$q_2 = 1cc^2 / 1c^2 R$
I	10	ссылки на 2.3 и 2.4	8.3 и 8.4
2	6	2.4б непечатана буква N	
2	15	$X + \dots$ радиуса $\sqrt{c-2a^2}$	$\sqrt{\frac{c}{2} - a^2}$
2	19	3.5 в 3-ей строчке пропущена буква B	
2	13	E в последней строчке пропущена буква K	
3	13	5.6 "точки K, C, M, ..."	точки "K, L, M, ..."
2	14	E 3 строка сверху $\frac{2ck}{1-k^2}; \frac{c(1+k^2)(1-k^2)}{1-k^2}$	$\frac{2ck}{1-k^2}; \frac{c(1+k^2)}{1-k^2}$

Задание подготовили: Б. Гутенмахер, Н. Сохор, Л. Серебрянникова.

Методическая комиссия ВЭМ.

Внимание! В 1976 году отдельные задания ВЭМ будут даваться по материалам журнала "Квант". Поэтому Вам обязательно надо подписаться на этот журнал. Подписка на "Квант" принимается без ограничения в пунктах приема подписки "Совзпечать", отделениях связи, на почтамтах. При подписке ссылаться на индекс журнала 70465. Цена одного номера 30 коп. "Квант" предназначен всем школьникам 6-10 классов, которые любят математику и физику, любят решать задачи. Если Вам не удалось подписаться на журнал, то срочно сообщите нам об этом и укажите причину.

Дирекция ВЭМ.

2 курс 89/90
N 10

БСЗ, 11.11.89

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК
СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер

ЭЛЕМЕНТЫ ПЛАНИМЕТРИИ

Методические разработки
для учащихся ВЗМШ

Удачное пособие
по геометрии

Несомненно здесь не построение,
требующие использовать
геометрические методы

Москва - 1985

Более сложные задачи (например 4
минимум, -.) в задаче и выводе,
но в формуле есть.

708 37.018.43

Тема: Планиметрия: Методические указания для учащихся 8-10 классов. Б.Васильев, В.Н.Гутенметов. М., 1985. 100 с.

Разработка подготовлена для учащихся 8-10 классов средней математической школы АН УССР при Московском государственном университете им. М.В.Ломоносова - 10 классов 8-10 классов и учащихся курсов НТУ.

Они посвящены изложению метода "геометрических мест" при решении планиметрических задач. Приводится справочник "азбука" - основных геометрических мест точек, разбирается ряд задач на построение и на экстремум с помощью метода геометрических мест. Даны задачи для самостоятельного решения и контрольные задачи.

Содержание

	Стр.
Предисловие	6
Номера контрольных задач и критерии оценки	6
§1. Азбука	20
§2. Задачи на построение	28
§3. Минимум и максимум	37
§4. Деление отрезка	51
Ответы, указания, решения	51

Предисловие

Ключом к решению многих геометрических задач является так называемый метод геометрических мест. Цель первого задания по этому пособию — овладеть этим методом. В §1 мы собрали основные геометрические места, которые нужно знать как азбуку (поэтому мы и назвали этот параграф "Азбукой").

Основные фигуры, которые изучаются в школе, — это прямая и окружность, так что можно пользоваться таким неформальным соображением: если дана школьная задача на нахождение геометрического места точек, то ответ может быть такой — это или прямая, или окружность, или какая-нибудь фигура, ограниченная этими линиями. Таким образом, для нахождения геометрического места точек полезно сделать крупный чертеж, лучше в нескольких вариантах (с различным расположением фигур) и найти несколько точек. Такой экспериментальный подход не только помогает угадать ответ, сформулировать гипотезу, но часто и показывает путь к математическому доказательству. Рисуя картинку, Вы убедитесь, что за каждой задачей скрыта вспомогательная задача: построить несколько точек или линий, с которых говорится в условии. Эта задача часто оказывается более доступной, но не менее интересной.

В своем очерке, метод геометрических мест позволяет решать многие задачи на построение — этому посвящен §2 пособия. Мы надеемся, что курс планиметрии, который завершается в 8-м классе, по-новому раскроется перед Вами после того, как Вы решите задачи двух первых параграфов, и поможет при подготовке к экзаменам в Вуз, ведь почти во всех письменных экзаменационных вариантах и на устных экзаменах по математике встречаются задачи по планиметрии.

Следующий §3 "Минимум и максимум" тесно связан с темой исследование функций из курса "Алгебра и начала анализа" для 9-го класса. Здесь Вы познакомитесь с важными идеями при решении задач на экстремум, которые лежат в основе такой современной области математики, как "линейное и нелинейное программирование".

Последний §4 "Линии уровня" продолжает эту тему. Здесь вводится понятие функции от нескольких переменных, и ее линии уровня — геометрического места точек, в которых функция принимает одно и то же значение. Представлять себе поведение

§ 1. Азбука

Этот параграф — справочник геометрических мест — облегчит нам в дальнейшем решение многих задач.

А. Множество точек, расстояние от которых до данной точки O равно данному числу r , есть окружность радиуса r с центром в точке O .

Это — определение окружности.

Б. Множество точек, одинаково удаленных от двух данных пересекающихся прямых ℓ_1 и ℓ_2 , представляет собой пару взаимно перпендикулярных прямых, делящих пополам углы, образованные прямыми ℓ_1 и ℓ_2 .

Какое множество получается, если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны?

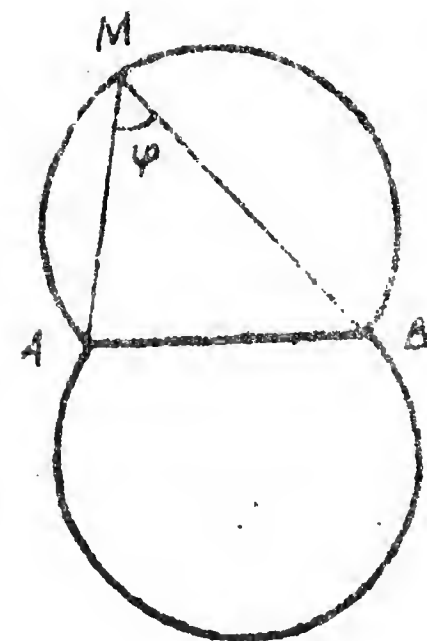
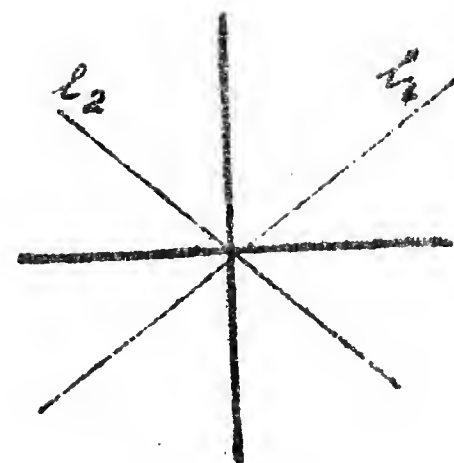
В. Множество точек, одинаково удаленных от двух данных точек A и B , есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

Г. Множеством точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом φ (т.е. множеством точек M , для которых $\angle AMB = \varphi$), являются две дуги окружности с концами в точках A и B . В частности, при $\varphi = \pi/2$ мы получаем окружность с диаметром AB .

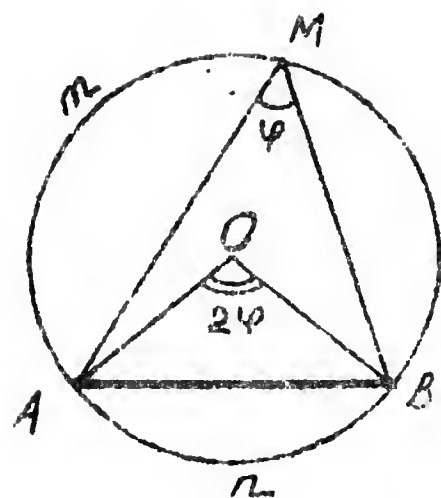
□ Ясно, что искомое множество симметрично относительно прямой AB , поэтому нам достаточно исследовать только точки по одну сторону от этой прямой.

Построим равнобедренный треугольник AOB , в котором $AO = OB$ и угол при вершине равен 2φ , 1)

1) Мы разберем случай, когда $\varphi < \pi/2$; для $\varphi > \pi/2$ проведите рассуждения сами.



а затем через точки A и B проведем окружность с центром O . Пусть M — произвольная точка дуги \overline{AMB} . Тогда угол AMB равен φ , поскольку он измеряется половиной дуги \overline{AB} . Поэтому из всех точек дуги \overline{AMB} отрезок AB виден под углом φ .

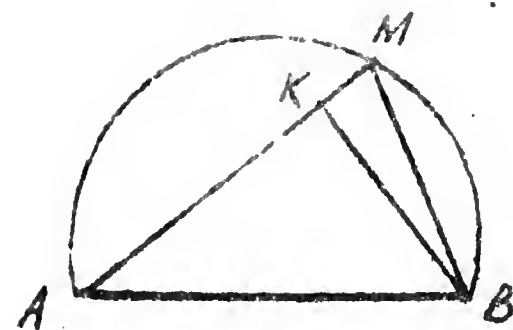


Покажем, что остальные точки верхней полуплоскости не принадлежат нашему множеству. Пусть точка K лежит внутри круга. Продолжим отрезок AK до пересечения с окружностью в точке M . Угол AKB — внешний угол для треугольника MKB , не смежный с углом KMB , поэтому $\angle AKB > \angle AMB = \varphi$. Проведите аналогичное рассуждение для точек, лежащих вне круга. \square

Часто более удобно использовать вместо Γ следующее геометрическое место.

Γ_x . Если две пересекающиеся прямые проходят: одна — через данную точку A , другая — через данную точку B , и равномерно вращаются вокруг этих точек так, что угол между ними остается постоянным, то точка M пересечения этих прямых описывает окружность.

\square Обозначим прямую AB через ℓ . Очевидно, что до тех пор, пока ни одна из двух вращающихся прямых не совпадает с ℓ , точка M перемещается по одну сторону от ℓ и угол AMB остается постоянным: $\angle AMB = \varphi$. Следовательно, точка описывает дугу окружности с концами в точках A и B , соответствующую углу φ . В тот момент, когда одна из прямых (например, AM) проходит при своем вращении положение ℓ , точка M совпадает с одной из



точек A или B (в данном случае, с B). а затем, при дальнейшем движении, точка M переходит в другую полуплоскость и одновременно угол AMB заменяется смежным: теперь $\angle AMB = \pi - \varphi$, так что в новой полуплоскости точка перемещается уже по дуге окружности, соответствующей вписанному углу $\pi - \varphi$. Легко видеть, что обе эти дуги вместе составляют одну окружность и что, когда прямые сделают полный оборот, точка M опишет всю эту окружность. \square

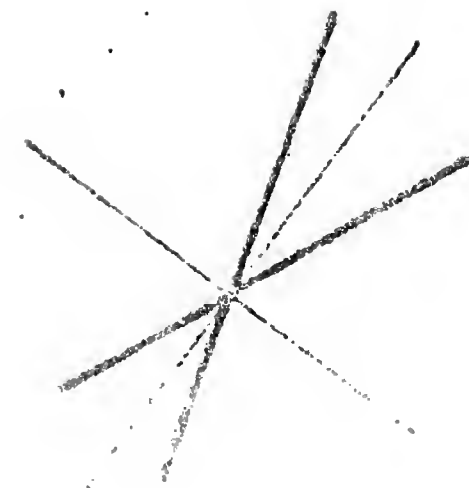
Если прямые вращаются с угловой скоростью ω , то точка их пересечения движется по своей окружности с угловой скоростью 2ω (?).

Попробуйте представить себе, как движется точка пересечения двух прямых, которые вращаются вокруг двух точек A и B с одинаковой угловой скоростью в разные стороны.

\square Множество точек, отношение расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равно k (k — некоторое положительное число), есть пара прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых.

\square Достаточно рассмотреть одну из четырех углов, на которые данные прямые делят плоскость. Остальные вытекают аналогично.

Одну точку искомого геометрического места можно найти легко: проведем прямую ℓ_1 , параллельную первой из данных прямых, на некотором расстоянии d от нее, и прямую ℓ_2 , параллельную второй прямой, на расстоянии d/k от нее. (На рисунке эти прямые показаны пунктиром). Точка их



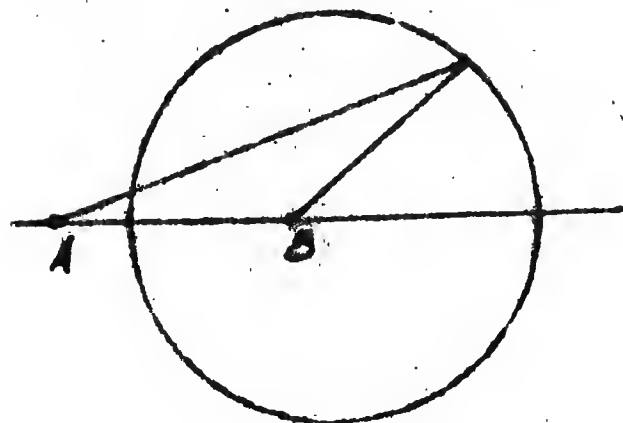
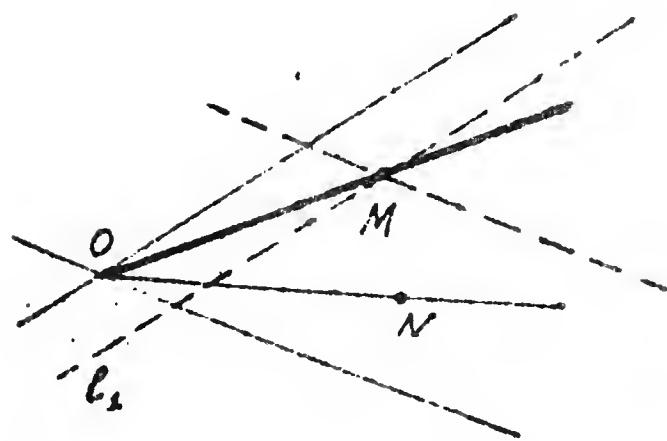
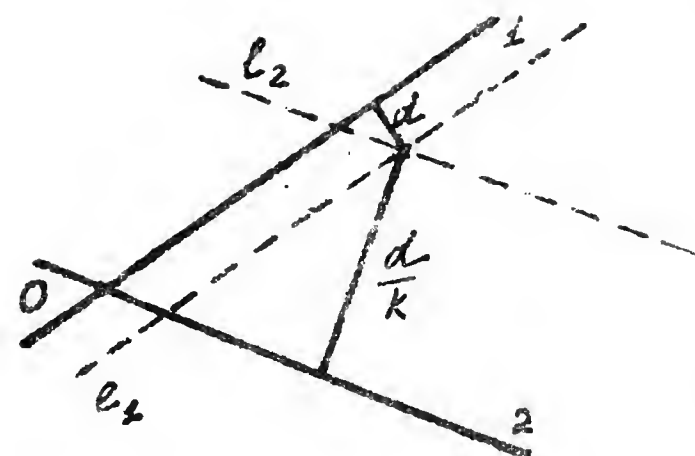
пересечения удовлетворяет требуемому условию: отношение её расстояний до данных прямых равно k ($k = d_1/d_2$).

Очевидно, что если условию удовлетворяет какая-либо точка M , то ему удовлетворяют и все точки луча OM (O — точка пересечения данных прямых). Действительно, если растянуть всю плоскость от точки O в несколько раз (или сжать её к точке O), то отношение расстояний от точки M до данных прямых не будет, очевидно, меняться. (Слово "очевидно" здесь нужно понимать в таком смысле: "легко доказать, используя подобие треугольников").

Итак, мы доказали, что искомому множеству принадлежит некоторый луч, выходящий из точки O . Но, может быть, есть еще какие-нибудь точки, принадлежащие нашему множеству — скажем, точка N . Тогда найдется еще целый луч ON , отличный от первого и принадлежащий искомому множеству. Но это невозможно, поскольку очевидно, что на пунктирной прямой l_1 лежит только одна точка искомого множества. \square

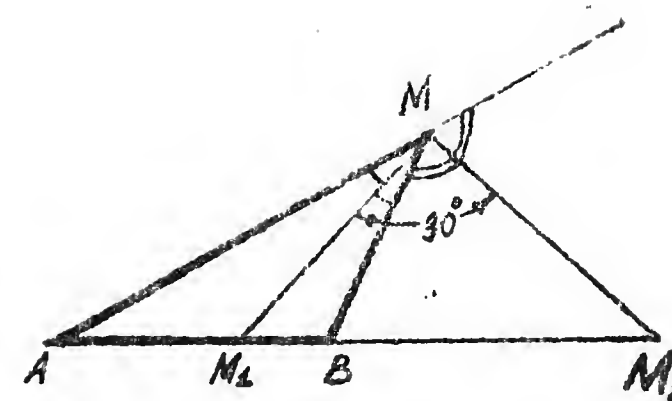
Е. Множество точек, отношение расстояний от которых до данных двух точек A и B равно k (k — некоторое положительное число, не равное 1), есть окружность. Пусть $AB = 2c$, тогда радиус этой окружности равен $2ck/(1-k^2)$, расстояние её центра до середины отрезка AB равно $c(1+k^2)/(1-k^2)$.

Эту задачу можно решить и аналитически.



Предлагаемое обычно геометрическое решение задачи опирается на следующую теорему из курса геометрии: биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине M треугольника AMB пересекают прямую AB в таких точках M_1 и M_2 , для которых

$$\frac{AM_1}{M_1B} = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{AM}{MB} \quad \langle ? \rangle$$



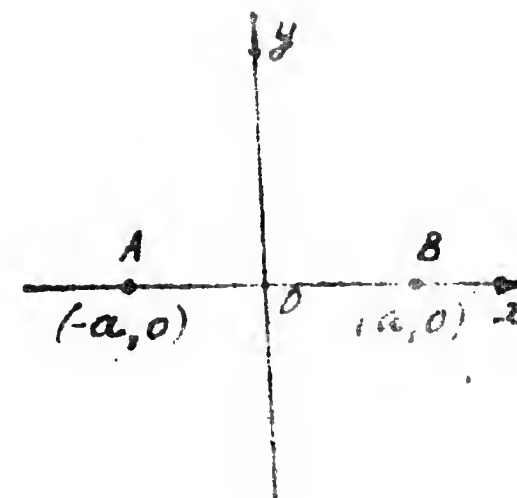
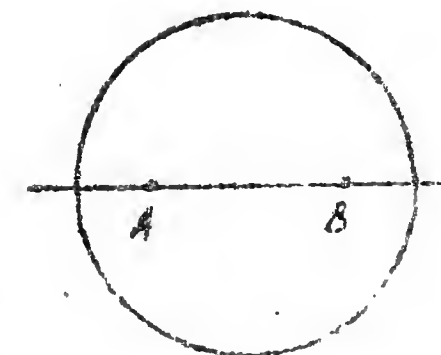
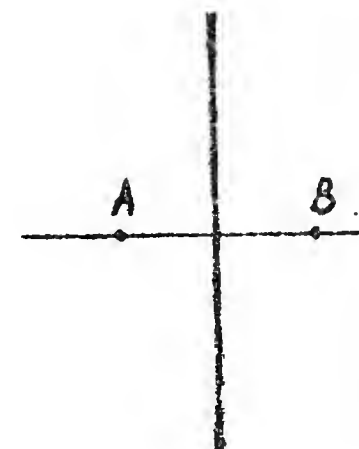
Ж. Множество точек на плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B равна постоянной величине c , есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB .

Пусть $AB = 2a$, тогда эта прямая проходит на расстоянии $|c/(4a)|$ от середины отрезка AB , причем ближе к A , если $c < 0$, и ближе к B , если $c > 0$.

Ж. Множество точек на плоскости, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B равна постоянной величине c , есть окружность радиуса $\sqrt{c-a^2}$ с центром в середине отрезка AB (если $c > a^2$), одна точка (если $c = a^2$), или пустое множество (если $c < a^2$); $a = AB/2$.

При доказательстве $Ж_1$ и $Ж_2$ удобно воспользоваться методом координат. Докажем, например, $Ж_1$.

Выберем систему координат так, чтобы данные точки A и B лежали на оси Ox симметрично относительно оси Oy . Пусть координаты этих точек: $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. Тогда множество точек $Ж_1$ задается уравнением:



$$[(x+a)^2 + y^2] - [(x-a)^2 + y^2] = c$$

или, после упрощений, $x = c/(4a)$. (7)

Докажите сами \mathcal{K}_+ .

И₊ Множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна постоянной величине c ($c > 0$), есть контур прямоугольника, диагонали которого лежат на данных прямых.

И₋ Множество точек, разность расстояний от которых до двух данных пересекающихся прямых равна по модулю постоянной величине c ($c > 0$), есть продолжения сторон прямоугольника (включая его вершины), диагонали которого лежат на данных прямых.

И₊ и **И₋** можно доказать алгебраически (здесь удобно принять за оси координат биссектрисы углов между данными прямыми для того, чтобы все формулы были симметричными, а затем воспользоваться формулой для расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой

$ax + by + c = 0$. Но проще доказать эти утверждения геометрически, причем достаточно, конечно, рассмотреть точки, лежащие в одном из углов, на которые данные прямые делят плоскость. Пространство от этого не страдает.

Рассмотрим, как из множества точек выбрать те, для которых расстояние до первой прямой больше расстояния до

второй на величину c .

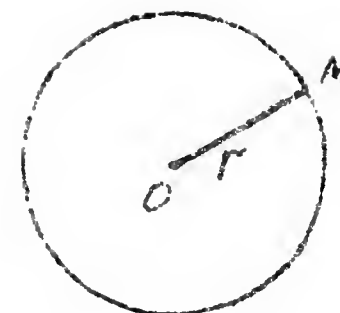
Покажем еще, как можно множества точек записывать коротко, в виде "формул". Условимся множество точек, удовлетворяющих какому-то условию, обозначать так: в фигурных скобках пишется сначала буква, которую мы используем для обозначения "произвольной точки" множества (у нас это, как правило, буква M , но это может быть и любая другая буква); затем ставится черта, а за ней пишется то условие, с помощью которого выделяется нужное нам множество точек. Например, множество точек из задачи I.17 запишется так:

$$\{M/S \text{ } \Delta AM = S \cdot \Delta CM\}$$

Это обозначение употребляется не только для множества точек, но и вообще для любых множеств (только иногда вместо черты ставят двоеточие). Например, $\{T/P(T) > 100\}$ можно прочесть так: множество всех теленей T , вес $P(T)$ которых больше 100 кг.

Условимся еще расстояние от точки K до точки L (до прямой ℓ) обозначать через $\rho(K, L)$ (соответственно $\rho(K, \ell)$). Тогда множества нашей азбуки запишутся так:

- А. $\{M | \rho(M, O) = r\}$,
- Б. $\{M | \rho(M, \ell_1) = \rho(M, \ell_2)\}$,
- В. $\{M | \rho(M, A) = \rho(M, B)\}$,
- Г. $\{M | \angle AMB = \varphi\}$,
- Д. $\{M | \rho(M, \ell_1) / \rho(M, \ell_2) = k\}$,
- Е. $\{M | \rho(M, A) / \rho(M, B) = k\}$.



M

A

B

$$\begin{aligned} \text{Ж}_- & \{M | \rho^2(M, A) - \rho^2(M, B) = c\}, \\ \text{Ж}_+ & \{M | \rho^2(M, A) + \rho^2(M, B) = c\}, \\ \text{И}_+ & \{M | \rho(M, \ell_1) + \rho(M, \ell_2) = c\}, \\ \text{И}_- & \{M | \rho(M, \ell_1) - \rho(M, \ell_2) = c\}. \end{aligned}$$

Итак, мы перечислили некоторые множества точек, определяемые простыми геометрическими условиями. Этот список, конечно, можно было бы продолжить или, наоборот, сократить. Мы включили в азбуку те геометрические места, которые часто будут нужны нам в этой книжке. Вместо того, чтобы каждый раз описывать то или иное множество точек, мы сможем просто написать одну букву: Г, Ж - и т.п.

Теперь укажем несколько задач, которые почти сразу приводят к одному из множеств А-И.

1.1. Найти множество центров окружностей, проходящих через две данные точки.

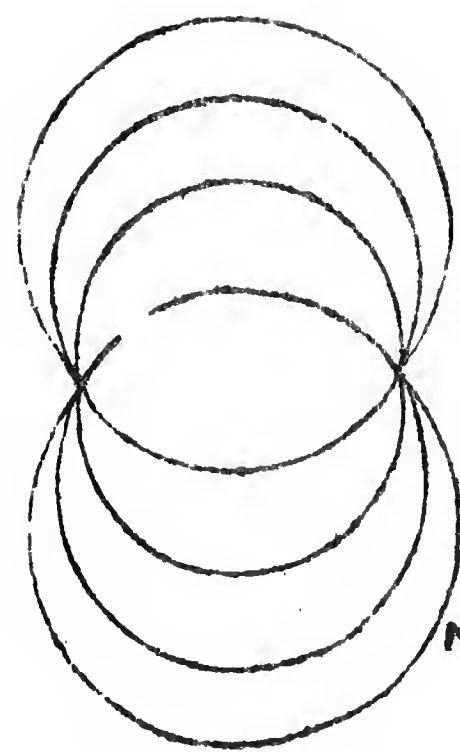
1.2. Найти множество центров окружностей, касающихся двух данных пересекающихся прямых.

1.3. Найти множество центров окружностей радиуса r , касающихся данной прямой.

1.4. Даны две точки А и В. Найти множество таких точек М, для которых площадь S_{AMB} треугольника АМВ равна данному числу $c > 0$.

1.5. Даны две точки А и В. Найти множество точек на плоскости, каждая из которых симметрична точке А относительно некоторой прямой, проходящей через точку В.

1.6. Даны две точки А и В. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из точки А на все-



N10

N10

N10

N10

N10

N10

возможные прямые, проходящие через точку В.

1.7а). На плоскости даны окружность и точка А. Найти множество середин отрезков АМ, где М - произвольная точка данной окружности.

б). Дан круг и точка вне его. Провести через эту точку секущую так, чтобы длина отрезка секущей вне окружности равнялась длине отрезка внутри нее.

1.8. Через точку пересечения двух данных окружностей провести прямую, на которой эти окружности высекают хорды равной длины.

1.9. Найти множество вершин С квадратов АВСD, у которых вершина А находится на данной прямой, а вершина В - в данной точке.

1.10. а) Где может находиться четвертая вершина квадрата, если две его вершины лежат на одной стороне данного острого угла, а третья - на другой?

б) Дан остроугольный треугольник АВС. Вписать в него квадрат, у которого две вершины лежат на стороне АВ.

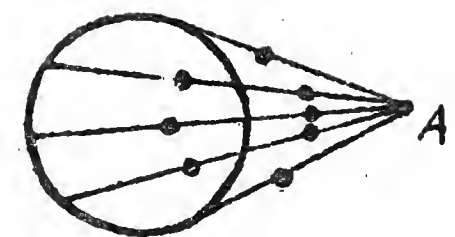
1.11. Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым и проходящую через данную точку, лежащую между прямыми.

1.12. Построить окружность данного радиуса r , касательную к данной прямой и данной окружности.

1.13. Даны две точки А и В. Найти множество точек М, для которых треугольник АМВ является:

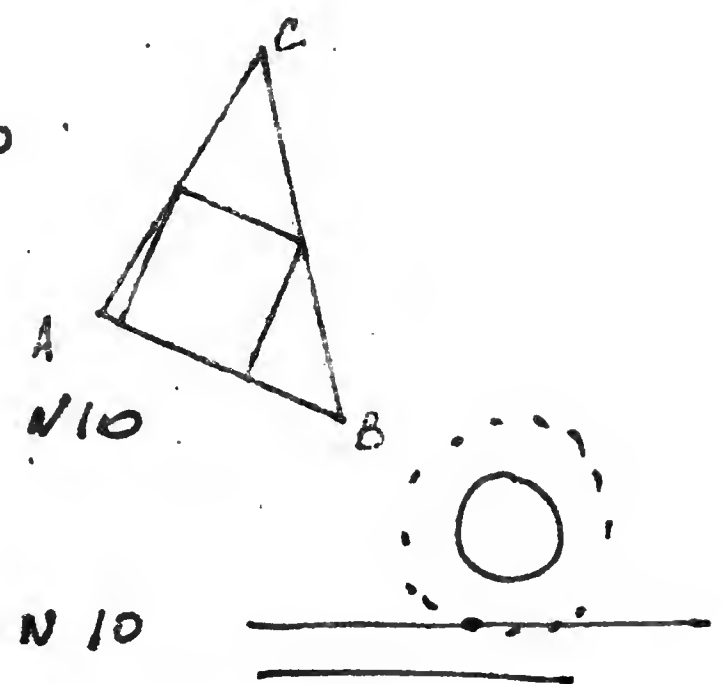
- прямоугольным,
- остроугольным,
- тупоугольным.

N10



N10

N10

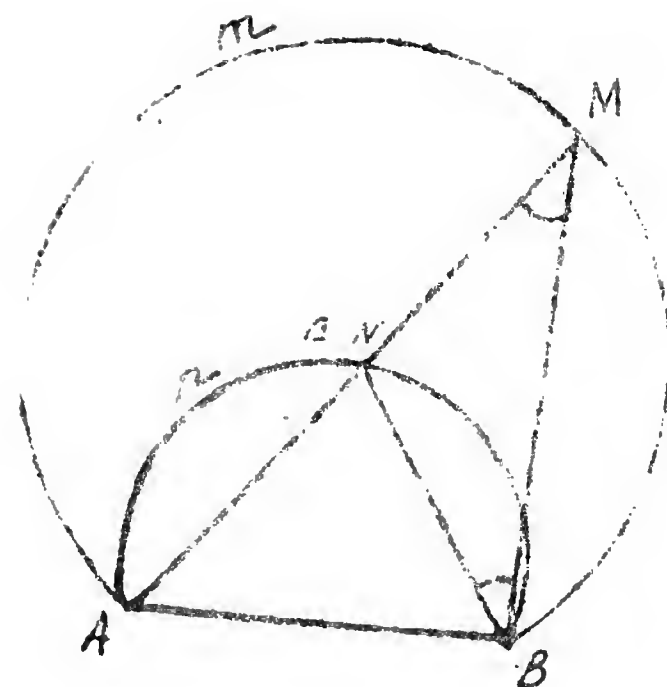


N10

N10

Теперь решим такую задачу.

На плоскости заданы окружности и две точки A и B на ней. Пусть N — произвольная точка на этой же окружности. На продолжении отрезка AN от точки N откладывается отрезок $NM = BN$. Найти множество точек M .



□ Пусть M — некоторая точка, построенная так, как указано в задаче. Соединим точки M и N отрезками с точкой B . По условию, $BN = NM$, поэтому $\angle NBM = \angle NMB$. Но так как $\angle ANB = \angle NBM + \angle NMB$, то $\angle AMB = \frac{\angle ANB}{2}$. Поскольку угол ANB

для всех точек N , лежащих на одной из дуг AB , один и тот же (см. 7), то угол AMB для всех соответствующих точек M постоянен, т.е. все эти точки лежат на дуге \widehat{AMB} , вмещающей угол, вдвое меньший, чем угол $ANB(7)$. Легко заметить, что центр дуги \widehat{AMB} лежит в точке C (на середине дуги AB данной окружности). Все ли точки дуги \widehat{AMB} мы получим? Нет, не все.

Заметим, что когда точка N пробегает дугу \widehat{AB} от точки B до точки A , хорда AN вращается вокруг точки A от прямой AB до касательной к данной окружности в точке A . Поэтому искомому множеству принадлежит только часть дуги \widehat{AMB} , а именно, дуга \widehat{EMB} (E — точка пересечения дуги \widehat{AMB} с касательной в точке A). При этом можно считать, что точка B принадлежит нашему множеству (она получается для того положения N , когда N совпадает с B).

и "длина отрезка NB равна 0"). Точка E , строго говоря, не принадлежит нашему множеству: когда точка N совпадает с точкой A , не имеет смысла говорить о направлении прямой AN .

Впрочем, когда точка N приближается к точке A , направление прямой AN приближается к направлению касательной. Если условиться, что вполне естественно, "в предельном положении", когда N совпадает с A , считать направление AN совпадающим с AE и отложить на нем отрезок NB , равный в этом случае AB , то получим как раз точку E .

Аналогично рассматриваются точки, лежащие по другую сторону от прямой AB .

Итак, искомое множество состоит из двух дуг $\widehat{E_1 m_1 B}$ и $\widehat{E_2 m_2 B}$. □

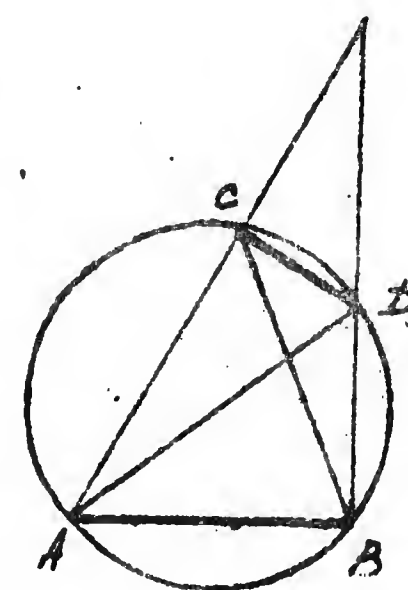
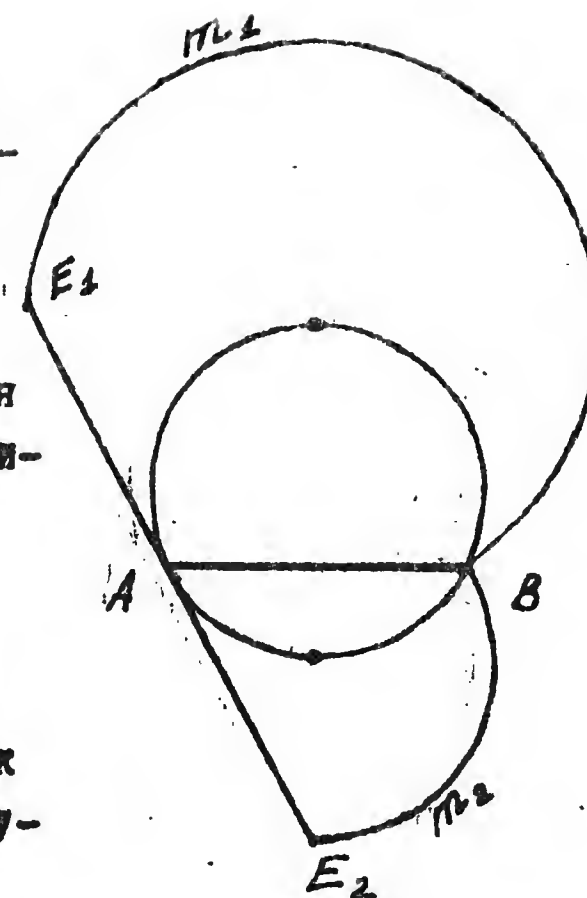
I.14. Рассмотрим всевозможные треугольники с данным основанием AB , угол при вершине которых равен φ . Найти множество:

- точек пересечения медиан;
- точек пересечения биссектрис;
- точек пересечения высот.

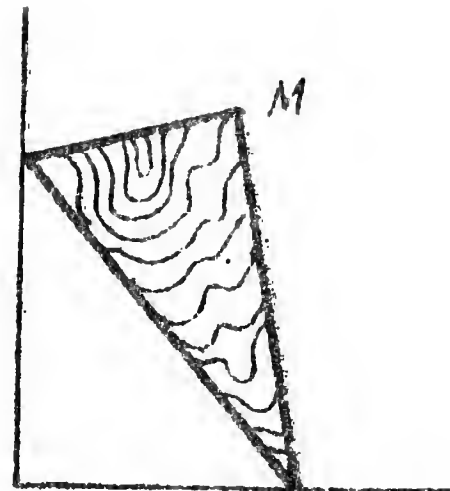
I.15. У данной окружности хорда AB закреплена, а хорда CD перемещается, не меняя своей длины. Найти множество точек пересечения прямых AD и BC , AC и BD .

I.16. Стороны OP и OQ прямоугольника $OPMQ$ лежат на сторонах прямого угла. Найти множество точек M при условии, что:

- длина диагонали PQ ;
- сумма длин сторон OP и OQ ;
- сумма квадратов длин сторон OP и OQ равна данной величине d .



I.17. На плоскости даны два отрезка AB и CD . Найти множество точек M на плоскости, для которых площади треугольников ABM и CDM равны.



I.18. Деревянный прямоугольный треугольник перемещается по плоскости так, что вершины его острых углов двигаются по двум сторонам данного прямого угла. Как будет двигаться вершина прямого угла этого треугольника?

I.19. Найти геометрическое место точек плоскости, из которых две данные непересекающиеся окружности видны под равными углами.

I.20. Найти геометрическое место точек плоскости, для которых касательные проведенные к двум данным окружностям, равны.

I.21. Дан квадрат $ABCD$.
Найти множество

$$\{M / S_{AMB} + S_{CMD} = S_{BMC} + S_{DMA}\}.$$

I.22. Найти множество центров окружностей, которые пересекают каждую из двух данных окружностей в диаметрально противоположных точках.

□ Пусть r_1 и r_2 — радиусы данных окружностей, x — радиус переменной окружности, O_1 , O_2 , M — центры этих трех окружностей. Тогда, поскольку переменная окружность пересекает каждую из данных в диаметрально противоположных точках,

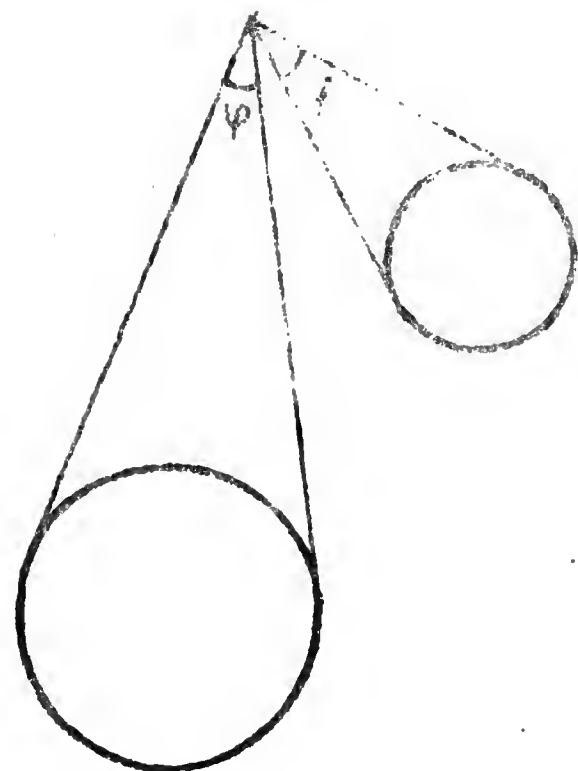
$$x^2 = MO_1^2 + r_1^2 = MO_2^2 + r_2^2$$

т.е. величина

$$MO_1^2 - MO_2^2 = r_2^2 - r_1^2$$

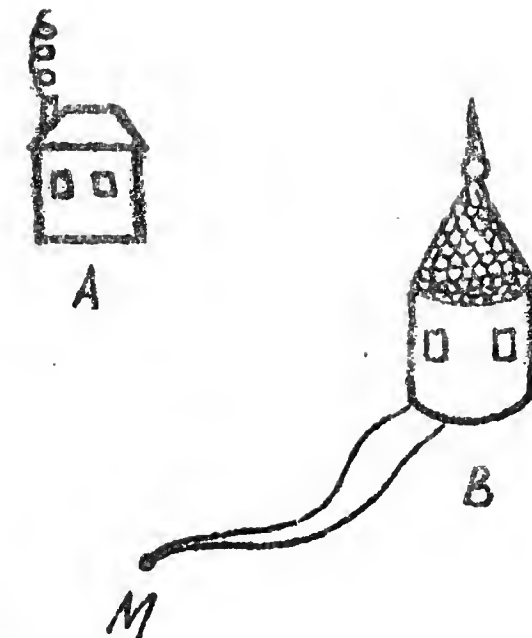
постоянна. Пусть $2O_1O_2 = d$.

Искомое множество, согласно \mathcal{H}_1 — прямая, перпендикулярная к отрезку O_1O_2 и проходящая на расстоянии $|r_2^2 - r_1^2|/d$ от его середины, ближе к центру большей



окружности. □

I.23. A и B два города. Найти множество точек M , обладающих следующим свойством: если идти напрямик из M в B , то расстояние до A будет все время увеличиваться.



I.24. Найти множество вершин прямоугольников $ABCD$, у которых вершина A лежит в данной точке, вершина B — на данной прямой и площадь равна данной величине S .

I.25. а) Дан квадрат. Найти множество точек плоскости, расстояние которых от центра квадрата меньше, чем от каждой из его вершин.

б) Дан квадрат $ABCD$. Найти множество точек, которые ближе к прямой AB , чем к прямым BC , CD и DA .

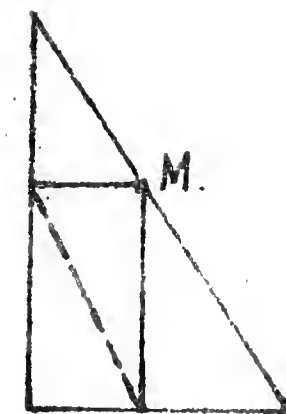
в) Дан квадрат со стороной a .
Найти множество центров окружностей радиуса $2a/3$, которые пересекают каждую сторону квадрата два раза.

I.26. а) На гипотенузе данного прямоугольного треугольника найти точку, для которой расстояние между её проекциями на катеты наименьшее.

б) На данной прямой найти точку M , так, чтобы расстояние между её проекциями на стороны данного угла было наименьшим. ↓

I.27. а) На плоскости даны четыре точки. Найти множество центров прямоугольников, образуемых четырьмя прямыми, проходящими соответственно через данные точки.

б) Найти множество центров правильных треугольников, образованных прямыми, проходящими через три данные точки.



Азбука в пространстве. Для многих геометрических мест на плоскости можно указать их аналоги в пространстве.

Например :

[А]. Множество точек в пространстве, расстояние от которых до данной точки O равно r , есть сфера радиуса r с центром в точке O .

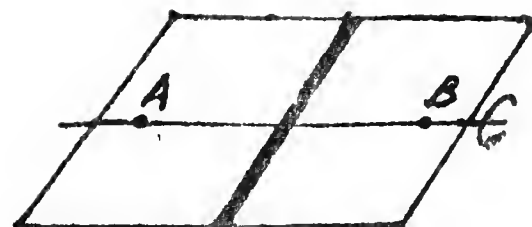
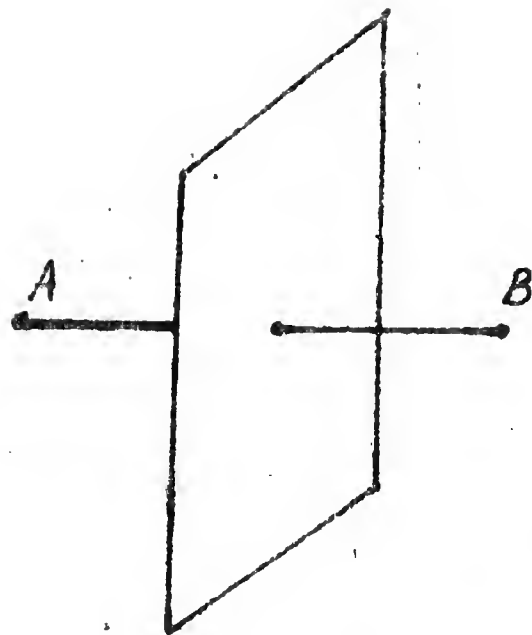
[Б]. Множество точек, одинаково удаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, есть пара взаимно перпендикулярных плоскостей, делящих пополам двугранные углы между данными плоскостями.

[В]. Множество точек, одинаково удаленных от двух данных точек A и B есть плоскость, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

Все эти утверждения нетрудно свести к соответствующим утверждениям для случая плоскости. Докажем, например, [В].

□ Проведем произвольную плоскость ρ через точки A и B . На этой плоскости искомому множеству, согласно [В], принадлежат те и только те точки, которые лежат на прямой, проходящей через середину отрезка и перпендикулярной к нему. Когда плоскость ρ занимает всевозможные положения, т.е. вращается вокруг прямой AB , точки построенных прямых заполняют плоскость, перпендикулярную к отрезку AB и проходящую через его середину, что и требовалось установить. □

Решите задачи I.1, I.4, I.5 в пространстве. Очевидно, в этих задачах прямая AB так же как и в [В], является осью вращения искомого множества. Поэтому достаточно найти это множество в какой-то одной плоскости, проходящей через



AB ; все множество в пространстве получается вращением найденного плоского множества вокруг прямой AB .

[Г]. Множество точек, равноудаленных от вершин треугольника — перпендикуляр к плоскости этого треугольника, проходящий через центр описанной около него окружности.

[Д]. Множество точек, равноудаленных от сторон треугольника — перпендикуляры к плоскости треугольника, проходящие через его центры вписанной и невписанных окружностей.

I.28. Найти множество точек в пространстве, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

I.29. Найти множество оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки

A на плоскости, проходящие :

- а) через данную точку B ,
- б) через данную прямую ℓ .

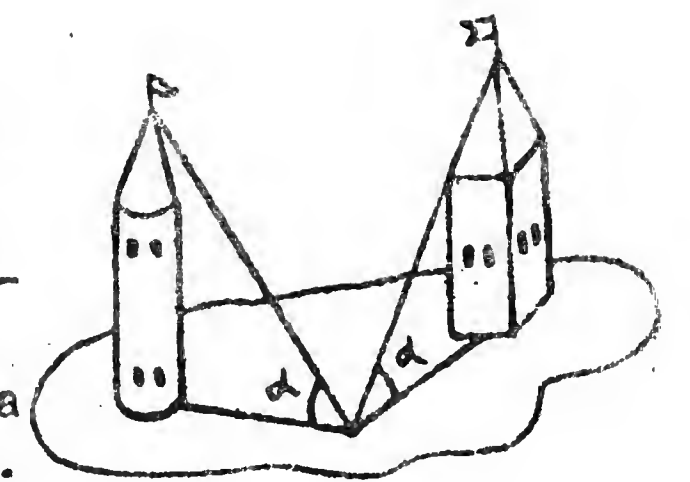
I.30. Найти геометрическое место центров кругов, по которым данная сфера пересекает плоскости, проходящие через данную прямую.

Очевидно, что это множество лежит в плоскости, проходящей через данную прямую и центр круга. В этой плоскости дело сводится к задаче I.29 б).

Это характерные примеры того, как решение пространственной задачи сводится к решению задачи на плоскости.

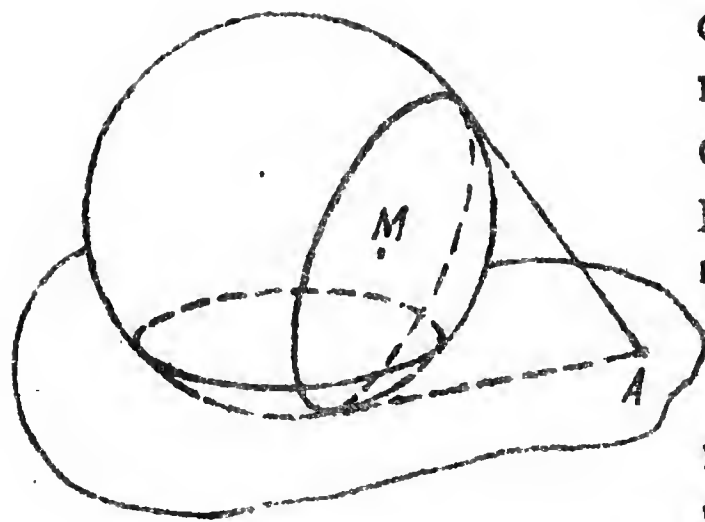
I.31. На данной горизонтальной плоскости найти множество точек, из которых две данные вертикальные башни, стоящие на этой плоскости, видны под равными углами.

I.32. Дана плоскость ρ и на ней точка A . Найти множество точек в пространстве, отношение расстояний от которых до плоскости ρ к расстоянию до точки A равно данному положительному



числу k . ↓

I.33. На плоскости заданы окружность и точка A . Через окружность проводится произвольная сфера и строится коническая поверхность с вершиной в точке A , которая касается этой сферы по некоторой окружности с центром M . Найти геометрическое место центров M . ↓

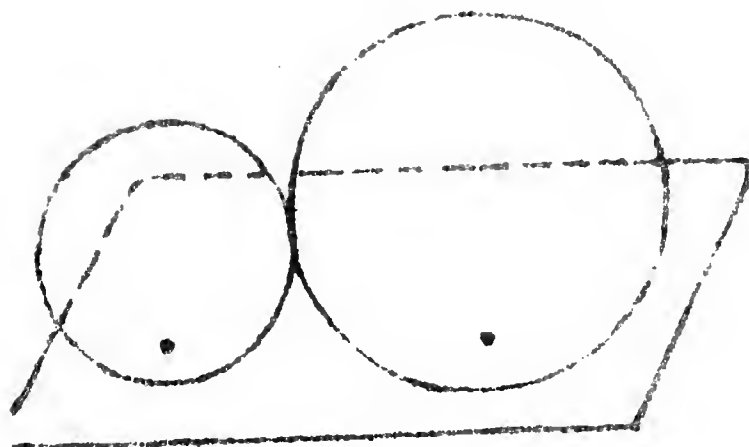


I.34. Даны две плоскости и точка A . Найти множество точек M , для которых прямая MA составляет с данными плоскостями равные углы. ↓

I.35. Найти множество точек, в которых сферы, проходящие через две данные точки A и B в пространстве, касаются данной плоскости. ↓

I.36. Найти множество середин отрезков, отсекаемых на прямых, проходящих через данную точку A , поверхностью прямого кругового цилиндра. ↓

I.37. На плоскости даны две непересекающиеся окружности. Через каждую из окружностей проводится по сфере так, чтобы эти сферы касались между собой в некоторой точке M . Найти геометрическое место точек M . ↓



Изменим условие задачи I.37, заменив окружностями точками.

I.38. На плоскости даны две точки A и B . Произвольным образом строятся две сферы так, что одна из них касается плоскости в точке A , другая в точке B , и они касаются между собой в точке M . Найти геометрическое место точек M .

I.39. На горизонтальной плоскости лежит сфера. Самая верхняя точка сферы — S . Начертим на сфере любую окружность и через каждую точку N этой

окружности проведем луч SN . Доказать, что множество точек пересечения этих лучей с горизонтальной плоскостью — прямая или окружность. *) ↓

I.40. Найти множество точек, лежащих внутри данного трехгранного угла и равноудаленных:

- от его граней;
- от его ребер.

§ 2. Задачи на построение.

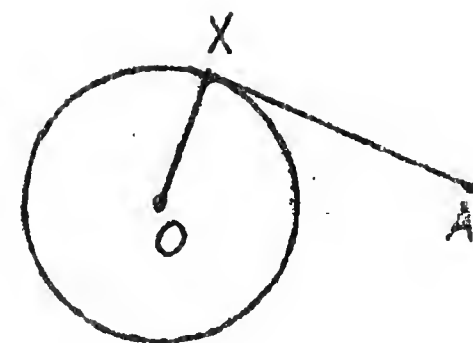
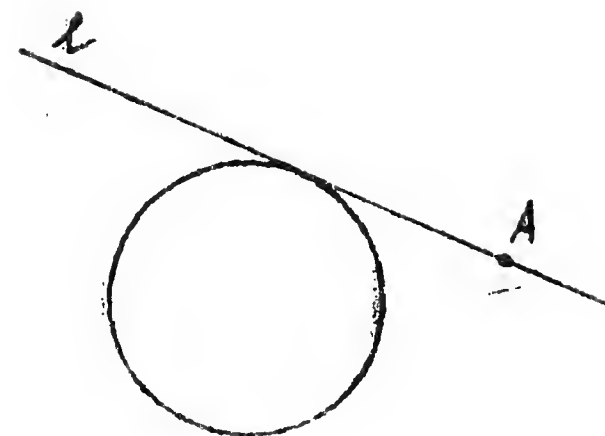
В классических задачах на построение ("построить треугольник", "отложить отрезок", "провести секущую", "найти точку") обычно имеется в виду, что построение нужно выполнить "циркулем и линейкой". Другими словами, мы можем проводить через любые две точки прямую, проводить окружность данного радиуса, а также находить точки пересечения проведенных линий.

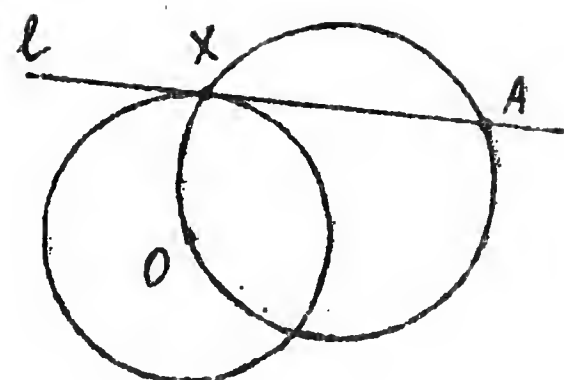
Для решения таких задач удобно представлять окружности и прямые, как множества точек, удовлетворяющих некоторому условию.

2.1. Дана окружность и вне её точка A . Провести через точку A прямую ℓ , касательную к данной окружности.

□ Если X — точка касания прямой ℓ с окружностью, то угол OXA — прямой. Множество точек M , для которых угол OMA прямой, — это, как мы знаем, окружность с диаметром OA .

*) Преобразование сферы на плоскости, о котором идет речь в этой задаче (точке N сферы ставится в соответствие точка пересечения луча SN с плоскостью), называется стереографической проекцией.

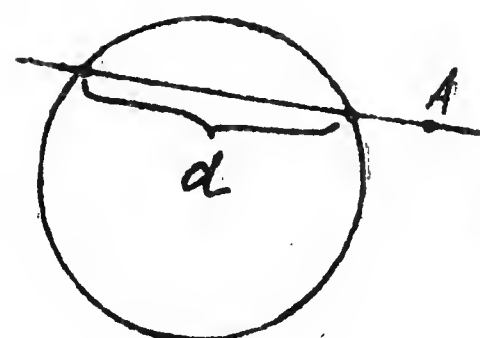




Таким образом, построение прямой l можно выполнить так. Проведем окружность, имеющую отрезок OA диаметром.

Найдем точку X пересечения этой окружности с данной (таких точек - две, они симметричны относительно прямой OA). Затем через точки A и X проведем прямую l . \square

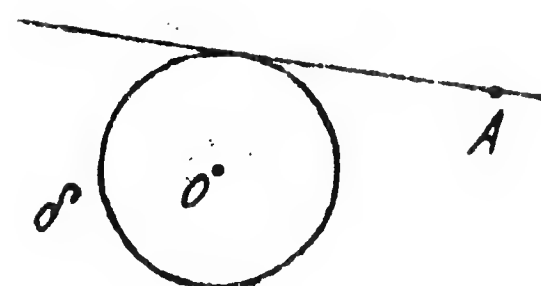
2.2. Даны точка A и окружность. Провести через точку A прямую так, чтобы хорда, отсекаемая окружностью на этой прямой, имела данную длину d .



\square Рассмотрим множество всех прямых, на которых окружность отсекает хорду d . Эти прямые - касательные к одной определенной окружности O' , центр которой совпадает с центром O данной окружности, а радиус равен $\sqrt{r^2 - d^2/4}$,

где r - радиус данной окружности (?). Таким образом, задача сводится к предыдущей: провести касательную через точку A к окружности O' с центром O .

Задача имеет два решения, если точка A лежит вне окружности O' , одно - если на окружности O' , и ни одного - если внутри окружности O' . \square



Часто искомое множество удается получить из известного множества некоторым простым преобразованием: поворотом, симметрией, параллельным переносом или гомотетией. (Этот прием особенно полезен в задачах на построение). Напомним, как построить образ прямой и окружности при перемещении или преобразовании подобия.

Для прямой достаточно построить две точки A' и B' - образы некоторых ее точек A и B - и провести через точки A' и B' прямую.

Для окружности радиуса r достаточно построить точку O' - образ ее центра и провести окружность с центром O' того же радиуса kr (если k - коэффициент подобия).

Приведем типичные примеры задач, где используются преобразования (в данном случае - перемещения).

2.3. Дана точка A и окружность. Найти множество вершин M равнобедренных треугольников ANM , у которых вершина N лежит на данной окружности.

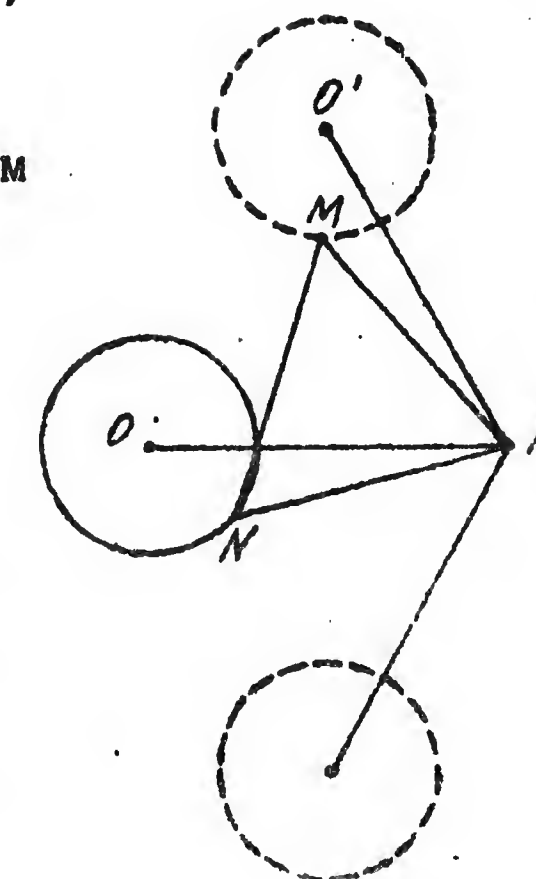
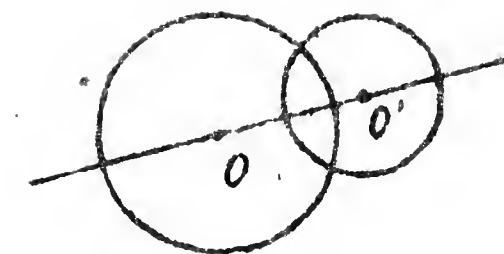
\square Пусть N - какая-нибудь точка данной окружности. Если мы повернем отрезок AN на 60° относительно точки A , то точка N попадет в вершину M равнобедренного треугольника ANM . Отсюда сразу видно, что если мы повернем окружность как жесткую фигуру относительно точки A на 60° , то каждая ее точка N перейдет в соответствующую ей третью вершину M равнобедренного треугольника ANM .

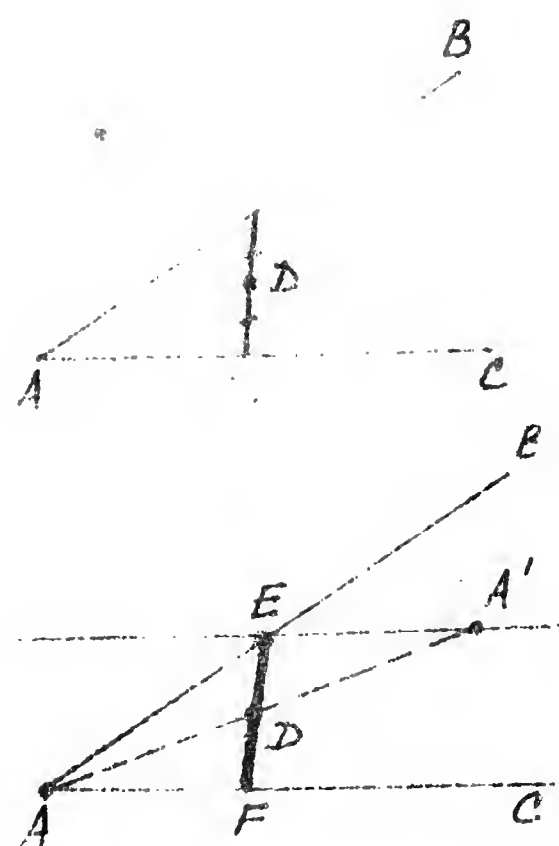
Таким образом, все точки M лежат на одной из двух окружностей, получающихся из данной поворотом на 60° по и против часовой стрелки относительно точки A .

Точно так же можно показать, что каждая точка M из объединения двух полученных окружностей является вершиной некоторого равнобедренного треугольника ANM . \square

2.4. Дан угол и внутри него точка D . Построить отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в точке D .

\square Рассмотрим множество отрезков, у которых один конец лежит на стороне AC данного угла (с вершиной A);





а середина находится в данной точке D . Вторые концы этих отрезков принадлежат, очевидно, лучу, симметричному стороне AC угла относительно точки D .

Построение сводится к следующему: отмечаем точку A' , симметричную точке A относительно D , проводим через A' прямую, параллельную прямой AC , до пересечения в точке E с прямой AB , и получаем нужный отрезок EF с серединой в точке D . Задача всегда имеет единственное решение. \square

Любопытно, что это построение решает следующую задачу.

2.5. Дан угол и внутри него точка D . Провести через точку D прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей возможной площади.

\square Докажем, что искомая прямая — как раз та прямая EF , которую мы построили в предыдущей задаче, т.е. та, для которой отрезок, отсекаемый сторонами угла, делится точкой D пополам.

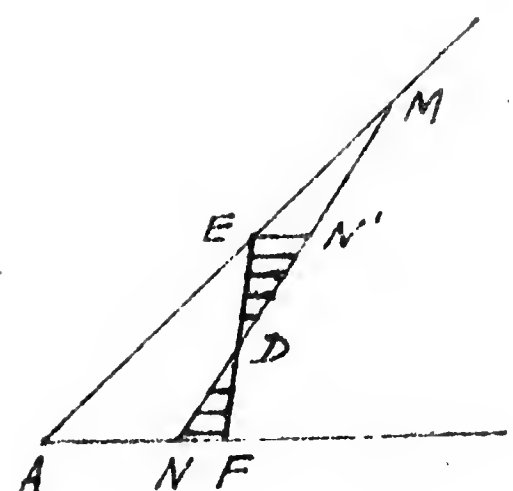
Проведем через точку D прямую, MM' отличную от EF , и докажем, что

$$S_{MAN} > S_{EAF} \quad (1)$$

Можно считать, что точка M на стороне AB расположена дальше от вершины угла A , чем E (тот случай, когда M лежит ближе к A , чем E , рассматривается аналогично — стороны AB и AC меняются ролями). Достаточно убедиться, что

$$S_{EDM} > S_{FDN} \quad (2)$$

— отсюда сразу будет следовать неравенство (1). Но неравенство (2) очевидно,



потому что треугольник EDM целиком содержит треугольник EDN' , симметричный треугольнику FDN относительно точки D . \square

2.7. Постройте сечение куба плоскостью, перпендикулярной диагонали BD' и проходящей через её середину.

\square Легко найти на ребрах куба точки, равноудаленные от точек B и D' .

Например, середина K ребра $B'C'$, очевидно обладает этим свойством (см. рис. 1), т.к. $KD' = KB$ (это следует из равенства треугольников $BB'K$ и $CC'D'$). На рисунке 2 мы отметили шесть таких точек — это середины соответствующих ребер.

Согласно утверждению А), все эти точки лежат в плоскости, перпендикулярной диагонали BD' и проходящей через её середину. Соединяя эти точки, мы получаем нужное сечение куба (см. рис. 3). \square

2.8. Дан угол и внутри него точка. Построить отрезок с концами на сторонах данного угла, середина которого находилась бы в данной точке. \downarrow

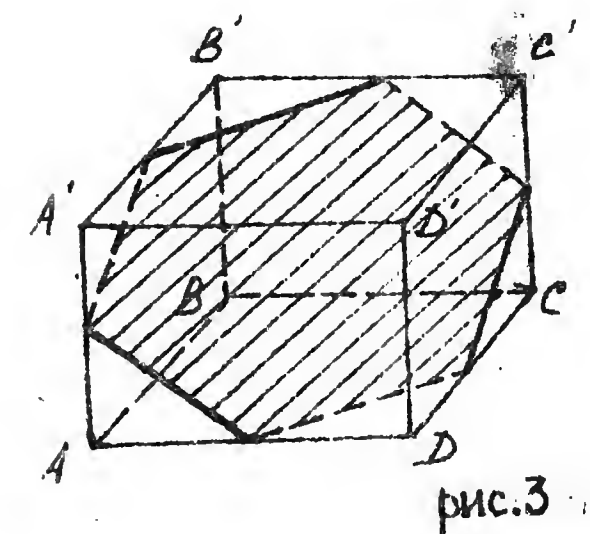
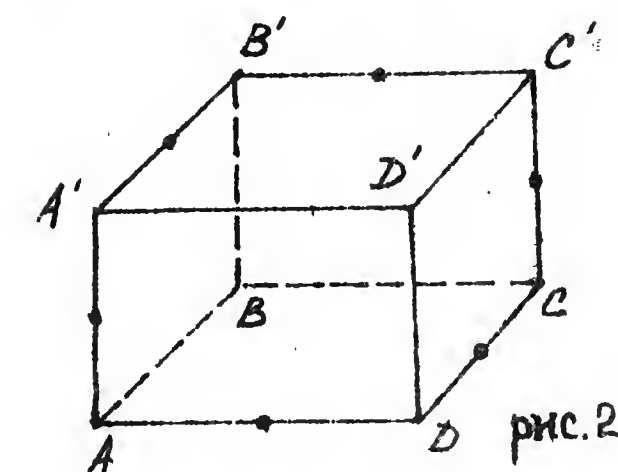
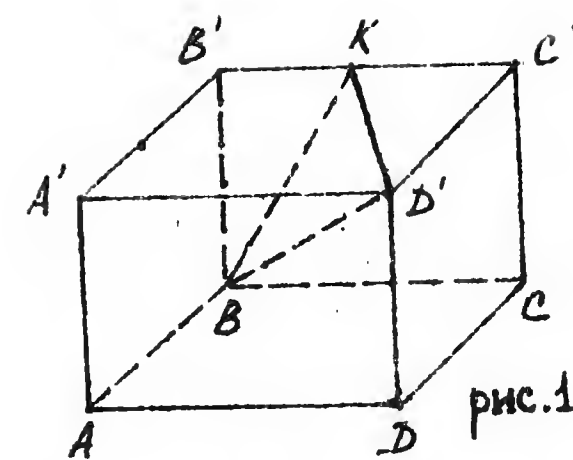
2.9. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах.

2.10. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и радиусу вписанной окружности. \downarrow

2.11. Построить треугольник по основанию, периметру и углу при вершине.

2.12. На данной прямой лежат точки A, B, C, D . Построить на плоскости точку, из которой отрезки AB, BC и CD видны под одним и тем же углом. \downarrow

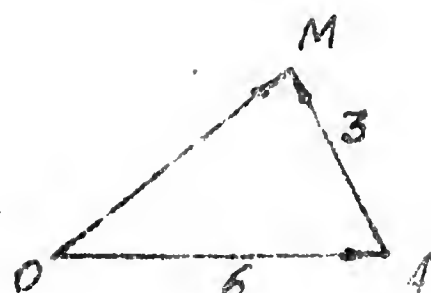
2.13. Построить равносторонний треугольник, у которого одна вершина лежит в данной точке, а вторая — на данной прямой, а третья — на



данной окружности. ↓

§ 3. Минимум и максимум

Этот параграф начинается с совсем простых задач, в которых требуется найти ^{какое} наибольшее или наименьшее значение может принимать та или иная величина, и заканчивается сложными исследовательскими задачами. Задачи на максимум и минимум можно, как правило, свести к исследованию некоторой функции, заданной аналитически. Но здесь мы собрали в основном такие задачи, где геометрические соображения позволяют быстрее достичь цели. Вы увидите, как при решении подобных задач используются различные множества точек.

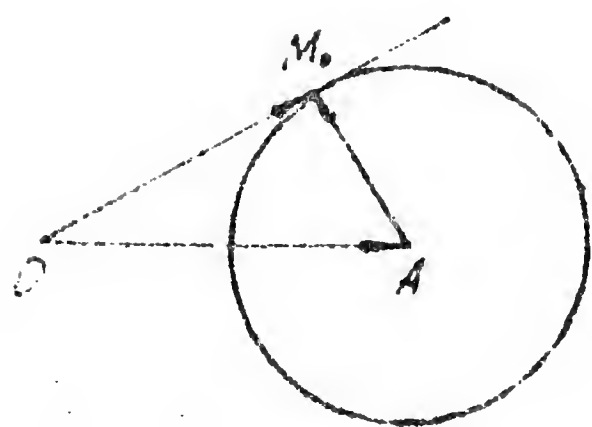


3.1. Под каким углом к берегу нужно направить лодку, чтобы за время переправы через реку её как можно меньше снесло течением, если скорость течения 6 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде — 3 км/ч?

□ Ответ: под углом 60° .

Нам нужно направить лодку так, чтобы её абсолютная скорость (скорость относительно берегов) составляла возможно больший угол с берегом (?) (см. рисунок). Пусть вектор \vec{OA} — скорость течения реки, \vec{AM} — скорость лодки относительно воды. Сумма $\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OM}$ дает нам абсолютную скорость лодки (скорость относительно берегов).

Длина вектора \vec{AM} равна 3, и мы можем направить этот вектор в любую сторону. Множество возможных положений точки M — окружность радиуса 3 с центром в точке A. Ясно, что из всех векторов \vec{OM} наибольший угол с берегом состав-



ляет \vec{OM}_0 , направленный по касательной к окружности.

Мы получаем прямоугольный треугольник, у которого катет вдвое меньше гипотенузы. У такого треугольника угол равен 60° . □

3.2. Из треугольников с $\hat{A} = \varphi$ и данным основанием BC выбрать треугольник с наибольшим радиусом вписанной окружности.

□ Рассмотрим точки A, лежащие по одну сторону от прямой BC, для которых $\hat{BAC} = \varphi$. Множество центров окружностей, вписанных в треугольники ABC — дуга окружности с концами B и C (?).

Очевидно, что наибольший радиус вписанной окружности будет у равнобедренного треугольника. □

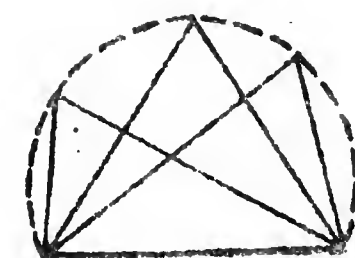
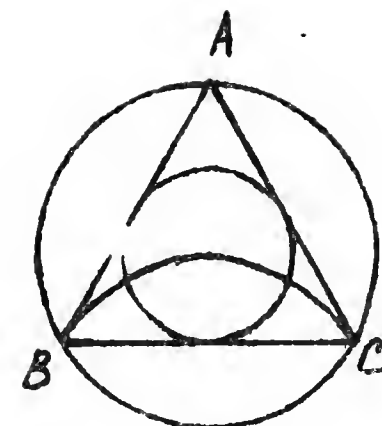
3.3. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине выбрать треугольник наибольшей площади.

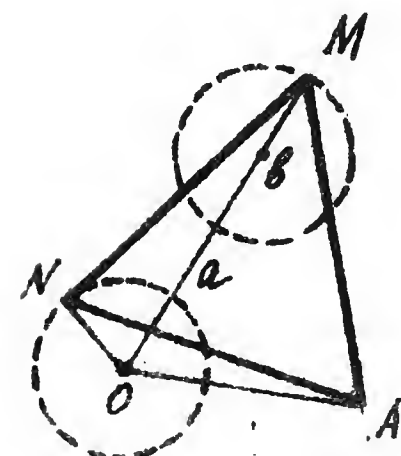
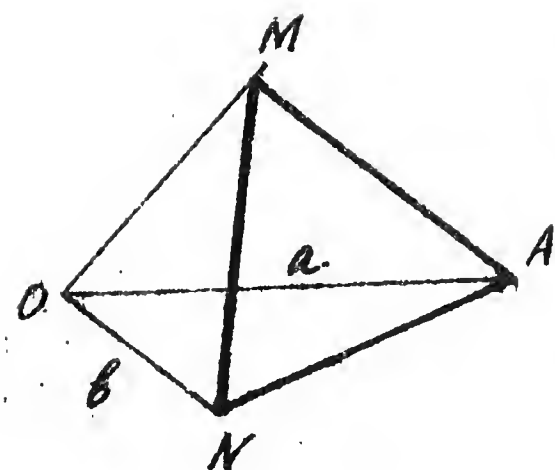
3.4. По двум взаимно перпендикулярным дорогам идут два пешехода, один — со скоростью u , другой — со скоростью v . Когда первый пересекал дорогу второго, тому оставалось идти до пересечения еще d километров. На каком наименьшем расстоянии будут находиться пешеходы? ↓

3.5. Через деревню A, окруженную со всех сторон лугами, проходит одна прямая дорога. Человек может идти по дороге со скоростью 5 км/ч, по лугу — 2 км/ч (в любом направлении).

Какой маршрут должен выбрать человек, чтобы как можно быстрее попасть из деревни A к избушке B, находящейся на расстоянии 13 км от деревни и на расстоянии 5 км от дороги?

3.6. Даны две пересекающиеся окружности. Провести через точку A их пересе-





чения прямую так, чтобы расстояние между точками её пересечения (отличными от A) с окружностями было наибольшим.†

3.7. На плоскости задана точка O . Требуется, чтобы одна вершина равностороннего треугольника находилась от точки O на расстоянии a , вторая — на расстоянии b . На каком наибольшем расстоянии от O может находиться третья его вершина?

□ Ответ: $a+b$. Пусть AMN — равносторонний треугольник, для которого $|OA|=a$, $|ON|=b$. Чтобы ответить на вопрос, поставленный в задаче, можно рассматривать только треугольники с вершиной в фиксированной, закреплённой точке A : ведь при повороте треугольника как жёсткого целого вокруг точки O никакие расстояния не меняются. Итак, мы считаем, что точка A — фиксированная точка на расстоянии a от точки O , а N пробегает окружность радиуса b с центром O . Какое положение может занимать точка M ? Ответ такой: M лежит на окружности, полученной из данной поворотом на 60° вокруг точки A I). Центр O' повернутой окружности, очевидно, лежит на расстоянии a от точки O (ведь $\triangle OOA'$ равносторонний). Радиус повернутой окружности, как и данной, равен b . Следовательно, наибольшее расстояние от O до третьей вершины M равно $a+b$. □

I) Можно взять любую из окружностей, полученных поворотом по и против часовой стрелки, — они будут находиться на одинаковом расстоянии от O .

Из этой задачи вытекает такое любопытное следствие: расстояние от любой точки плоскости до одной вершины равностороннего треугольника не больше, чем сумма расстояний от неё до двух других вершин.

3.8. На каком наибольшем расстоянии от точки O может находиться вершина M квадрата $AKMN$, если известно, что:

- $|OA|=|ON|=1$;
- $|OA|=a$, $|ON|=b$?



3.9. Из всех треугольников с данными основанием и данным углом при вершине выбрать треугольник наибольшего периметра.†

Где поставить точку?

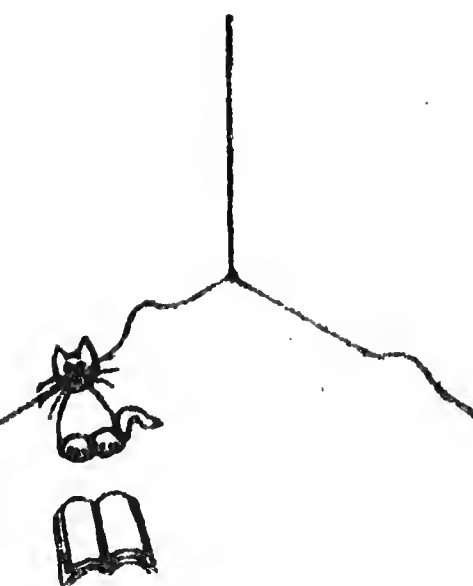
3.10. У мышки три выхода из норки в известных кошке точках A , B , C . Где должна сидеть кошка, чтобы расстояние от неё до самого далекого из трех выходов было как можно меньше?

□ Рассмотрим круги одного и того же радиуса r с центрами в точках A , B и C . Требуемая точка K — положение кошки — определяется так. Надо найти наименьший радиус r_0 , при котором эти круги имеют общую точку — это есть нужная точка K . В самом деле, если M — другая точка, то она лежит вне одного из кругов, и поэтому её расстояние от одной из вершин больше r_0 .

В случае остроугольного треугольника ABC , точка K — центр описанной окружности, а в случае прямоугольного или тупоугольного треугольника ABC точка K — середина наибольшей стороны. □

□ Точку K можно найти также следующим образом. Рассмотрим круг наименьшего радиуса, содержащий все три точки. Тогда точка K — его центр. □

Приведем еще один подход к решению



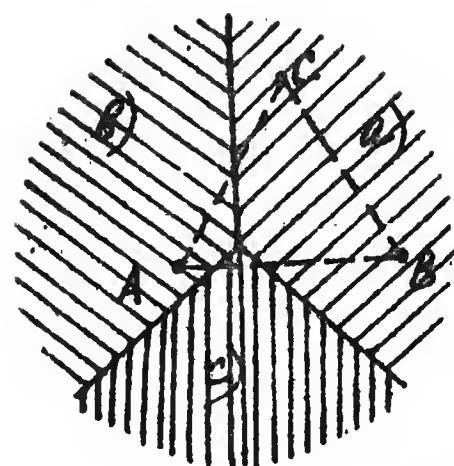
задачи 3.10.

□ Разобьем плоскость на три множества:

$$a) \{M: |MA| \geq |MB| \text{ и } |MA| \geq |MC|\},$$

$$b) \{M: |MB| \geq |MA| \text{ и } |MB| \geq |MC|\},$$

$$c) \{M: |MC| \geq |MB| \text{ и } |MC| \geq |MA|\}.$$



Это — три угла, стороны которых лежат на медиатрисах сторон треугольника ABC . Если кошка M находится в угле $a)$, то самой далекой от нее вершиной будет A , если в угле $b)$, — то B , если в угле $c)$ — то C .

Если треугольник ABC остроугольный, то в каждом из трех случаев кошке выгоднее всего сидеть в вершине соответствующего угла ($a)$, $b)$ или $c)$), т.е. она должна сидеть в центре описанной окружности.

Если треугольник ABC прямоугольный или тупоугольный, то, очевидно, кошке выгоднее всего сидеть в середине большей стороны треугольника. □

3.11. На участке леса, ограниченном тремя прямолинейными железными дорогами, живет медведь. В какой точке леса он должен построить берлогу, чтобы расстояние от неё до ближайшей дороги было как можно больше?

3.12. а) В круглом озере живут три крокодила. Где они должны сидеть, чтобы наибольшее из расстояний от любой точки озера до ближайшего к ней крокодила было как можно меньше?

б) Та же задача для четырех крокодилов.

Задача про катер.

3.13. На маленьком острове O стоит прожектор, луч которого освещает отрезок поверхности моря длины $a = 1$ км. Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси, делая один оборот за промежуток времени $T = 1$ мин. Катер, который может двигаться со скоростью v , должен незаметно (не попав в луч прожектора) подойти к острову. При каком наименьшем значении v это возможно?

□ Назовем круг радиуса a , который освещает прожектор, "кругом обнаружения". Ясно, что катеру выгоднее всего войти в этот круг в такой точке A , которую только что прошел луч прожектора.

Если катер будет плыть по прямой к острову, он достигнет острова через время a/v ; чтобы луч прожектора его за это время не настиг, нужно, чтобы луч за это время не успел сделать полный оборот, т.е. чтобы выполнялось неравенство

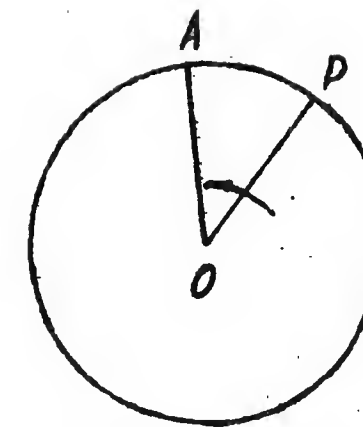
$$a/v < T, \text{ откуда}$$

$$v > a/T = 60 \text{ км/ч.}$$

Таким образом, мы доказали, что при $v > 60$ км/час катер сможет достичь острова незамеченным. Но, конечно, ниоткуда не следует, что 60 км/час — наименьшее значение скорости катера, при которой это возможно, т.е. что идти по отрезку AO — самое лучшее, что может выбрать капитан катера.

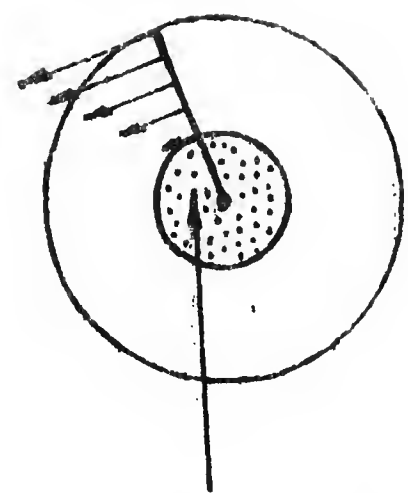
В действительности дело обстоит, как мы увидим, совсем не так I).

I) Прежде чем читать решение дальше, постарайтесь придумать какой-нибудь путь катера, по которому он может пробраться на остров при меньшем значении v .

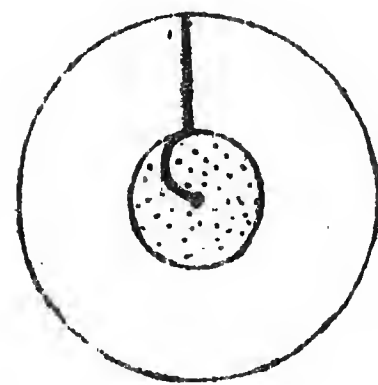


КРУГ ОБНАРУЖЕНИЯ

Заметим, что линейные скорости, с которыми движутся разные точки луча OP прожектора, различны: чем ближе расположена точка к центру O , тем её скорость меньше. Угловая скорость луча равна $2\pi/T$. По окружности радиуса $r = vT/2\pi$ катер может спокойно двигаться перед лучом, так как скорость катера здесь равна линейной скорости соответствующей точки луча. Вне круга радиуса r с центром O скорость луча больше, а внутри этого круга (мы назовем его "кругом безопасности") скорость луча меньше v .



КРУГ БЕЗОПАСНОСТИ



Если катеру удалось беспрепятственно добраться до какой-нибудь точки круга безопасности, дальше он заведомо сможет незаметно достичь острова. Один из возможных путей внутри круга безопасности — окружность радиуса $r/2$: если катер K будет двигаться по этой окружности со скоростью v , то отрезок KO будет вращаться вокруг O с той же угловой скоростью, с какой двигался бы катер по окружности радиуса r , т.е. с той же, что и луч прожектора (?).

, поэтому катер не будет настигнут этим лучом.

Таким образом, основная цель катера — достичь круга безопасности!

Если катер будет плыть до круга безопасности напрямик по радиусу AO , а дальше — перед лучом прожектора, то он сможет выполнить свою задачу при

$$v > \frac{1}{1 + (1/2\pi)} \frac{a}{T} \approx 0,862 \frac{a}{T} = 51,7 \text{ км/ч.}$$

Мы сумели несколько улучшить нашу прежнюю оценку для скорости катера. Но, оказывается, и это еще не предел!

Найдем теперь наименьшее значение скорости v , при которой катер сможет незаметно подойти к острову.

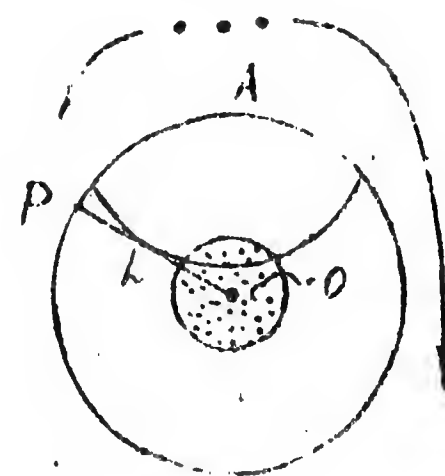
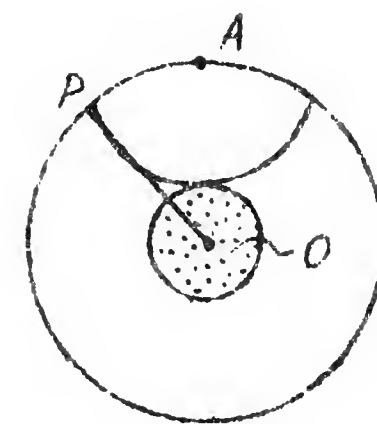
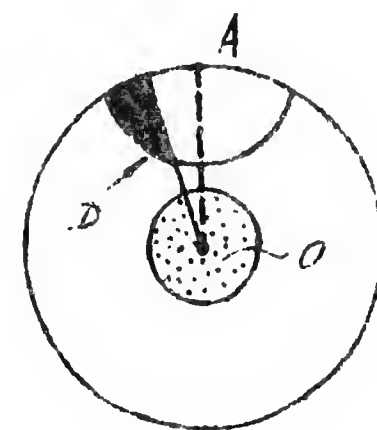
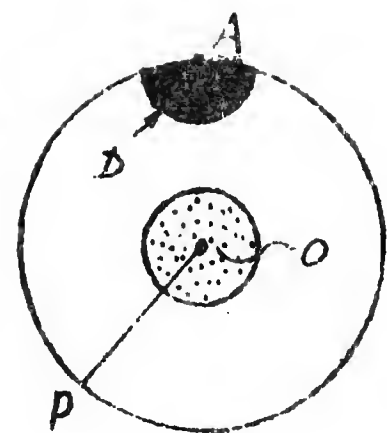
Множество точек круга обнаружения, которых может достичь катер за время t — область, ограниченная дугой радиуса vt . Среди этих точек те, в которые катер может попасть незамеченным, находятся слева от луча OP .

Обозначим множество этих "достижимых" точек через D . На рисунках показано, как меняется это множество с течением времени до тех пор, пока... Тут возможны два случая.

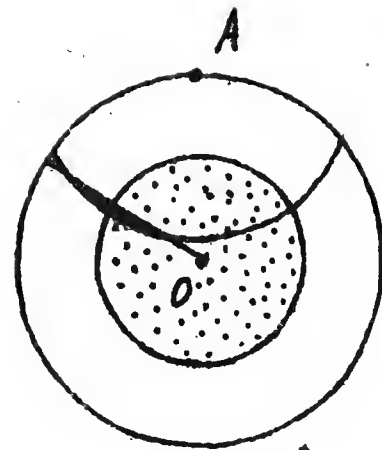
1) Если скорость v недостаточно велика, то в некоторый момент времени t множество D , не дойдя до круга безопасности, совсем пропадает: это будет означать, что за время t катер заведомо будет замечен, т.е. что при этом значении скорости катер не сможет пробраться к острову. Заметим, что в последний момент $t = t_0$ луч OP касается дуги радиуса vt_0 с центром A в некоторой точке L . Точка L расположена заведомо вне круга безопасности (иначе катер смог бы добраться до острова), причем, чем больше скорость v тем больше время обнаружения t_0 и тем ближе к острову находится точка L .

2) Если скорость v больше некоторого значения v_0 , то множество D в некоторый момент времени достигает круга безопасности. Это означает, что при $v > v_0$ катер сможет пробраться на остров.

Минимальное значение скорости соответствует, как нетрудно видеть, тому случаю, когда луч OP успевает коснуться дуги радиуса vt_0 как раз в точке N , лежащей на окружности круга безопасности. Чтобы найти значение v_0 обозначим величину угла NOA через β и воспользуемся следующими



равенствами



$$|NO| = r = \frac{v_0 T}{2\pi}, \quad |AN| = v_0 t_0,$$

$$\frac{|AN|}{|NO|} = \operatorname{tg} \beta, \quad \frac{2\pi + \beta}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{2\pi}{T},$$

$$|NO| = a \cos \beta.$$

Из первого и последнего равенства находим, что

$$v_0 = (2\pi \cos \beta) / T,$$

а из первых четырех равенств получаем уравнение для β :

$$2\pi + \beta = \operatorname{tg} \beta$$

Это уравнение можно решить только приближенно, например, с помощью таблиц; β получается примерно равным $0,92\pi/2$, откуда

$$v_0 \approx 0,8 a / T \approx 48 \text{ км/ч}$$

При значении скорости, большем v_0 , катер сможет достичь круга безопасности. □

3.14. а) Сын плавает в центре круглого бассейна. Отец, который стоит на краю бассейна, не умеет плавать, но бежит в четыре раза быстрее, чем плавает сын. Сын бежит быстрее отца. Сын хочет убежать. Сможет ли он это сделать?

б) При каком отношении скоростей v и u (v — скорость, с которой плавает сын, u — скорость, с которой бежит отец) сын не сможет убежать?



§ 4. Линии уровня

В этом параграфе обсуждаются задачи и теоремы предыдущих параграфов, только в новой терминологии. Понятия, с которыми мы здесь познакомимся, — функции на плоскости и их линии уровня — особенно полезны при решении задач на минимум и максимум.

Задача про автобус

4.1. По прямолинейному шоссе идет экскурсионный автобус. В стороне от шоссе, под некоторым углом к нему, расположен дворец. В какой точке шоссе должен остановиться автобус, чтобы экскурсанты могли лучше всего рассмотреть из автобуса фасад дворца?

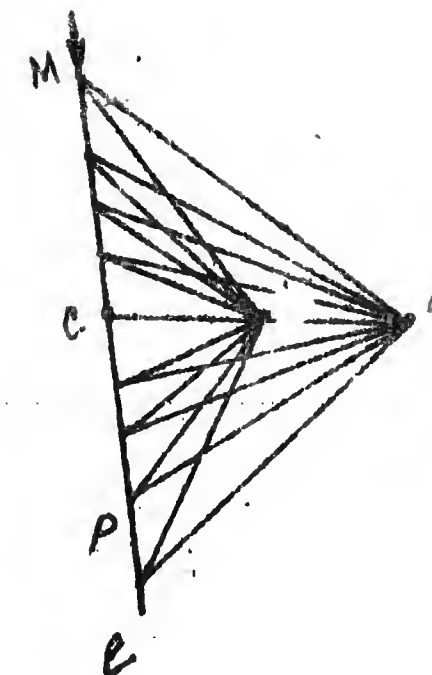
В математической постановке эта задача выглядит так.

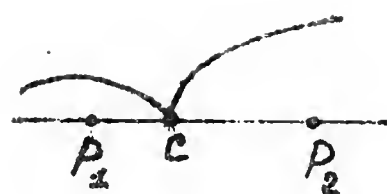
Дана прямая ℓ и не пересекающий её отрезок AB . Найти на прямой ℓ такую точку P , для которой угол APB имеет наибольшую возможную величину.

Сначала посмотрим, как примерно изменяется угол AMB , когда точка M движется по прямой ℓ . Другими словами: как ведет себя функция f , которая каждой точке M прямой ℓ ставит в соответствие величину угла AMB .

Легко приблизительно построить график этой функции. (Напомним, что график строится так: над каждой точкой M нашей прямой берется точка на расстоянии, равном $f(M) = \angle AMB$).

Можно решать задачу аналитически: ввести координаты на прямой ℓ , выразить величину угла AMB через x —





координату точки M — и найти, при каком значении x полученная функция достигает максимума. Однако формула для $f(x)$ получается довольно сложная.

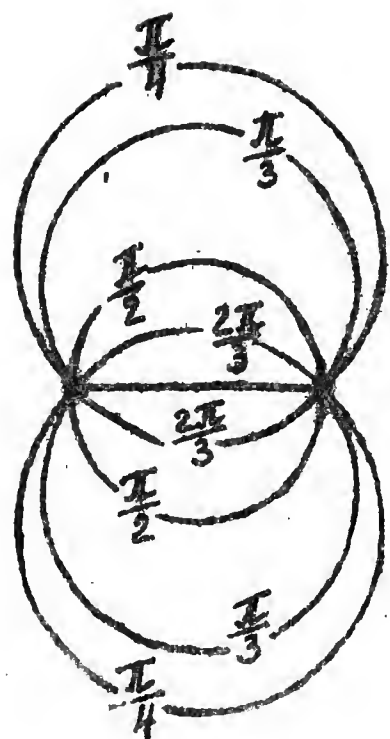
Мы дадим более элементарное и более поучительное решение. Но для этого потребуется изучить, как зависит величина угла AMB от положения точки M на всей плоскости (а не только на прямой ℓ).

□ Множеством точек M плоскости, для которых угол AMB имеет заданную величину φ , является пара симметричных дуг с концами в точках A и B . Если начертить эти дуги для различных значений φ ($0 < \varphi < \pi$), то получится семейство дуг, которые покрывают всю плоскость, за исключением прямой AB . На рисунке изображено несколько таких дуг, и на каждой написано, какому значению φ она соответствует. Например, значению $\varphi = \pi/2$ соответствует окружность с диаметром AB .

Будем теперь рассматривать только точки M , лежащие на прямой ℓ . Нам нужно выбрать из них такую, для которой угол AMB имеет наибольшую величину. Через каждую точку проходит какая-нибудь одна дуга из нашего семейства: если $\widehat{AMB} = \varphi$, то точка M лежит на дуге, соответствующей этому значению φ . Таким образом, задача сводится к тому, чтобы из всех дуг, задевающих прямую ℓ , выбрать ту, которая соответствует наибольшему значению

$$\widehat{AMB} = \varphi.$$

Рассмотрим часть прямой ℓ по одну сторону от точки C пересечения прямой AB с ℓ . (Мы не будем разбирать случай, когда отрезок AB параллелен



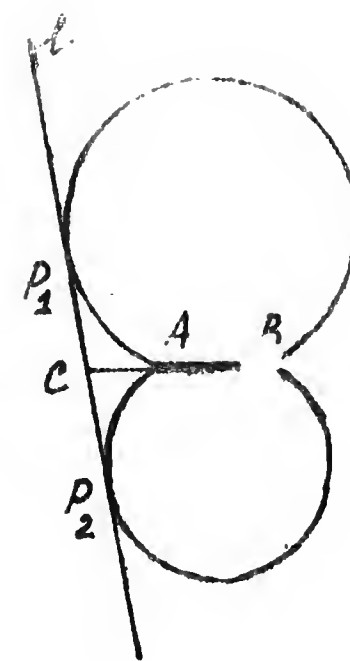
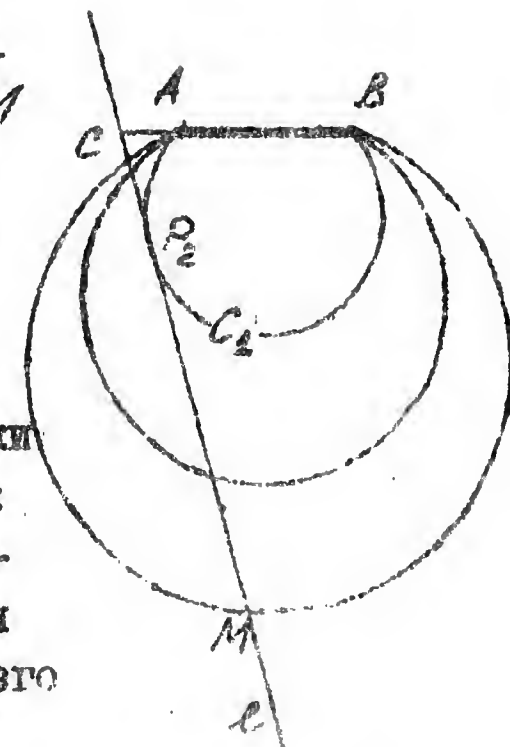
прямой ℓ . Рассмотрим этот случай сами). Проведем дугу c_1 , касающуюся этой части прямой, и докажем, что из точки касания P_1 отрезок AB виден под наибольшим углом. Действительно, любая точка M прямой ℓ , отличная от P_1 лежит вне сегмента, стягиваемого дугой c_1 . Как мы знаем, отсюда следует, что $\widehat{AMB} < \widehat{AP_1B}$.

Ясно, что по другую сторону от точки C все будет происходить точно так же: точка P_2 , из которой отрезок AB виден под наибольшим углом, также является точкой касания прямой и одной из дуг нашего семейства.

Итак, мы доказали, что требуемая в задаче точка P совпадает с одной из точек P_1 и P_2 , в которых окружности, проходящие через точки A и B , касаются прямой ℓ . В качестве P нужно выбрать ту из них, для которой угол PCA острый. Если же отрезок AB перпендикулярен к прямой ℓ , то из соображений симметрии сразу видно, что точки P_1 и P_2 совершенно равноправны: так что требуемых в задаче точек в этом случае две. (однако экскурсанты в любом случае должны выбрать ту из точек P_1 и P_2 , из которой виден фасад дворца). □

Функции на плоскости. Основная идея решения задачи 4.1 — исследовать на всей плоскости функцию f , которая каждой точке ставит в соответствие величину угла \widehat{AMB} , т.е. $f(M) = \widehat{AMB}$.

В предыдущих параграфах мы, по сути дела, уже встречались с различными функциями. Помимо самых простых функций на плоскости, таких, как $f(M) = |OM|$, $f(M) = \rho(\ell, M)$, $f(M) = \widehat{ABM}$.

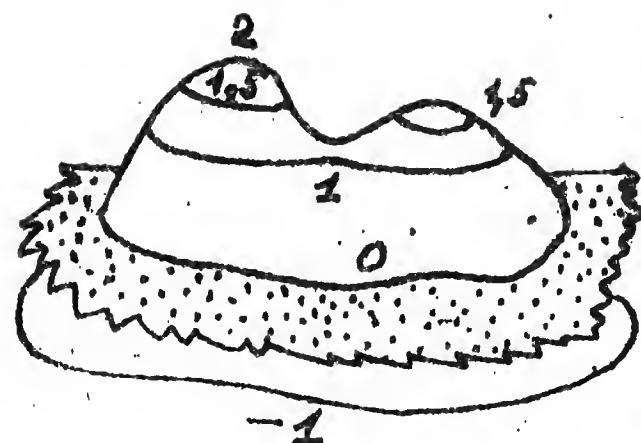


(где O, A, B - данные точки, а ℓ - данная прямая), мы изучали суммы, разности, отношения таких функций и другие их комбинации.

Линии уровня. Большую часть условий, которыми определялись множества точек, можно представить так. На плоскости (или на некоторой её области) задана функция f и требуется найти множество точек M , в которых эта функция принимает заданное значение h , т.е. $\{M: f(M)=h\}$.

Как правило, для каждого фиксированного числа h , это множество - некоторая линия; таким образом, плоскость расслаивается на линии, которые называются линиями уровня функции f . Так, решая задачу 4.1, мы рисовали линии уровня функции $f(M) = \widehat{AMB}$.

График функции. Объясним теперь, откуда взялся термин "линия уровня". Дело в том, что для функций, заданных на плоскости, можно строить графики точно так же, как это делается для функций $y=f(x)$, заданных на прямой, только теперь график нужно будет строить в пространстве. Будем считать, что плоскость, на которой задана наша функция f , горизонтальна, и для каждой точки M этой плоскости отметим точку, расположенную над точкой M на расстоянии $|f(M)|$, если $f(M) > 0$ и под точкой M на расстоянии $|f(M)|$, если $f(M) < 0$; все отмеченные таким образом точки образуют обычно некоторую поверхность, которая и называется графиком функции f . Другими словами, если ввести на горизонтальной плоскости систему координат Oxy и направить ось Oz вертикально вверх, то гра-



фиком функции будет множество точек с координатами $(x; y; z)$, где $z = f(M)$, а $(x; y)$ - координаты точки M на плоскости. (Если функция определена не во всех точках плоскости, а только в некоторой области, то график будет расположен только над точками этой области определения).

Так вот, линия уровня $\{M: f(M)=h\}$ состоит, очевидно, из тех точек M , над которыми точки графика расположены "на одном уровне" - на высоте h .

Ниже мы изобразили графики функций, линиями уровня которых являются множества азбуки. Так, мы видим, что график функции $f(M) = \widehat{AMB}$ представляет собой "горный хребет" высотой π над отрезком AB , с которого график плавно опускается до нуля. (Напомним, что в самом начале решения задачи 4.1 мы строили график этой функции, но только над некоторой прямой ℓ).

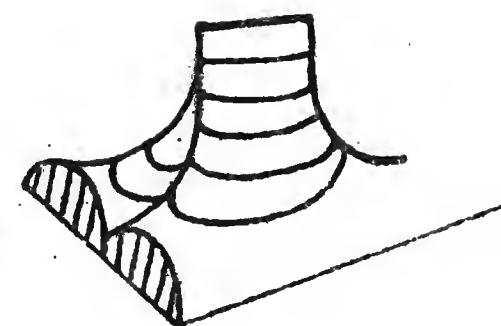
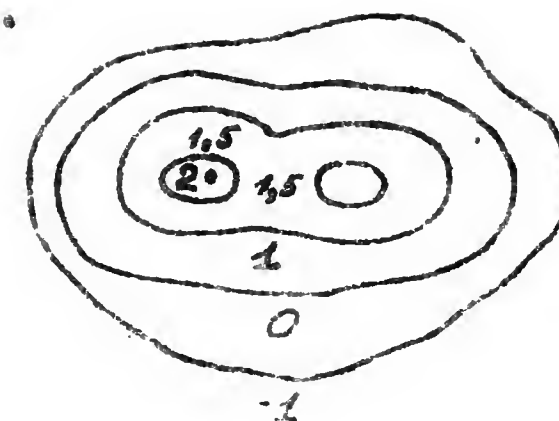
Функция f вида $f(M) = \lambda_1 \rho(M, \ell_1) + \lambda_2 \rho(M, \ell_2) + \dots + \lambda_n \rho(M, \ell_n)$,

в каждом из кусков Q , на которые прямые $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ делят плоскость, записывается линейным выражением

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Таким образом, её график будет состоять из кусков плоскостей - наклонных или (если $a = b = 0$) горизонтальных. Это мы видим на примерах множеств из пунктов B, H азбуки.

Линии уровня такой функции состоят из кусков прямых; а если у графика есть



горизонтальная площадка - некоторая линия уровня содержит целый кусок Q плоскости.

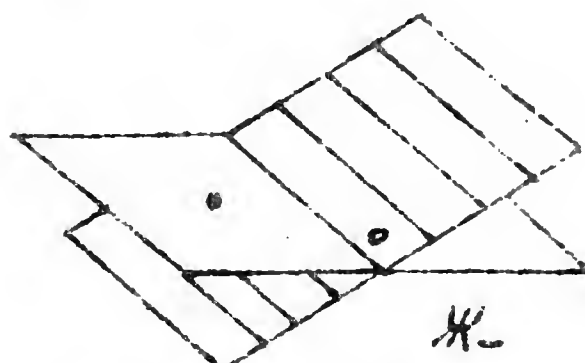
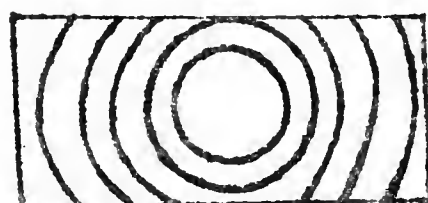
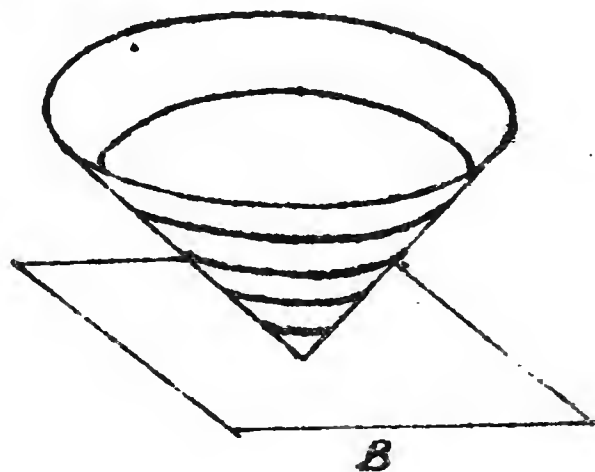
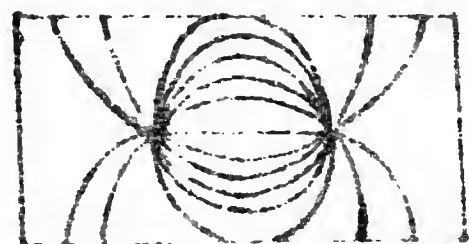
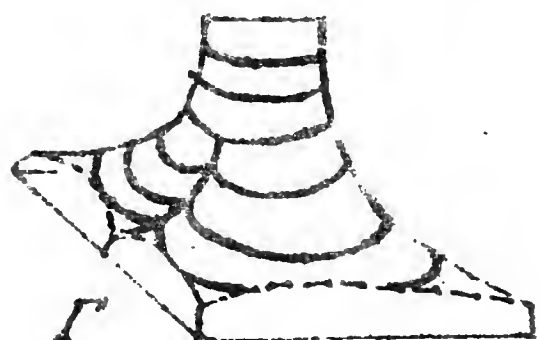
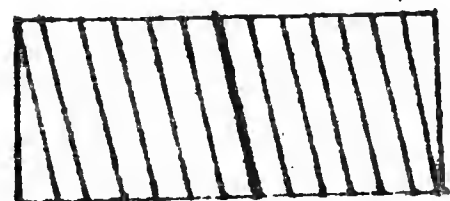
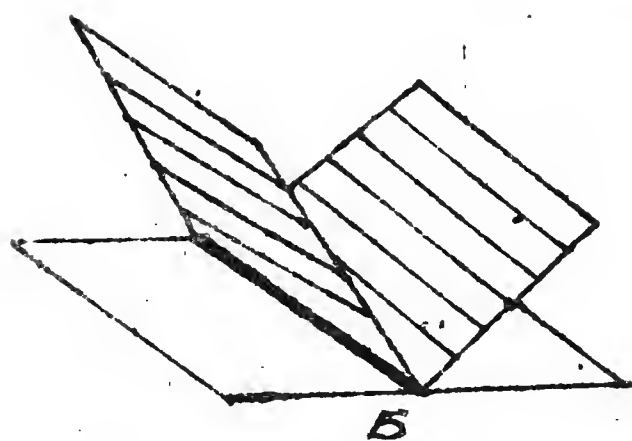
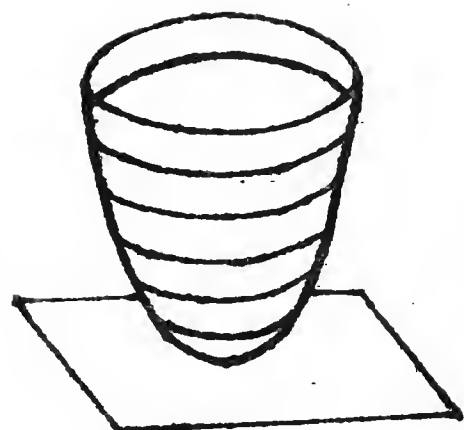
Функция f вида

$$f(M) = \lambda_1 / MA_1^2 + \lambda_2 / MA_2^2 + \dots + \lambda_n / MA_n^2$$

при $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$ тоже сводится к линейной функции на всей плоскости (пример $Ж$), а в общем случае при $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$ к функции вида

$$f(M) = d / MA^2,$$

где A - некоторая точка плоскости. Линии её уровня - окружности, а график - поверхность параболоида вращения.



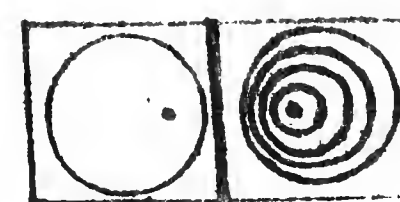
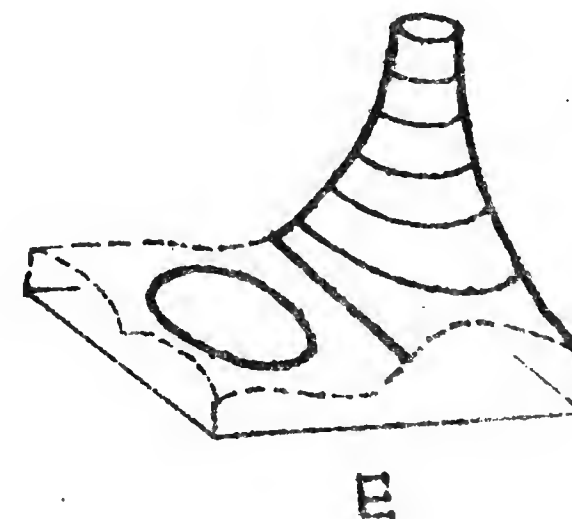
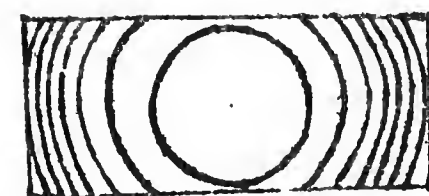
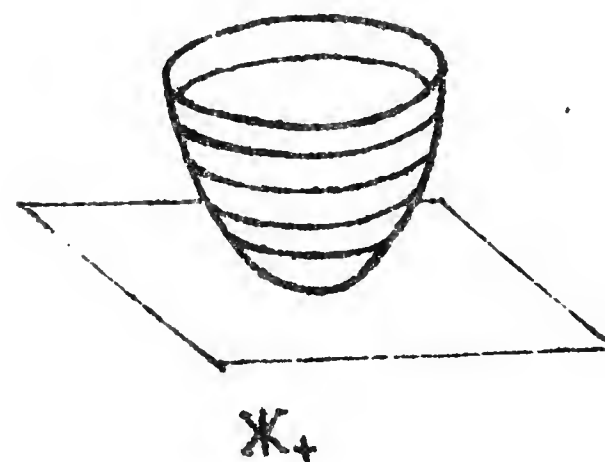
Здесь нарисованы графики функций, соответствующих пунктам азбуки, и под каждый из них - карта линий уровня.

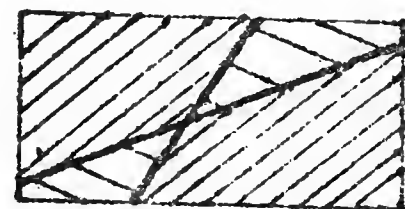
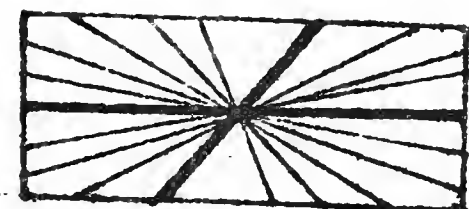
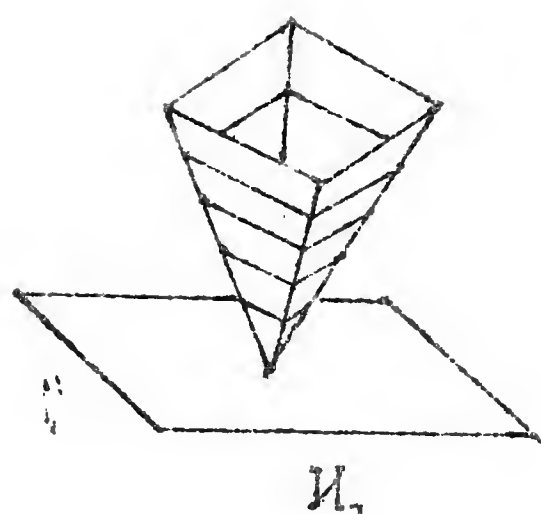
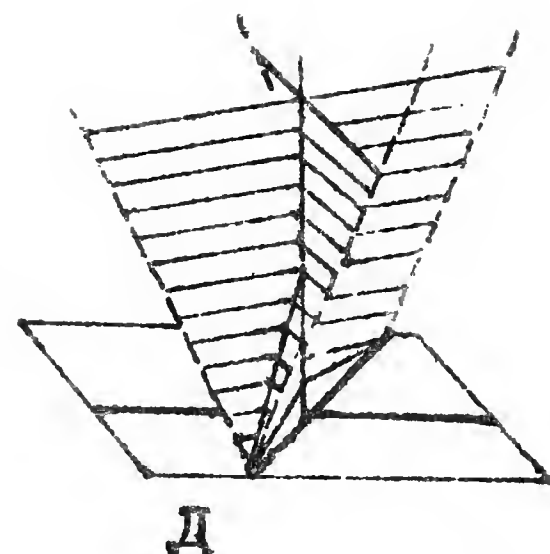
Б. $f(M) = \rho(M, l)$. График - двугранный угол, линии уровня - пары параллельных прямых.

В. $f(M) = |MO|$. График - конус, линии уровня - концентрические окружности.

Г. $f(M) = \widehat{AMB}$. График - гора с вершиной в форме горизонтального отрезка, у концов которого - вертикальные обрывы.

Д. $f(M) = |MA|^2 - |MB|^2$. График - плоскость, линии уровня - параллельные прямые.





К. $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$. График - параболоид вращения, линии уровня - концентрические окружности.

Е. $f(M) = |MA| / |MB|$. График имеет около точки A впадину, около B - поднимается к бесконечности. Линии уровня - непересекающиеся окружности, центры которых лежат на прямой AB , причем каждые две из них имеют радикальной осью одну и ту же прямую - медиатрису отрезка AB .

Д. $f(M) = \rho(M, \ell_1) / \rho(M, \ell_2)$. График получается следующим образом: рассматривается седлообразная поверхность - "гиперболический параболоид", - проходящая через прямую ℓ_1 и вертикальную прямую, проходящую через точку O пересечения ℓ_1 и ℓ_2 ; часть этой поверхности, лежащая ниже данной плоскости, отражается сим-

метрично относительно нее. Линии уровня - пары прямых, проходящих через точку O .

И. $f(M) = \rho(M, \ell_1) + \rho(M, \ell_2)$. График - четырехгранный угол. Линии уровня - прямоугольники с диагоналями, принадлежащими ℓ_1 и ℓ_2 .

Пожалуй, наиболее сложные графики в нашей азбуке имеют функции

$$f(M) = \widehat{AMB} \quad \text{и} \quad f(M) = |AM| / |BM|.$$

Заметим, что между картами линий уровня этих функций имеется интересная связь: если нарисовать их на одном чертеже, то получится два семейства окружностей, причем любая окружность одного семейства пересекает любую окружность другого семейства под прямым углом (?) - как говорят, эти семейства взаимно ортогональны.

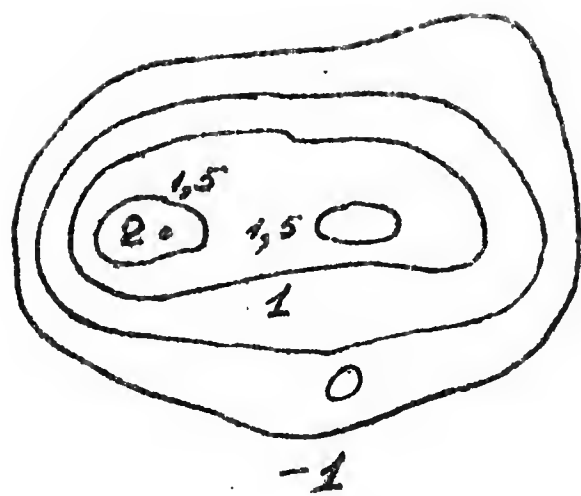
Приведем еще один пример простой функции, у которой линии уровня - лучи, выходящие из одной точки, а график - довольно сложная поверхность. Эта функция $f(M) = \widehat{MAB}$

(A и B - данные точки плоскости). Её график над каждой из полуплоскостей, на которые прямая AB делит плоскость, - синусовая поверхность, или параболоид.

Синусовая поверхность. Как мы видим, для функции $f(M) = \widehat{MAB}$ линии уровня довольно трудно нарисовать их пространственный график. Для практики, более удобный способ представить себе поведение функции на плоскости - это нарисовать карту ее линий уровня.

Физические географические карты составляются следующим образом. Пусть $f(M)$ - высота в точке M поверхности над уровнем моря. Тогда рисуются





линии уровня $\{M: f(M) = 200\text{м}\}$,
 $\{M: f(M) = 400\text{м}\}$ и т.д. Области
 между этими линиями уровня раскрашива-
 ются в разные цвета: область
 $\{M: 0 < f(M) < 200\text{м}\}$ - зелено-
 го цвета, области $\{M: f(M) > 200\text{м}\}$ -
 коричневого, а области $\{M: f(M) <$
 $< 0\}$ - голубого цвета разных оттенков.

Для того чтобы составить карту функ-
 ции, нужно нарисовать несколько её линий
 уровня - достаточно много, чтобы по ним
 можно было судить о том, как расположены
 остальные, - и написать на каждой из них,
 какому значению функции (какому h) она
 соответствует.

Если условиться наносить линии уровня
 через одинаковые по величине интервалы зна-
 чений функции $0, \pm d, \pm 2d, \dots$,
 то по густоте линий уровня можно судить
 о крутизне графика: линии расположены
 чаще там, где больше наклон графика к
 горизонтальной плоскости.

Линии раздела. Рассмотрим довольно
 сложную функцию:

$$f(M) = \min \{ |MC_1|, |MC_2|, \dots, |MC_n| \},$$

которая сопоставляет каждой точке M
 плоскости наименьшее из расстояний от
 неё до данных точек C_1, C_2, \dots .

Сл. Попробуем представить себе карти-
 ну и график этой функции. Начнем с самых
 простых случаев $n=2$ и $n=3$.

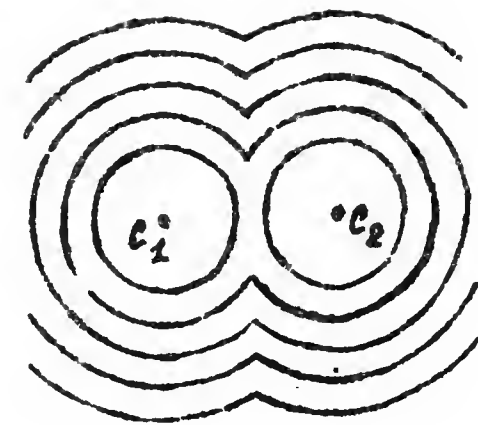
4.2. а) На плоскости заданы две
 точки C_1 и C_2 . Нарисовать карту
 линий уровня функции
 $f(M) = \min \{ |MC_1|, |MC_2| \}$.

б) На плоскости даны три точки
 C_1, C_2 и C_3 . Нарисовать карту
 линий уровня функции

$$f(M) = \min \{ |MC_1|, |MC_2|, |MC_3| \}.$$

□ а) Рассмотрим множество точек M ,
 для которых $|MC_1| = |MC_2|$. Это, как
 мы знаем, медиатриса отрезка C_1C_2 .
 Медиатриса разбивает плоскость на две
 полуплоскости, точки одной из них распо-
 ложены ближе к C_1 , а точки другой -
 ближе к C_2 .

Таким образом, в одной полуплоско-
 сти $f(M) = |MC_1|$, а в другой -
 $f(M) = |MC_2|$. Следовательно,
 надо нарисовать в первой полуплоскости
 линии уровня функции $f(M) = |MC_1|$ -
 окружности, и симметрично отразить эту
 карту относительно медиатрисы.



б) Рассмотрим множества точек,
 где $|MC_1| = |MC_2|$, где $|MC_2| =$
 $= |MC_3|$ и где $|MC_1| = |MC_3|$.

Их найти совсем просто - это
 три медиатрисы треугольника $C_1C_2C_3$,
 пересекающиеся в одной точке O .
 Три луча этих медиатрис с началом в
 точке O разбивают плоскость на три
 области. Очевидно, в области точки

$$C_1 - f(M) = |MC_1|, \text{ в области}$$

$$C_2 - f(M) = |MC_2|, \text{ в области}$$

$$C_3 - f(M) = |MC_3|. \text{ Таким образом, карта функции } f(M) =$$

$$= \min \{ |MC_1|, |MC_2|, |MC_3| \}$$

представляет собой объединение трех
 карт, склеенных по линии раздела - трем
 лучам. □

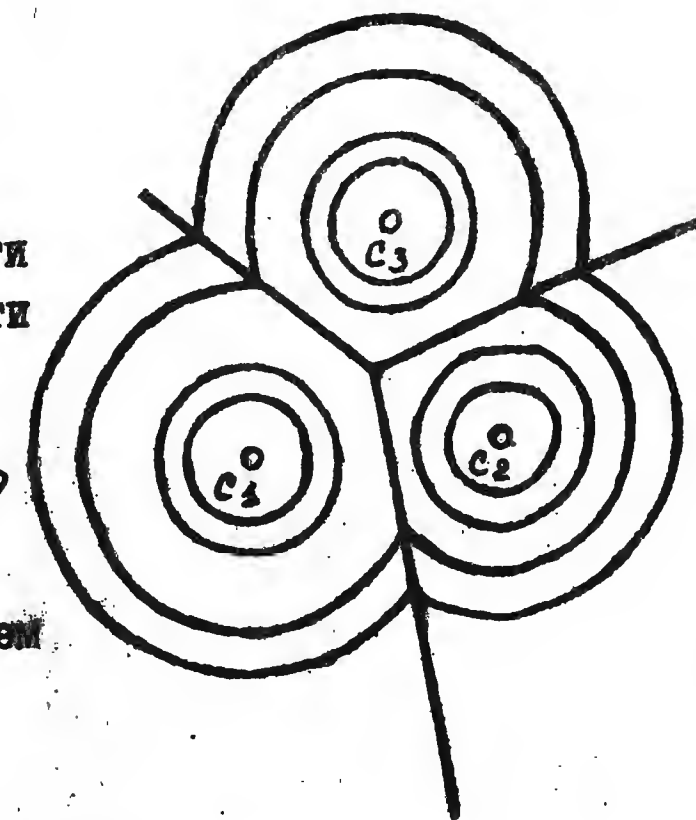


График функции

$$f(M) = \min \{ |MC_1|, |MC_2|, \dots, |MC_n| \}.$$

можно представить себе таким образом. Если насыпать в ящик ровным слоем песок и в точках C_1, C_2, \dots, C_n пробить в дне ящика отверстия, через которые песок высыпется, — так, что вокруг каждого отверстия образуется "воронка", — то поверхность всех этих воронок и образует график функции f . (Разумеется, нужно взять песок такого качества, чтобы угол естественного откоса равнялся 45° , и насыпать его достаточно толстым слоем.)

4.3. Пусть заданы точки A и B на плоскости. Нарисовать карту линий уровня функций:

$$a) f(M) = \max\{\widehat{AMB}, \widehat{BAM}, \widehat{MBA}\},$$

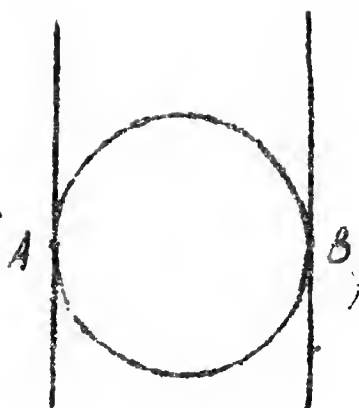
$$b) f(M) = \min\{|AM|, |MB|, |AB|\},$$

и описать их графики.

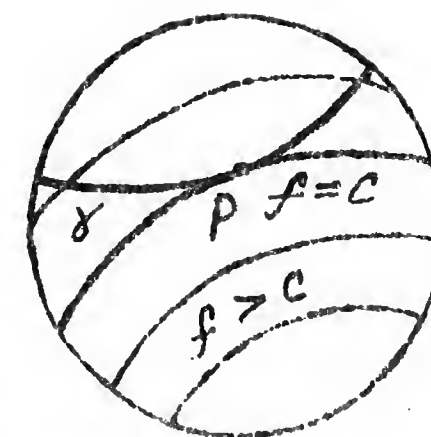
Экстремумы функции. Пусть f — данная функция на плоскости. Представим себе её график как холмистую местность. Максимальные значения $f(M)$ соответствуют высоте горных вершин её графика, а минимальные — глубине впадин.

На карте линий уровня функции, как правило, вершины гор и впадины окружены линиями уровня. Например, для функции $f(M) = |MA|^2 + |MB|^2$ точкой минимума M является середина отрезка AB , а линии уровня — концентрические окружности с центром в точке M .

Более сложная картина получается для функции $f(M) = \widehat{AMB}$. Эта функция достигает своего значения π во всех точках отрезка AB , а минимального значения 0 — в остальных точках прямой AB . Переход от максимального значения к минимальному в точках A и B не плавный (в этих точках f не определена): здесь график имеет вертикальные обрывы.



В начале параграфа мы использовали карту линий уровня для решения задачи 4.1. Это — тоже задача на отыскание максимума, но другого типа. В общем виде задача формулируется так: найти, какое наибольшее или наименьшее значение функция f , заданная на плоскости, принимает на некоторой кривой δ (в рассмотренной задаче δ была прямой). Наблюдение, которое мы сделали в задаче 4.1, относится и к другим подобным задачам: как правило, наибольшее (и наименьшее) значение будет достигаться в тех точках, где δ касается линии уровня функции f^I .



Пусть, скажем, максимальное значение функции f на кривой δ достигается в точке P и равно $f(P) = c$. Тогда кривая δ не может заходить в область $\{M: f(M) > c\}$ — она должна целиком принадлежать дополнительной области $\{M: f(M) \leq c\}$, причем точка P лежит на линии раздела между этими областями: на линии уровня $\{M: f(M) = c\}$. Таким образом, кривая δ не может перейти через линию уровня $\{M: f(M) = c\}$, т.е. должна коснуться этой линии в точке P .

Вы видели, как этот принцип "касания" для нахождения экстремума проявляется в задачах § 4. В этих задачах мы искали максимум или минимум простых функций:

$$f(M) = \rho(M, \ell),$$

$$f(M) = \widehat{MOA}, \quad f(M) = |MA|$$

^{I)} Или в точке, где сама функция f достигает максимума, если кривая δ проходит через такую точку.

на данной кривой γ . Линия уровня, соответствующая экстремальному значению, касалась γ . Как правило, этой кривой γ была окружность. К отысканию максимума (или минимума) функции на данной окружности или прямой сводятся также некоторые из следующих задач.

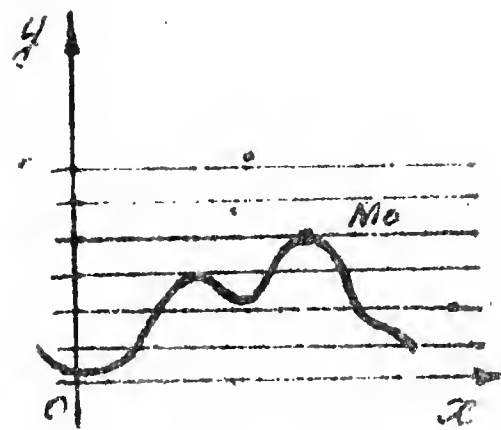
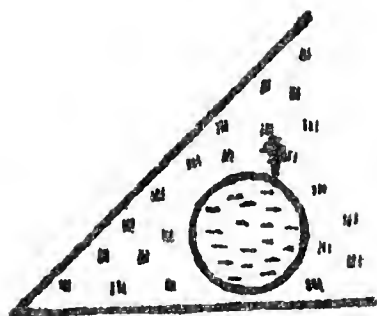
4.4. Дана окружность с центром O и точка A внутри неё. Найти на окружности точку M , для которой величина угла AMO наименьшая.

4.5. A и B — данные точки. Найти на данной окружности γ точку M ,
а) сумма квадратов расстояний;
б) разность квадратов расстояний от которой до точек A и B минимальна.

4.6. Дана прямая ℓ и параллельный ей отрезок AB . Найти положения точки M на прямой ℓ , в которых величина $|AM|/|MB|$ принимает наибольшее и наименьшее значение.

4.7. Между двумя прямыми дорогами расположено озеро. Где на берегу озера нужно выстроить санаторий, чтобы сумма расстояний от него до этих двух дорог была наименьшей? Рассмотрите случай, когда озеро имеет форму: а) круга, б) прямоугольника.

Заметим, что для нахождения максимума функции $y = f(x)$ одного переменного мы руководствуемся "принципом касания". Пусть на плоскости нарисован график функции f — некоторая кривая. Найти максимум функции f — это значит найти самую верхнюю точку графика. Ясно, что для этого надо провести прямую, касательную к графику и параллельную оси Ox ; причем провести так, чтобы весь график лежал ниже этой прямой.



I.

1. Е На прямой AB существует ровно две точки M_1 и M_2 , для которых $AM_1/M_1B = k$, $AM_2/M_2B = k$ (одна — внутри отрезка AB , другая — вне отрезка AB). (?) Если же M — любая другая точка искомого множества: то биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине M треугольника AMB проходят через точки M_1 и M_2 и взаимно перпендикулярны. Следовательно (см. I), точка M лежит на окружности с диаметром M_1M_2 .

Теперь нужно доказать обратное утверждение: любая точка окружности обладает тем свойством, что $AM/MB = k$. Вместо этого мы можем доказать, что если $AN/NB \neq k$, то точка N не лежит на этой окружности. Пусть

$$AN/NB = k' \neq k, \quad k' \neq 1;$$

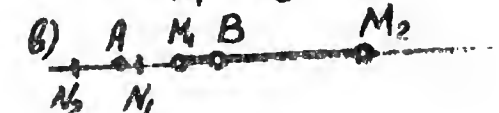
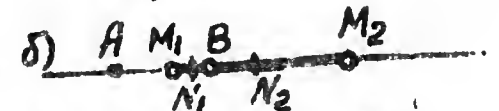
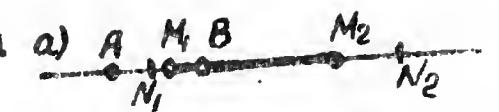
тогда точно так же, как раньше, можно показать, что N лежит на окружности с диаметром N_1N_2 , где N_1 и N_2 — точки прямой AB , в которых $AN_1/N_1B = AN_2/N_2B = k'$.

Но первая и вторая окружности не пересекаются (?).

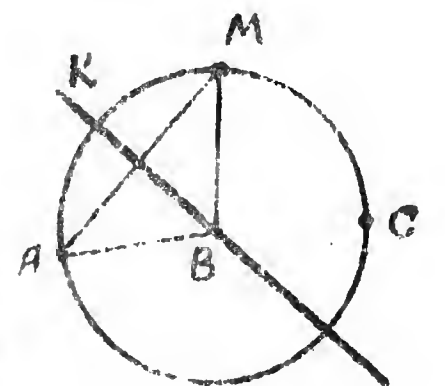
1.5. Интересующее нас множество есть окружность радиуса AB с центром в точке B .

В самом деле, если M — точка, симметричная точке A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B , то очевидно, что $BM = BA$. Отсюда следует, что расстояние от точки M до точки B постоянно, т.е., что точка M лежит на окружности радиуса AB с центром в точке B .

Обратно, пусть M — какая-то точка этой окружности, отличная от точки A и диаметрально противоположной ей точки C . Тогда треугольник AMB равнобедренный: $MB = AB$, следовательно, его медиана BK является также его биссектрисой. Отсюда следует, что точки A и M симметричны относительно прямой BK .



- а) $k > k' > 1$,
- б) $k' > k > 1$,
- в) $k > 1 > k'$



Для диаметрально противоположных точек A и C окружности эти рассуждения не годятся, их нужно исследовать отдельно. Ясно, что обе они тоже удовлетворяют условию задачи: точка A симметрична самой себе относительно прямой AB , а точка C симметрична точке A относительно прямой, перпендикулярной к отрезку AB .

I.14. а) Вершины N всех треугольников ABN лежат на дуге \widehat{ANB} (мы рассматриваем точки по одну сторону от прямой AB).

Пусть K — середина отрезка AB . Мы знаем, что в любом треугольнике ABN точка M пересечения медиан делит медиану KN в отношении $1:2$, т.е. $KM = KN/3$. Поэтому искомое множество точек M получается из дуги \widehat{ANB} сжатием её в три раза к точке K . Это множество — тоже дуга окружности (?).

Ответ: пара дуг с концами в точках C и D (C и D делят отрезок AB на три равные части) таких, что для любой точки M этих дуг $\angle CM D = \varphi$.

б) и в) Докажите, что из точек этих множеств отрезок AB виден под постоянным углом.

I.15. Сводится к I.7.

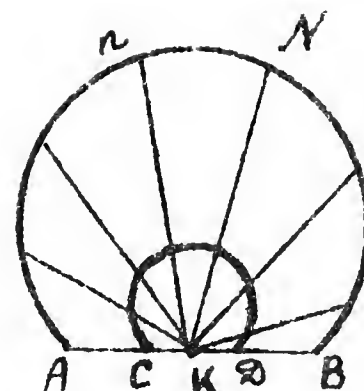
I.18. Ответ: по отрезку прямой, проходящей через вершину прямого угла и составляющей с его сторонами углы, равные острым углам деревянного треугольника. Можно воспользоваться I.14.

I.26. б) Докажите, что если отрезок KL постоянной длины скользит концами по сторонам данного угла A , то точка M пересечения перпендикуляров, восстановленных в точках K и L к сторонам KA и LA угла, движется по окружности с центром A .

I.32. Ответ: коническая поверхность с вершиной в точке

A и осью, перпендикулярной к плоскости P .

I.33. Заметьте, что две образующие конуса, лежащие в данной плоскости, а также середина отрезка между точками их касания не меняют своего положения при изменении сферы. После этого дело



сводится к задаче I.29 б).

I.34. Достаточно решить задачу для случая когда точка лежит на линии пересечения данных плоскостей.

Ответ: пара плоскостей, проходящих через точку A и параллельных плоскостям, делящим пополам двугранные углы между данными плоскостями (см. I.6).

I.35. Воспользуйтесь теоремой: $CT^2 = CP \cdot CQ$

I.36. В каждой плоскости, проходящей через точку A , пересекающей цилиндр параллельно его оси, наше множество — прямая, параллельная оси цилиндра. В плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной к оси цилиндра, задача сводится к I.7а).

I.37. Проведите в плоскости симметрии P перпендикулярной к данной плоскости, отрезок касательной MK и докажите, что он пересекает данную плоскость в постоянной точке K и имеет постоянную длину. (Пусть A, B, C, D — точки пересечения плоскости P с окружностями. Тогда $MK^2 = KA \cdot KB = KC \cdot KD$).

I.39. Если существует конус, касающийся сферы по данной на ней окружности, то точка пересечения луча SK , где K — вершина конуса, с горизонтальной плоскостью, будет центром искомой окружности.

2.8. Сводится к такой задаче: один конец отрезка находится на данной прямой, а его середина — в данной точке; найдите геометрическое место вторых концов отрезка.

2.10. См. задачу I.146.

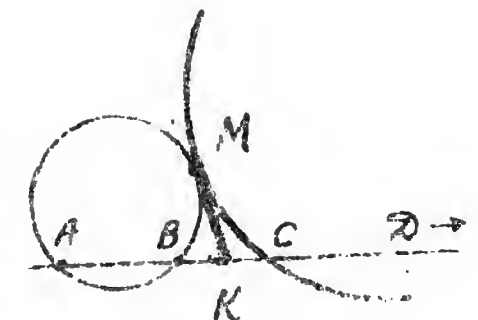
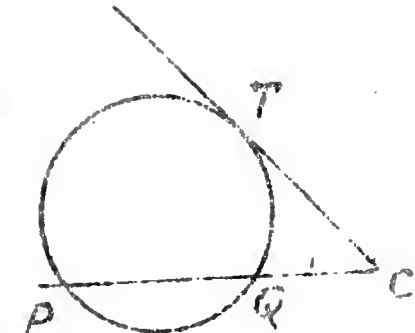
2.11. См. задачу на стр.

2.12. Воспользуйтесь тем, что геометрическое место вершин M треугольников AMC с данным основанием AC , у которых биссектриса MB проходит через фиксированную точку B на отрезке AC , представляет собой окружность (см. доказательство I.5).

3.4. Ответ. Наименьшее расстояние между пешеходами равно

$$du/\sqrt{u^2 + v^2}$$

Пусть первый пешеход P идет со скоростью \vec{u} , второй пешеход Q — со скоростью \vec{v} (длины u и v этих векторов известны). Рассмотрим относительное движение P в системе отсчета



связанной с \vec{u} - это будет равномерное движение с постоянной скоростью $\vec{u} - \vec{v}$.

В "начальном" положении, когда P находится в точке A пересечения дорог, Q_0 находится от P_0 на расстоянии $|Q_0 P_0| = r$ в направлении вектора $-\vec{v}$. Таким образом, чтобы найти ответ, достаточно через точку P_0 провести прямую ℓ , параллельную вектору $\vec{u} - \vec{v}$ (это - траектория P в относительном движении в системе отсчета, связанной с Q) и определить расстояние $|Q_0 N|$ от точки Q_0 до прямой ℓ (N - проекция Q_0 на ℓ). Поскольку треугольник $Q_0 P_0 N$ подобен треугольнику, составленному из векторов \vec{u} , \vec{v} и $\vec{u} - \vec{v}$ ($(Q_0 P_0) \perp \vec{u}$, $(Q_0 N) \perp (\vec{u} - \vec{v})$), то

$$|Q_0 N|/|Q_0 P_0| = |\vec{u}|/|\vec{u} - \vec{v}| = u/\sqrt{u^2 + v^2}.$$

3.6. Опустим из центра O_1 одной из окружностей перпендикуляр $O_1 N$ на секущую ℓ , проходящую через точку A , и из центра O_2 другой окружности - перпендикуляр $O_2 M$ на прямую $O_1 N$. Тогда длина $|O_2 M|$ вдвое меньше расстояния между точками пересечения секущей ℓ с окружностями (отличными от A).

3.9. Ответ. Равнобедренный треугольник, см. задачу на стр. 16.

4.6. Построить эти точки помогает тот факт, что линии уровня функции $f(M) = |AM|/|MB|$ ортогональны окружностям, проходящим через точки A и B (см. стр. 45).

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

ВСЕСОЮЗНАЯ ЗАОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР ПРИ МГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ
РАЗРАБОТКИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ ВЗМШ

Тема: "ПРИНЦИП КАСАНИЯ" по брошюре
"ПРЯМЫЕ И КРИВЫЕ"

Издательство Московского университета, 1979

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для учащихся ВЗМШ (тема "Принцип касания")
по брошюре "Прямые и кривые").

Эти разработки предназначены для преподавателей ВЗМШ — руководителей групп "Коллективный ученик ВЗМШ". Они содержат решения задач, предлагавшихся в 1978/79 учебном году учащимся I и II курсов по книге Н.Б.Васильева и В.Л.Гутенмахера "Прямые и кривые" (задание № 5 на стр. 153 этой книги).

Предлагаемые решения, разумеется, не единственные и даже не самые короткие. При их написании преследовалась цель использовать те идеи, которым посвящено задание.

Авторы разработок будут благодарны всем приславшим свои замечания и соображения как по содержанию заданий и вообще по книге "Прямые и кривые", так и по решениям задач.

Наш адрес: 117234, Москва, МГУ, ВЗМШ.

Решения задач

4.3. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине выбрать треугольник наибольшей площади.

Ответ: равнобедренный треугольник.

Решение. Множество вершин треугольников с данным основанием и с данным углом при вершине (по одну сторону от основания) — дуга окружности с концами в вершинах основания — см. п.Д азбуки.

Поскольку площадь треугольника равна $\frac{ah}{2}$, где a — длина основания (в нашем случае постоянна), h — длина высоты, опущенной на основание, то задача свелась к такой: среди точек указанной выше дуги выбрать наиболее удаленную от основания треугольника. Поскольку линии уровня функции $f(M, e) = p(M, e)$ — пары параллельных прямых (см. стр. 78, п.В), нам осталось из этих

прямых выбрать ту, которая касается дуги (принцип касания). Очевидно, эта касательная проходит через середину дуги (см. рис. 1).

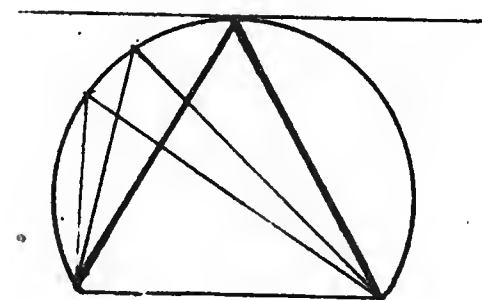


Рис. 1

4.9. Из всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине выбрать треугольник наибольшего периметра.

Ответ: равнобедренный треугольник.

Решение. Пусть отрезок AB — основание треугольника, а M — его вершина. Поскольку величина \widehat{AMB} постоянна, то согласно пункту D азбуки, множество точек M — пара дуг, симметричных относительно прямой AB . Рассмотрим одну из дуг, обозначим её через α . Задача состоит в том, чтобы максимизировать величину $|AM| + |MB| + |AB|$, то есть $|AM| + |MB|$ (т.к. $|AB|$ — заданная величина).

На продолжении отрезка AM от точки M отложим отрезок MN , равный по длине отрезку BM . Тогда $|AM| + |MB| = |AN|$. Множество точек N представляет собой дугу окружности γ , центр C которой лежит в середине дуги α (см. задачу 2.8а). В результате задача сводится к следующей.

На данной окружности γ задана точка A . Надо из всех хорд AN выбрать наибольшую.

Ответ ясен — это диаметр окружности γ . Диаметр проходит через середину C дуги α и тем самым наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник AOB .

5.4а). На гипотенузе данного прямоугольного треугольника найти точку, для которой расстояние между её проекциями на катеты наименьшее.

Ответ: основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу.

Решение. ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C . Рассмотрим точку M на его гипотенузе и её проекции P и Q на его катеты. Нам надо выбрать точку M так, чтобы величина $|PQ|$ была наименьшей. В прямоугольнике $PMQC$ $|PQ| = |CM|$ (см. рис. 2). Задача сводится к следующей.

Найти на прямой AB точку M так, чтобы расстояние $|CM|$ от неё до точки C было наименьшим.

Искомая точка — это основание перпендикуляра, опущенного из точки C на гипотенузу AB (см. первую теорему на стр. 149 книги).

5.5. Дана окружность с центром O и точка A внутри неё. Найти на окружности точку M , для которой величина угла AMO наименьшая.

Ответ: Конец радиуса, проходящего через точку A . (В

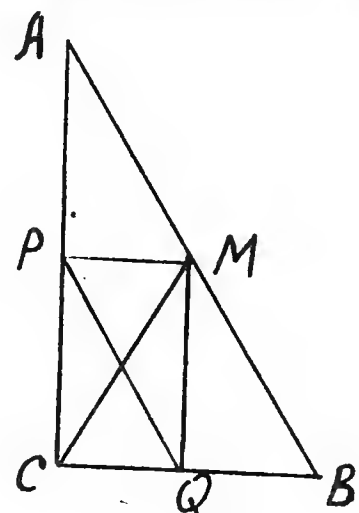


Рис. 2

этом случае $\widehat{AMO} = 0$).

5.6а). A и B — данные точки. Найти на данной окружности γ точку M , сумма квадратов расстояний от которой до точек A и B минимальна.

Решение. Рассмотрим функцию $f(M) = |AM|^2 + |BM|^2$. Её линии уровня — окружности с центром в середине C отрезка AB ; чем меньше радиус, тем меньше значение $f(M)$ (пункт E азбуки). Таким образом, из этого семейства окружностей с центром C нам надо выбрать окружность наименьшего радиуса, имеющую общую точку с окружностью γ . Согласно принципу касания, это будет окружность, касающаяся окружности γ в некоторой точке M_0 — это и есть искомая точка (точка M_0 — одна из двух точек пересечения γ с прямой CO , где O — центр окружности γ).

В случае, когда точки C и O совпадают, величина $|AM|^2 + |BM|^2$ одна и та же для всех точек M окружности γ .

5.6б). A и B — данные точки. Найти на данной окружности γ точку M , разность квадратов расстояний от которой до точек A и B минимальна. подумай!

Решение. Рассмотрим функцию $f(M) = |AM|^2 - |BM|^2$. Её линии уровня — прямые, перпендикулярные прямой AB (пункт $Ж$ азбуки). Искомая точка M_0 является точкой касания окружности одной из прямых этого семейства (точка M_0 — один из концов диаметра окружности γ , параллельного отрезку AB).

5.8. Между двумя прямыми дорогами расположено озеро. Где на берегу озера нужно выстроить санаторий, чтобы сумма расстояний от него до этих двух дорог была наименьшей? Рассмотрите случай, когда озеро имеет форму: а) круга; б) прямоугольника.

Решение. Обозначим данные прямые (дороги) через ℓ_1 и ℓ_2 и рассмотрим функцию $f(M) = \rho(M, \ell_1) + \rho(M, \ell_2)$. Её линии уровня внутри угла, содержащего озеро — прямые, перпендикулярные биссектрисе этого угла (пункт $Л$ азбуки). Надо выбрать ближайшую прямую этого семейства к вершине угла, имеющую общую точку с озером (для круглого озера эта точка всегда одна, а для прямоугольника эта точка либо одна — вершина, либо их много — они составляют сторону прямоугольника).

4.8. На каком наибольшем расстоянии от точки O может находиться вершина M квадрата $AKMN$, если известно, что

а) $|OA| = |ON| = 1$;

б) $|OA| = a$; $|ON| = b$.

Решим сразу задачу б). Мы можем рассматривать (как в 4.7)

лишь квадраты с вершиной N в фиксированной, закрепленной точке на расстоянии $|ON| = b$ от точки O , у которых вершина A пробегает окружность α радиуса a с центром O . Множество вершин M квадратов $AKMN$ — окружности α' и α'' , полученные из α поворотом на угол 90° относительно точки N в ту и другую сторону; очевидно, можно рассматривать любую из этих окружностей — скажем, α' . Её центр O' лежит на расстоянии $b\sqrt{2}$ от точки O (он получается из O поворотом на 90° вокруг N), а самая далекая от O точка M_0 окружности α' удалена от O на расстояние $|OM_0| = a + b\sqrt{2}$. Таким образом, ответ в задаче б) $a + b\sqrt{2}$, в задаче а) $1 + \sqrt{2}$.

5.4 б). На данной прямой найти точку M так, чтобы расстояние между её проекциями на стороны данного угла было наименьшим.

Ответ: Основание перпендикуляра, опущенного из вершины данного угла на данную прямую.

Решение. Это решение опирается на следующий очевидный факт.

Длина хорды, которая видна из точки окружности под данным углом φ , зависит только от диаметра окружности: чем меньше диаметр, тем меньше хорда.

Пусть A — вершина данного угла, а K и L — проекции точки M на его стороны. Точки A, K, M, L лежат на окружности с диаметром AM , так как углы APM и AQM — прямые. Хорда KL видна из точки A под данным углом φ . Согласно сформулированному выше утверждению, хорда KL будет тем меньше, чем меньше расстояние AM . Поэтому, чтобы получить искомую точку, нужно из окружностей с центром A выбрать окружность наименьшего радиуса AM .

5.7. Дана прямая ℓ и параллельный ей отрезок AB . Найти положения точки M на прямой ℓ , в которых величина $|AM|/|BM|$ принимает наибольшее и наименьшее значения.

Ответ: Наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках M_1 и M_2 соответственно, удаленных на расстояние $\sqrt{a^2 + b^2}$ вправо и влево от серединного перпендикуляра к отрезку AB (b — расстояние от отрезка AB до прямой ℓ , $2a = |AB|$).

Решение. В соответствии с указанием к задаче на стр. 145 и с принципом касания, надо найти, где находится центр O_1 окружности, являющийся линией уровня функции $f(M) = |AM|/|BM|$, касающейся

прямой ℓ и ортогональной любой окружности, проходящей через точки A и B , например, касающейся прямой ℓ

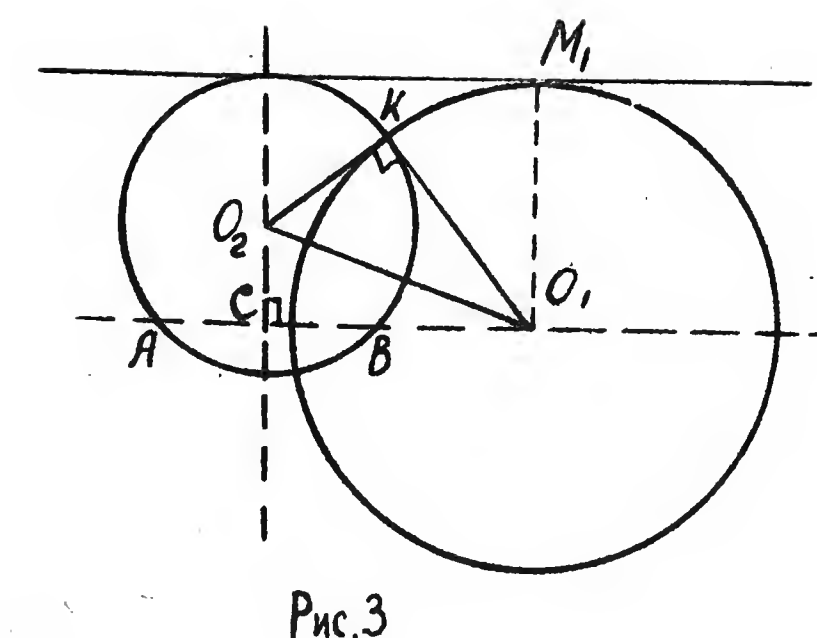


Рис.3

(см.рис.3). Пусть O_2 — центр второй окружности, C — середина отрезка AB , K — точка пересечения окружностей. Пусть x — длина радиуса окружности с центром O_2 , тогда из прямоугольного треугольника BCO_2 получаем $x^2 = a^2 + (b-x)^2$, откуда $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$.

Так как окружности ортогональны, треугольник O_1O_2K — прямоугольный,

тогда

$$|O_1O_2|^2 = |O_1K|^2 + |O_2K|^2, \text{ то есть}$$

$$|O_1O_2|^2 = b^2 + x^2, \text{ тогда из } \triangle O_2CO_1: |O_1C|^2 = (b^2 + x^2) - (b-x)^2, \text{ откуда } |O_1C| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Мы нашли точку M_1 , где принимается наибольшее значение величины $|AM|/|BM|$; наименьшее значение, очевидно, принимается в точке M_2 , симметричной M_1 относительно прямой CO_2 .

Разработки составили: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ.

Методическая Комиссия ВЭМШ.

Подписано к печати 7.12.78 г.
Формат 60х90 1/16 Объем 0,25 п.л.
Заказ 2072 Бесплатно Тираж 1000 экз.

Отпечатано на ротационной машине Института механики МГУ

1979/80 учебный год

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
для преподавателей ВЗМШ на тему
"Принцип касания" и "Разбиения"
(книга "Прямые и кривые")

При проверке задач необходимо учитывать, что школьники могут давать решения, отличные от наших. Такие решения надо тщательно проверять и оценивать аналогично нашим (следить за полнотой и обоснованностью).

Степень обоснованности должна быть примерно такой, как в наших решениях.

Задание по теме "Принцип касания" состоит из следующих задач:

Обязательные задачи

- | | | | |
|----------|--------------|--------------|----------|
| I. № 4.3 | 2. № 4.9 | 3. № 5.4 а). | |
| 4. № 5.5 | 5. № 5.6 а). | 6. № 5.6 б) | 7. № 5.8 |

Дополнительные задачи

- | | | |
|-----------|--------------|-----------|
| 8. № 4.8. | 9. № 5.4 б). | 10. № 5.7 |
|-----------|--------------|-----------|

Критерии оценок

- Обязательные задачи: "3" — решено не менее 4 обязательных задач;
"4" — решено не менее 5 обязательных задач;
"5" — решены все 7 обязательных задач.
- Дополнительные задачи: "4" — решена I дополнительная задача;
"5" — решено не менее 3 дополнительных задач.

Задание по теме "Разбиения" состоит из следующих задач:

Обязательные задачи

- | | | | |
|--------------|--------------|-----------|-----------|
| I. № 1.19 | 2. № 3.12 | 3. № 3.14 | |
| 4. № 5.3 а). | 5. № 5.3 б). | 6. № 3.15 | 7. № 3.16 |

Дополнительные задачи

- | | | |
|----------------|----------------|------------|
| 8. № 3.18 | 9. № 3.19 | 10. № 4.11 |
| 11. № 4.12 а). | 12. № 4.12 б). | |

Критерии оценок

Обязательные задачи: "3" - решено не менее 3 обязательных задач;
"4" - решено не менее 5 обязательных задач;
? "6" - решено не менее 6 обязательных задач.
Дополнительные задачи: "4" - решена I дополнительная задача;
"5" - решено не менее 3 дополнительных задач.

Указания по отдельным задачам.

Тема "Принцип касания"

№ 5.5. Возможно, что школьники будут искать точку М с наибольшим, а не наименьшим углом АМО. В таком случае, за верное решение ставить оценку "+", указывая на допущенную неточность.

Тема "Разбиения"

№ 3.12. Для оценки достаточно правильного чертежа - ответ ко всем пунктам.

№ 3.14. Не требовать обоснования того, что множество точек М - правильный шестиугольник.

№ 5.3 а). Для оценки "+" по каждому из пунктов достаточно правильной карты линий уровня, а описание поверхности не обязательно.

№ 3.15. 3.16. За верную картинку (даже без обоснования) ставить "+".

№ 4.12. Тщательно проверять обоснование. Часто бывают логические ошибки.

Разработки составили: В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ.

Методическая Комиссия ВЗМШ.

N 1.9K

Научно-исследовательский институт
содержания и методов обучения АПН СССР

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

I X класс

(сборник заданий для учащихся)

Москва, 1974

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта брошюра предназначена для учащихся Всесоюзной заочной математической школы Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М.В.Ломоносова.

Автор брошюры - М.И.Башмаков. Настоящее издание брошюры - третье. При переработке книги были учтены замечания, высказанные учителями, работающими в группах "Коллективный ученик ВЭМШ", и учениками ВсОШ. В переработке приняли участие члены Методической Комиссии ВЭМШ: Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Работ, Е.Г.Шульгейфер. Новый §8 написан Е.Г.Шульгейфером.

Всех читателей брошюры просим сообщить о замеченных недостатках и предложениях по адресу: И17234, Москва В-234, МГУ, мех-мат, ВЭМШ, Методической Комиссии.

Методическая Комиссия ВЭМШ.

Июль 1974 г.

ГЛАВА I.

Основные понятия.

§ I. Определения.

Будем говорить, что задана последовательность чисел, если каждому натуральному (целому положительному) числу n поставлено в соответствие некоторое число $f(n)$: $n \rightarrow f(n)$. Другими словами,

последовательность - это (числовая) функция, заданная на множестве N всех целых положительных чисел.

Число $f(1)$ называется первым членом последовательности, $f(2)$ - вторым, $f(3)$ - третьим и т.д. Обычно n -й член последовательности обозначают вместо $f(n)$ так: a_n, x_n, y_n и т.п., т.е. значение аргумента n (номер члена последовательности) пишется не в скобках, а в виде индекса.

Примеры последовательностей: 1) $a_n = (-1)^n$; 2) $b_n = n^2$; 3) $c_n = \frac{1}{n^2}$; 4) $d_n = n + \frac{(-1)^n}{n}$ (в примерах 1) - 4)

мы указали общую формулу, позволяющую вычислять любой член последовательности); 5) k_n - количество простых чисел, не превосходящих n (в этом примере мы не можем дать формулу общего члена последовательности, но тем не менее последовательность определена: для каждого из чисел $1, 2, 3, \dots, n$ можно проверить, является ли оно простым).

Часто последовательность задают, указывая несколько её первых членов и считая, что закон образования любого следующего члена после этого ясен. Скажем, последовательности, которые мы привели выше в качестве примеров, можно задать так:

1) $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$

2) $1; 4; 9; 16; 25; \dots$

3) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$

4) $0; \frac{2}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{4}; \frac{4}{5}; \frac{6}{6}; \frac{6}{7}; \dots$

(или так: $0; \frac{5}{2}; \frac{8}{3}; \frac{17}{4}; \frac{24}{5}; \frac{37}{6}; \frac{48}{7}; \dots$, но по этой

записи восстановить всю последовательность значительно труднее).

В пятом примере, пожалуй, по первым нескольким членам

$$k_1 = 0; k_2 = 1; k_3 = 2; k_4 = 2; k_5 = 3; k_6 = 3; \dots$$

вообще невозможно догадаться, какая последовательность имеется в виду.

Станет еще, что в область определения функции f могут не входить несколько первых натуральных чисел. Такие функции мы тоже называем последовательностями. Например, $x_n = \sqrt{n-8}$. Если, что последовательность "начинается с 8-го члена" (при $n=1, 2, \dots, 7$ она не определена), то есть имеет вид: $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = \sqrt{2}; \dots$. В таких случаях говорят: "последовательность занумерована с восьми" или "последовательность x_n , где $n=8, 9, 10, \dots$ ".

Наряду с числовыми последовательностями мы будем встречаться с последовательностями точек, последовательностями отрезков, последовательностями теорем и т.п.

Говоря о числовых последовательностях, мы будем в дальнейшем часто называть их просто последовательностями.

Последовательность с общим членом a_n обозначают так: $\{a_n\}$

Упражнения.

1.1. Найдите 25-е и 30-е члены последовательностей, указанных в примерах 1) - 5) на стр. 3.

1.2. Угадайте формулу общего члена последовательности:

а) $1; 2; 3; 4; 5; 6; \dots$ (ответ: $a_n = \frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n}$);

б) $1; 2\frac{1}{4}; 3\frac{1}{9}; 4\frac{1}{16}; 5\frac{1}{25}; \dots$

в) $1; 7; 31; 127; 511; \dots$ (ответ: $a_n = 2^{2n} - 1$);

г) $2; 10; 26; 52; 82; 118; \dots$

д) $1; -2; \frac{1}{3}; -4; \frac{1}{5}; -6; \frac{1}{7}; \dots$ (ответ: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ -n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$)

е) $0; 3; 2; 5; 4; 7; \dots$ (ответ: $a_n = (-1)^n n = \begin{cases} n-1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ n+1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$)

ж) $-1; 2; -3; 4; -5; 6; \dots$

1.3. Чему равен 1224-й член последовательности:

а) $1; -2; \frac{1}{3}; 1; -2; \frac{1}{3}; \dots$;

б) $1; 4; 9; 16; 25; 36; \dots$;

в) $1; -\frac{1}{4}; \frac{9}{8}; 4; -\frac{1}{25}; \frac{9}{8}; \dots$

1.4. Пусть A_n обозначает теорему: неравенство $\sqrt[n]{n} < \sqrt[n+1]{n+1}$ верно. Какие теоремы в последовательности теорем $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ верны, а какие - нет? (Например, теорема $A_2: \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ верна, так как $2^3 < 3^2$).

§ 2. Рекуррентные соотношения.

Важным и часто встречающимся способом задания последовательностей является следующий: приводят значения первого члена (или нескольких первых членов) последовательности и задают закон, по которому вычисляется n -ый член последовательности по предыдущему (или по нескольким предыдущим).

Например, $a_1 = 3, a_n = 2a_{n-1}$. Последнюю формулу (для a_n) можно применять только при $n \geq 2$, и по ней можно последовательно вычислять любой член, начиная со второго. Так,

$$a_2 = 2a_1 = 6; a_3 = 2a_2 = 12; a_4 = 2a_3 = 24 \text{ и т.д.}$$

Формула, связывающая n -ый член последовательности с предыдущими, называется рекуррентным (или возвратным) соотношением.

Приведем еще один пример. $a_1 = 1; a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$. Здесь рекуррентное соотношение связывает a_n с двумя предыдущими.

Для получения последовательности нужно знать два первых члена последовательности. Запишем ее несколько первых членов: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, Эта последовательность обладает рядом интересных свойств. Ее члены называются числами Фибоначчи. Если в первом примере мы легко сможем найти формулу общего члена, зная первый член и рекуррентное соотношение, то для чисел Фибоначчи вывести формулу общего члена довольно трудно.

Еще один пример: $a_1 = 1, a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}, n \geq 2$. В этом примере n -ый член задается через все предыдущие: $a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 4; a_5 = 8; a_6 = 16$.

Нетрудно заметить, что $a_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$. Однако эта догадка требует аккуратного математического доказательства. Мы сможем его провести, познакомившись в следующей главе с методом математической индукции.

Упражнения.

2.1. Последовательность $\{a_n\}$ задается первыми двумя членами $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и рекуррентным соотношением

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \geq 1). \text{ Найдите } a_{37} \text{ и } a_{1967}. \text{ Как записать все номера тех членов этой последовательности, которые равны 1?}$$

2.2. Последовательность $\{a_n\}$ задается двумя первыми членами $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ ($n \geq 1$). Найдите a_{90} и a_{885} .

2.3. * Докажите, что тысячный член последовательности чисел Фибоначчи больше, чем 2^{500} .

2.4. Последовательность $\{a_n\}$ задана первым членом $a_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$.

а) Вычислите первые семь членов этой последовательности в виде обыкновенных дробей и в виде десятичных с двумя знаками после запятой.

б) Представим a_n в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{b_n}{c_n}$ ($a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{2}{1}$, $a_3 = \frac{3}{2}$ и т.д.)

Докажите, что $b_n = d_{n+1}$, а $c_n = d_n$, где d_n — n -ый член последовательности чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, ...

2.5. В первом ведре один литр воды, второе — пустое. Половину воды перелили из первого ведра во второе, затем из второго ведра перелили половину в первое и т.д. а) Запишите рекуррентные соотношения для каждой из последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ после n переливаний. б) Подсчитайте с точностью до 0,001 числа a_{100} и b_{100} .

2.6. * Пусть дано натуральное число m . Рассмотрим последовательность, занумерованную с нуля, — $T_m(0); T_m(1); T_m(2); \dots$ (при каждом фиксированном m будет получаться своя последова-

тельность). Задается эта последовательность так:

$$T_m(0) = 1; T_m(k+1) = \frac{m-k}{k+1} T_m(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

а) Вычислите несколько первых членов последовательностей:

$$\{T_4(k)\}, \{T_6(k)\}, \{T_8(k)\}, \{T_m(k)\}.$$

б) Докажите, что при $k > m$ имеем: $T_m(k) = 0$.

в) Докажите, что $T_m(m) = 1$.

г) Докажите, что $T_m(k) = T_m(m-k)$.

д) Докажите, что $T_{m-1}(k-1) + T_{m-1}(k) = T_m(k)$.

2.7. Последовательность $\{a_n\}$ (занумерованная с нуля) задана так: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = n a_{n-1}$. Убедитесь в том, что a_n ($n \geq 1$) есть произведение натуральных чисел от 1 до n включительно. Общий член этой последовательности обозначают так: $n!$ (читается: "эн факториал"). Кроме того, по определению, $0! = 1$, $1! = 1$.

а) Докажите, что $\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!}$.

б) Докажите, что число $T_m(k)$ из задачи 2,6 при $k \leq m$ равно $\frac{m!}{k!(m-k)!}$.

§ 3. Свойства числовых последовательностей.

Определения. Числовая последовательность называется возрастающей, если для всяких n_1 и n_2 имеем:

$$n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \leq a_{n_2}.$$

Если для всяких n_1 и n_2 выполняется $n_1 < n_2 \Rightarrow$

$a_{n_1} < a_{n_2}$, то говорят, что последовательность строго возрастает.

(Обязательно сформулируйте полностью высказывания, коротко записанные с помощью знаков).

Аналогично, последовательность называют убывающей (строго убывающей), если для всяких n_1 и n_2 выполняется:

$$n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \geq a_{n_2} \quad (a_{n_1} > a_{n_2}).$$

Оба введенных свойства - возрастание и убывание - объединяют одним словом - монотонность. Последовательность монотонна, если она возрастает или убывает.

Говорят, что последовательность строго монотонна, если она строго возрастает или строго убывает.

Очевидно, что монотонность последовательности достаточно проверить для любых двух соседних значений аргумента. Например, для того, чтобы последовательность была возрастающей, достаточно, чтобы для всех n выполнялось бы неравенство $a_{n+1} \geq a_n$.

Приведем примеры. 1) $a_n = n^2$. Эта последовательность строго возрастает. Действительно, $a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow (n+1)^2 > n^2 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > n^2 \Leftrightarrow 2n + 1 > 0$, что при всех натуральных n выполняется.

2) $a_n = \frac{1}{n}$. Эта последовательность, как легко проверить, строго убывает.

3) $a_n = [\sqrt{n}]$, где через $[a]$ обозначена целая часть числа, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a (так, $[3] = 3$, $[2,7] = 2$, $[-4,3] = -5$, и т.п.): $a_1 = [\sqrt{1}] = 1$;

$a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$ и т.д.

Последовательность a_n является возрастающей (но не является строго возрастающей).

4) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (эта последовательность не является монотонной).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной сверху, если ограничено сверху множество её значений, т.е. если существует число M такое, что для всех n выполняется: $a_n \leq M$. Такое число M называется верхней границей последовательности $\{a_n\}$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной снизу, если ограничено снизу множество её значений, т.е. если существует число N такое, что для всех n выполняется: $a_n \geq N$. Такое число N называется нижней границей последовательности $\{a_n\}$.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если она является ограниченной сверху и ограниченной снизу, т.е. если множество её значений $\{a_n\}$ является ограниченным.

Примеры. 1) Последовательность $a_n = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять число 1 (а можно - число 0 или число (-100)). Она не является ограниченной сверху. Действительно, если бы (положительное) число M было бы её верхней границей, то для всех n выполнялось бы неравенство $n^2 \leq M$. Достаточно взять любое целое число n большее \sqrt{M} , чтобы для него не выполнялось написанное неравенство.

2) Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ является ограниченной. Примеры верхней и нижней границ:

$$M = 1 \quad \text{и} \quad N = 0.$$

3) Последовательность $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ также является ограниченной. Верхней границей может служить число 1, нижней - число -1, (а можно взять и $(-\frac{1}{2})$).

4) Последовательность $a_n = (-1)^n n$ дает пример последовательности, не ограниченной ни сверху, ни снизу.

Полезно заметить, что возрастающая последовательность всегда ограничена снизу. В качестве нижней границы можно взять a_1 : для всех n $a_n \geq a_1$. Аналогично, убывающая последовательность всегда ограничена сверху.

Для того, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была ограниченной, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число C , что для всякого n выполнялось бы: $|a_n| \leq C$.

Это свойство можно принять за определение ограниченной последовательности.

Упражнения.

3.1. Дана последовательность $\{a_n\}$: $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

а) Докажите, что эта последовательность убывает.

б) Очевидно, что 0 является её нижней границей. Имеет ли она положительную нижнюю границу?

3.2. Является ли монотонной последовательность $\{a_n = \frac{n}{n^2+1}\}$?

3.3. Последовательность $\{a_n\}$ задана так: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Ограничена ли эта последовательность? Изменится ли ваш ответ, если взять другой первый член?

3.4. Изменим немного рекуррентную формулу предыдущей задачи:

$$a_0 = 1; a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4n}$$

а) Докажите, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

б) Докажите, что $|a_{1000} - 2| < (\frac{3}{4})^{1000}$.

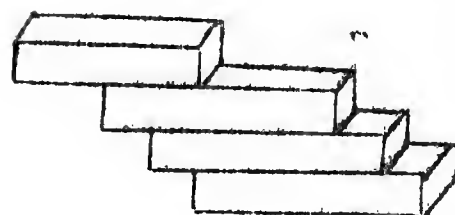
3.5. Последовательность $\{a_n\}$ задана так: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$.

а) Докажите, что $a_4 - a_2 > \frac{1}{2}$, $a_8 - a_4 > \frac{1}{2}$,
 $a_{16} - a_8 > \frac{1}{2}$. И вообще, $a_{2^{k+1}} - a_{2^k} > \frac{1}{2}$.

б) Докажите, что $\{a_n\}$ не ограничена сверху.

3.6. Из одинаковых кирпичей длины l строится "крыша" так:
 под середину первого кирпича подкладывается краем второй;

если уже положено n кирпичей, то $(n+1)$ -
 -ый подкладывается под построенный кусок крыши
 так, чтобы край помещался под центр тяжести
 этого куска крыши (см. рис.).



а). Вычислите, насколько увеличивает длину кры-
 ши n -ый кирпич.

б) Используя результат предыдущей задачи, докажите, что указанным
 способом можно построить как угодно длинную крышу.

3.7. Докажите, что последовательность $\{a_n\}$: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ ограничена. Укажите верхнюю границу для
 этой последовательности.

3.8. Пусть $\{a_n\}$ - любая последовательность, n_k - лю-
 бая строго возрастающая последовательность целых положительных
 чисел. Тогда последовательность $b_k = a_{n_k}$ (где $k = 1, 2, 3, \dots$)
 называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$.

а) Докажите, что если некоторая подпоследовательность мо-
 нотонной последовательности $\{a_n\}$ ограничена, то и сама по-
 следовательность $\{a_n\}$ ограничена.

б) Приведите пример (немонотонной) неограниченной последо-
 вательности $\{a_n\}$, у которой есть ограниченная подпоследо-
 вательность.

в) Приведите пример последовательности, у которой нет огра-
 ниченной подпоследовательности.

г) Докажите, что у каждой последовательности есть монотон-
 ная подпоследовательность.

ГЛАВА II.

Метод математической индукции.

§ 4. Сущность метода.

Рассмотрим такую задачу: на сколько частей делят плоскость n
 прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не
 проходят через одну точку?

Обозначим искомое число через a_n . Легко подсчитать, что
 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$ (проверьте!). Общая формула угадывает-
 ся не очень легко. Однако нетрудно получить рекуррентное соотно-
 шение, связывающее a_{n+1} и a_n . Предположим, что n прямых
 делят плоскость на a_n частей. Проведем $(n+1)$ -ю прямую.
 Она пересечет, по условию, каждую из n прямых и все эти n
 точек будут различны. Эти n точек разобьют нашу прямую на
 $n+1$ отрезков. Каждый из этих отрезков делит одну из имевшихся
 a_n частей на две, таким образом, количество частей увеличится
 на $n+1$, т.е. $a_{n+1} = a_n + (n+1)$.

Теперь допустим, что мы догадались до некоторого ответа, кото-
 рому удовлетворяют подсчитанные первые значения. Мы докажем

такой ответ: $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$.

Проверьте, что этой формуле удовлетворяют a_1, a_2, a_3 .
 (Предполагаемый ответ нужно уметь вычислять для любого n , напри-
 мер,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{k^2 + k + 2}{2}, \quad a_{k+1} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2} = \\ &= \frac{k^2 + 3k + 4}{2}, \quad a_{2m} = \frac{(2m)^2 + 2m + 2}{2} = \\ &= 2m^2 + m + 1 \quad \text{и} \quad m, m) \end{aligned}$$

Допустим, что мы уже доказали нашу формулу для некоторого числа n : $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$. Зная рекуррентное соотношение, легко подсчитать a_{n+1} :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2} + (n + 1) = \\ &= \frac{n^2 + n + 2 + 2(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + 3n + 4}{2} = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2}, \end{aligned}$$

что совпадает, как мы уже подсчитали раньше, с желаемым результатом для a_{n+1} .

Итак, если наша формула верна для некоторого конкретного числа n , то она верна и для следующего числа, $n + 1$. Но мы уже проверяли формулу для $n = 1, 2, 3$. Поэтому она будет верна для $n = 4$; она остается верной и для $n = 5$, и так можно проверить верность формулы для любого n . Таким образом, всегда

$$a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Метод рассуждения, примененный при решении задачи, называется методом полной математической индукции. Сформулируем его в общем виде.

Дана последовательность математических утверждений $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$. (Например, A_1 — одна прямая делит плоскость на $a_1 = 2$ части, A_2 — две прямых делят плоскость на $a_2 = \frac{2^2 + 2 + 2}{2}$ части, \dots, A_n — n прямых делят плоскость на $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$ части, \dots).

Пусть:

1) известно, что утверждение A_1 верно (т.е. мы проверили предполагаемый результат для $n = 1$);

2) доказано, что $A_n \Rightarrow A_{n+1}$, т.е. что если верно A_n , то верно и A_{n+1} .

Тогда верно каждое из утверждений A_n .

Итак, для того, чтобы, например, доказать какую-нибудь формулу методом математической индукции, нужно:

1) проверить её справедливость при нескольких первых значениях n (можно только для $n = 1$);

2) доказать следующую теорему: пусть формула верна для некоторого n , тогда она верна и для следующего номера, $n + 1$.

Важность этих двух пунктов в доказательстве теорем методом математической индукции поясним таким шуточным примером. Допустим,

что вы должны на автобусе ехать до некоторого места, находящегося от Вас за несколько остановок. Вам нужно: 1. Сесть на автобус. 2. Знать, что если он приехал на какую-то остановку, то он придет и на следующую. Второе условие гарантирует, что если вы начали движение, то оно вас обязательно приведет к цели. Если же оно соблюдается, но вы не сели в автобус, то, разумеется, вы никуда не приедете.

Приведем более серьезный пример. "Докажем", что все натуральные числа равны между собой. Для одного первого числа это, разумеется, справедливо. Пусть наше утверждение доказано для первых n натуральных чисел, т.е. предположим, что первые n натуральных чисел равны между собой. Докажем, что тогда и число $n + 1$ равно всем предшествующим. Действительно, по предположению, $n = n - 1$. Прибавим к обеим частям этого верного равенства по единице. Получим:

$n + 1 = n$, что и требовалось доказать. Вы, конечно, видите ошибку в рассуждении. Автобус-то движется, но мы в него не сели. Для того, чтобы можно было продолжать рассуждения, нам нужно иметь равенство хотя бы первых двух чисел.

Следует сказать, что затруднения с проверкой утверждения для первых значений n или, как говорят, с базой индукции встречаются редко. Гораздо более содержательной и трудной является вторая часть рассуждения — так называемый индукционный переход. Если для предполагаемой формулы, проверенной даже для очень большого числа первых случаев, не удается провести индукционного перехода, то она может оказаться неверной.

История математики знает много таких примеров. Долгое время, например, пытались доказать предположение, выдвинутое П. Ферма:

всякое число вида $2^{2^n} + 1$ является простым. Проверять такое утверждение очень трудно, т.к., например, при $n = 10$ это число имеет более 300 цифр. Это число является простым при $n = 1, 2, 3, 4$.

Но $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ оказалось составным.

Упражнения.

Цикл задач про числа Фибоначчи.

4.1. Докажите методом математической индукции следующие тождества, связывающие между собой члены последовательности чисел Фибоначчи

$$\{a_n\} (a_1 = a_2 = 1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n):$$

а) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$

Решение 4.1а) 1) Проверим формулу для $n=1$: $a_1 = 1$,
 $a_{1+2} - 1 = 2 - 1 = 1$; при $n=2$: $a_1 + a_2 = 2$, $a_4 - 1 = 2$.

2) Индукционный переход. Пусть формула верна для некоторого n . Докажем, что она верна для $n+1$. Требуется доказать:
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = a_{n+3} - 1$. Левая часть есть $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1}$.
 Заменим $a_1 + \dots + a_n$ по индукционному предположению на $a_{n+2} - 1$.
 Получим: $a_{n+2} - 1 + a_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2} - 1 = a_{n+3} - 1$, т.к. $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1}$
 по определению последовательности чисел Фибоначчи. Формула доказана.

б) $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$ (сумма чисел Фибоначчи с нечетными номерами).

в) $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$ (сумма чисел Фибоначчи с четными номерами).

г) $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n \cdot a_{n+1}$;

д) $a_{2n} = a_n (a_{n-1} + a_{n+1})$; $a_{2n} = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2$;

е) $a_{2n-1}^2 = a_n^2 + a_{2n-1}^2$;

ж) $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} + (-1)^{n-1}$.

з) Придумайте сами какое-нибудь тождество, связывающее числа Фибоначчи.

4.2. Вернемся к последовательности $\{a_n\}$, введенной нами в задаче 2.3. Используя результат этой задачи, а также доказанные в предыдущей задаче свойства чисел Фибоначчи, докажите следующие свойства последовательности $\{a_n\}$: а) $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, где a_n — n -ое число Фибоначчи. б). Если из последовательности $\{a_n\}$ выбрать члены с нечетными номерами, т.е. a_1, a_3, a_5, \dots , то получится возрастающая последовательность, если же выбрать члены с четными номерами: a_2, a_4, a_6, \dots , то получится убывающая последовательность.

Задачи на делимость.

4.3. а) Докажите, что $n^3 + 5n$ делится на 6.

Решение 4.3а). База: $n=1$, $n^3 + 5n = 6$ — делится на 6;

$n=2$, $n^3 + 5n = 18$ — делится на 6.* Индукционный переход: $(n+1)^3 + 5(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 5n + 5 = n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 = n^3 + 5n + 3n(n+1) + 6$.

Число $n^3 + 5n$ делится на 6 по индукционному предположению; число $3n(n+1)$ делится на 6, т.к. одно из двух чисел n , $n+1$ четно. Сумма чисел, делящихся на 6, тоже делится на 6.

б). Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

в) Докажите, что $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

г) Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 ($n=0, 1, 2, \dots$)

д) Докажите, что $3^{2n} - 1$ делится на 2^{n+2} и не делится на 2^{n+3} ($n=0, 1, 2, \dots$)

е) Докажите, что число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1} ($n=0, 1, 2, \dots$)

Задачи про неравенства.

4.4. а) Докажите по индукции утверждение задачи 3.4.а) и выведите из него, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}, \text{ если } n > 1.$$

Докажите неравенства (n — целое):

б) $2^n > 2n$ ($n > 2$);

в) $n! > 2^n$ ($n > 3$);

г) $(1+a)^n \geq 1 + na$, если $a > -1$, $n \neq 1$;

д) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$;

е) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n > 1$;

ж) $\sqrt{3n-2} \leq a_n \leq \sqrt{3n-2}$, $\{a_k\}$ — последовательность из

задачи 3.2., $n \geq 1$.

* Разумеется, проверка для $n=2$ здесь не обязательна.

4.5. а) Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n верно: $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$, $n \geq 2$.

б) Выведите из задачи а), что для любых положительных чисел x_1, \dots, x_n

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

§ 5. Суммирование конечных последовательностей.

Метод математической индукции бывает полезен для нахождения сумм конечного числа членов последовательности.

Пример. Найдите $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$.

Имеем: $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$, $S_4 = 16$.

Легко заметить, что это — последовательные квадраты натуральных чисел. Делаем предположение: $S_n = n^2$. Оно у нас проверено для первых четырех значений n . Сформулируем, что же нам надо доказать в качестве индукционного перехода: если $S_n = n^2$, то $S_{n+1} = (n+1)^2$. Доказательству поможет то, что мы знаем связь между S_n и S_{n+1} (рекуррентное соотношение): для того, чтобы получить сумму $(n+1)$ -го члена последовательности, надо к сумме n членов прибавить $(n+1)$ -ый член.

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}, \quad a_{n+1} = 2(n+1) - 1 = 2n+1.$$

$$S_{n+1} = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2,$$

что и требовалось доказать.

Еще один пример. Доказать, что $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

В этом примере нам не нужно угадывать формулу — она нам указана в условии. Проверим, верна ли она при $n=1$. Левая часть равна 1.

Правая: $\frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1$. Прогоним индукционный переход, т.е. доказываем теорему:

если $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, то для S_{n+1} имеет место такая же формула, т.е. $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

* Указание к задаче (а). Неравенство для $n+1$ числа a_1, \dots, a_{n+1} можно вывести из неравенства для n чисел, которые останутся, если выбросить из чисел a_1, \dots, a_{n+1} наибольшее. Можно считать, что наибольшее из этих чисел — a_{n+1} (подумайте, почему остальные случаи сводятся к этому).

Действительно, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + (n+1)^2$. Здесь, как и всегда при нахождении сумм, рекуррентное соотношение очень простое. Осталось провести выкладки:

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} [n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$

что и требовалось доказать.

Сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ часто обозначают так: $\sum_{i=1}^n a_i$. Σ — это буква "сигма" греческого алфавита. Около неё пишут общий член последовательности a_i и обозначают, как меняется номер i , например, от 1 до n . Если мы захотим сложить члены последовательности a_1, a_2, \dots, a_n с третьего до последнего, то это можно записать так: $\sum_{i=3}^n a_i$. Знак Σ удобен тем, что сокращает запись. При пользовании этим знаком полезны следующие простые свойства:

$$1. \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

$$2. \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k.$$

Индекс суммирования можно при необходимости переобозначить:

$$3. \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Можно также производить сдвиг индекса:

$$4. \sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=k-c}^{n-c} a_{i+c}$$

(для проверки начните выписывать члены суммы, стоящей слева, и суммы, стоящей справа).

Для нахождения сумм часто применяют следующий метод (иногда его называют методом конечных разностей). Пусть нужно найти

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k. \quad \text{Иногда нетрудно придумать функцию } g = f(x)$$

такую, что $a_k = f(k) - f(k-1)$. Подставляя эти разности в S_n , мы увидим, что все члены $f(k)$, кроме первого и последнего, будут входить в сумму дважды, один раз — с плюсом и один раз — с минусом. Ясно, что тогда $S = f(n) - f(0)$.

(Давайте задумаемся в смысл этого слова — "ясно". Мы видим на первых примерах, что происходит сложение противоположных членов и получается нужный результат. Мы скажем, что так будет происходить и для сум любого числа членов. Здесь и скрыта математическая индукция, хотя и очень простая. Попробуем провести рассуждения аккуратно.

1. $S_1 = a_1 = f(1) - f(0)$ — база индукции.

2. Пусть $S_{n-1} = f(n-1) - f(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + f(n) - f(n-1) = \\ &= f(n-1) - f(0) + f(n) - f(n-1) = \\ &= f(n) - f(0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Очень часто можно слышать слова: "А я доказал формулу без индукции". Почти наверняка Вы придумали рассуждение, в котором индукционный переход очевиден и Вы его отдельно не выделяете).

Пример. Найти $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Заметим, что $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Возьмем $f(x) = -\frac{1}{x+1}$. Тогда $a_k = f(k) - f(k-1)$, $S_n = f(n) - f(0) = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$.

Упражнения.

5.1. Докажите тождества: а). $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

б). $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

в). $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

г). $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

5.2. Найдите суммы: а). $S_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$.

б). $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n$.

в). $S_n = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$.

г). $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n-1)$.

д). $S_n = \sum_{k=1}^n kx^k$. (Указание: рассмотрите S_n и $S_n \cdot x$).

е). $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 x^k$.

5.3. Пусть существует такая функция $f(k)$, что каждый член последовательности $\{a_k\}$ представим в виде $a_k = f(k) - f(k-1)$, $k \geq 1$. Доказать, что в этом случае $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(n) - f(0)$ (при $n \geq 1$).

5.4. Найти суммы:

а) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ ($n \geq 2$);

в) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}$.

§ 6. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Определение. Последовательность, определяемая первым членом a_1 и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, где d — постоянное число, называется арифметической прогрессией. Число d называется разностью арифметической прогрессии.

Рекуррентное соотношение, определяющее арифметическую прогрессию, можно задать и словами: всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом d .

Найдем формулу для общего члена арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1; \quad a_2 = a_1 + d; \quad a_3 = a_2 + d = \\ &= a_1 + d + d = a_1 + 2d \quad \text{и т.д.} \end{aligned}$$

Видно, что каждый раз прибавляется еще одно слагаемое d .

Докажем, что всегда $a_n = a_1 + (n-1)d$. Это проверено нами для

$n = 1, 2, 3$. Сделаем индукционный переход: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + nd$. Действительно: $a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$, что и требовалось доказать.

Итак, $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Найдем сумму n первых членов арифметической прогрессии. Сначала докажем одно важное свойство членов конечной арифметической прогрессии a_1, a_2, \dots, a_n .

Суммы членов прогрессии, равноотстоящих от концов, равны.

Вычислим сначала $a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$.

Теперь докажем, что сумма k -го члена от конца и k -го от начала также равна $2a_1 + (n-1)d$. Заметим, что k -ый от конца член прогрессии есть $a_n - (k-1)d = a_{n-k+1}$;

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = \\ &= 2a_1 + (n-1)d, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Итак, $a_1 + a_n = a_n + a_1 = 2a_1 + (n-1)d$.
Теперь легко найти сумму n первых членов арифметической прогрессии. Запишем S_n дважды, но расставив слагаемые в разном порядке: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$, $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$.

Сложим почленно и воспользуемся доказанным свойством:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) = n[2a_1 + (n-1)d]. \text{ Получаем две формулы для } S_n: S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}; S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

Заметим еще одно часто употребляющееся (и легко доказываемое) свойство трех последовательных членов a_{n-1} , a_n , a_{n+1} арифметической прогрессии: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Это свойство часто записывают словами так: всякий член арифметической прогрессии является средним арифметическим двух соседних с ним.

Верно и более общее утверждение: всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое между двумя, равноотстоящими от него, то есть $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$.

Вы легко сможете доказать это свойство самостоятельно.

Определение. Последовательность, определяемая первым членом b_1 и рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где q — постоянное число, называется геометрической прогрессией. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Сформулируйте словами рекуррентное соотношение, задающее геометрическую прогрессию.

Формула общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ выводится точно так же, как и для арифметической прогрессии. Оставляем её доказательство для самостоятельной работы.

Сформулируйте свойства геометрической прогрессии, аналогичные свойствам арифметической прогрессии:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}; \\ b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}; b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}.$$

Для вывода формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии поступим так: рассмотрим

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$$

и умножим S_n на q : $S_n \cdot q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n$

Рассмотрим $S_n - S_n q$. Все члены, кроме крайних, уничтожатся.

Получим: $(1-q) S_n = b_1 - b_1 q^n$, откуда $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$)

(Случай $q = 1$, т.е. $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ не интересен, при этом

$$S_n = n b_1).$$

Упражнения.

6.1. Пусть a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. *) Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ тоже образуют арифметическую прогрессию.

6.2. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Обратные им числа также образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a = b = c$.

6.3. Найдите сумму $S_n = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77 \dots 7}_{n \text{ семерок}}$.

6.4. В турнире по волейболу набранные командами очки образовали арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (Все команды сыграли друг с другом ровно по одному разу. Ничьих в волейболе нет).

6.5. Назовем обобщенной последовательностью Фибоначчи такую последовательность: $a_1 = 1, a_2 = q, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. (Обычная последовательность Фибоначчи получается из обобщенной при $q = 1$). Найдите геометрические прогрессии, являющиеся обобщенными последовательностями Фибоначчи.

6.6. Решив предыдущую задачу, Вы должны были найти две обобщенных последовательности Фибоначчи, являющиеся геометрическими прогрессиями. Обозначим их через $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$. Докажите, что существуют два числа M и N такие, что любой член обычной последовательности Фибоначчи вычисляется так: $a_n = M u_n + N v_n$. Найдите эти числа M и N и напишите с их помощью формулу для a_n (не удивляйтесь, что эта формула для нахождения целого числа a_n содержит радикалы).

6.7. Пусть S_n обозначает сумму n первых членов арифметической прогрессии $\{a_k\}$.

*) Т.е. являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

а) Докажите, что $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

б) Докажите, что числа $S_n, (S_{2n} - S_n), (S_{3n} - S_{2n})$ образуют арифметическую прогрессию.

в) Докажите, тождества: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n),$
 $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0.$

6.8. Найдите сумму всех положительных трехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

6.9. Сумма S_n первых n членов последовательности выражается формулой $S_n = 3n^2$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, найдите её первый член и разность.

6.10. Члены некоторой последовательности являются суммами соответствующих членов двух геометрических прогрессий. Чему равен третий член этой последовательности, если первые два равны 0?

§ 7. Другие индукционные рассуждения.

Не всегда доказательство методом математической индукции проводится так, как это показано в § 4. Укажем на некоторые особенности в проведении индукционных рассуждений.

1. При формулировке индукционного перехода предполагается верным не только утверждение A_n , но и все утверждения до A_n включительно.

Пример 1. Доказать, что любой (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить на треугольники. База здесь очевидна. Предположим, что любой многоугольник с числом сторон, не превосходящим n , можно разбить на треугольники. Возьмем теперь произвольный $(n+1)$ -угольник. Заметим, что в нем всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника. Этого можно достичь, например, вращением одной из его сторон вокруг вершины. Эта диагональ разбивает $(n+1)$ -угольник на два многоугольника, с числом сторон у каждого, не превосходящим n . Применив к ним индукционное предположение, получим разбиение на треугольники исходного многоугольника.

2. С помощью индукционного перехода мы можем из A_n вывести не A_{n+1} , а только A_{n+k} (происходит прыжок через k членов). Если база будет доказана для первых k утверждений A_1, \dots, A_k , то метод индукции останется в силе.

Пример 2. Доказать, что всякое целое число рублей, больше 7, можно заплатить без сдачи трехками и пяттерками.

Пусть мы заплатили n рублей. Добавляя одну трехку, мы сможем заплатить и $n+3$ рубля. Произошел скачок на 3: $n \rightarrow n+3$. Ясно, как можно заплатить 8, 9 и 10 рублей: $8 = 5 + 3$; $9 = 3 \times 3$; $10 = 2 \times 5$. Начиная с 8, 9 и 10 и шагая через 3 номера, мы получим любое число, больше 7:

8;	11;	14;	17
9;	12;	15;	18
10;	13;	16;	19

В этом же примере мы столкнулись и с такой особенностью: утверждение - любое целое число n рублей можно заплатить без сдачи трехками и пяттерками - оказалось верным не с самого начала, а при $n > 7$.

Надо отметить, что разного сорта индукционные рассуждения широко используются во всех областях математики. При этом в более сложных задачах очень важно правильно "выбрать n " - тот параметр, по которому мы проводим индукцию (в примере 1 это было число сторон многоугольника, в примере 2 - число рублей, которые мы хотим заплатить). А как быть в следующих задачах?

Пример 3. n - угольник разбит d диагоналями на несколько частей; диагонали пересекаются внутри многоугольника в p точках, причём в каждой точке пересекаются только две. На сколько частей эти диагонали разбивают n -угольник?

Пример 4. Доказать, что для любых целых m и n , $0 < m < n$

$$\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \leq n^m (n+1)^m.$$

Упражнения.

7.1. Докажите, что существует многогранник, имеющий ровно k ребер ($k > 7$).

7.2. Пусть a_n - n -ое число Фибоначчи
 $(a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n).$

Докажите, что $5n$ делится на 5.

7.3. Обобщая частные результаты, угадайте формулы для следующих выражений, а затем докажите справедливость установленных Вами формул: а), $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1)$;

$$a). (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots [1 - \frac{1}{(n+1)^2}]$$

7.4. Докажите, что плоскость, разбитую на части n окружностями, можно закрасить черной и белой краской так, что любые две соседние части будут окрашены в разные цвета.

7.5. а). Докажите, что n плоскостей, проходящих через одну точку так, что никакие три из них не проходят через одну прямую, делят пространство на $A_n = n(n-1)+2$ частей.

б). Докажите, что n плоскостей, из которых никакие три не параллельны одной прямой и никакие четыре не проходят через одну точку, делят пространство на $\frac{n^3+5n}{6}+1$ частей.

7.6. Решите задачу, приведенную в примере 3 этого раздела; ответ - число частей - зависит от p и a .

7.7. Докажите неравенство из примера 4 этого раздела.

7.8. Докажите, что команды, участвовавшие в волейбольном турнире (где каждые две команды встретились один раз), можно занумеровать так, чтобы оказалось, что каждая команда выиграла у той, которая имеет номер на 1 больше.

7.9. Докажите, что для любого натурального числа n существует конечный набор точек плоскости таких, что если произвольно выбрать одну из них, то среди оставшихся окажется ровно n точек, удаленных от выбранной на расстояние 1.

7.10. Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно, и притом единственным способом, представить в виде:

$$\frac{(x+y)^2 + 3x+y}{2}$$

где x, y - целые неотрицательные числа.

7.11. На окружности расставлено n чисел, сумма которых положительна. Докажите, что можно выбрать из них такое число, что если, начиная с него, занумеровать все данные числа против часовой стрелки по порядку: a_1, a_2, \dots, a_n , то будут выполняться все неравенства: $a_1 > 0$;

$$a_1 + a_2 > 0; \\ a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} > 0.$$

7.12. n^2+1 различных чисел выписаны в ряд. Докажите, что из них всегда можно выбрать $(n+1)$ чисел так, что они расположены в данном ряду в порядке возрастания или в порядке убывания.

Пример. ($n=3$): 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; 3; 5; $\frac{1}{2}$; 10; 0,8; $\sqrt{3}$.

Указание. Рассмотрите те числа в этом ряду, перед которыми нет больших, и те, за которыми нет больших. Если среди них нельзя выбрать требуемое $(n+1)$ число, то зачеркните их и примените индукционное предположение к оставшимся.

§ 8. Разные задачи.

В этом параграфе мы дадим несколько задач на метод математической индукции и прогрессии, часть из которых решим в тексте.

Пример I. Найти сумму $S_n = a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + \dots + (a+nd)q^n$

Решение. Представим S_n в виде $S_n = S'_n + S''_n$, где $S'_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n$, $S''_n = dq + 2dq^2 + \dots + ndq^n$.

Сумма S'_n представляет собой сумму первых $n+1$ членов геометрической прогрессии, так что $S'_n = \frac{a(q^{n+1}-1)}{q-1}$ при $q \neq 1$, и $S'_n = (n+1)a$ при $q=1$.

Заметим, что при $q=1$ S''_n есть - сумма первых n членов арифметической прогрессии и, значит, $S''_n = \frac{n(n+1)d}{2}$.

Рассмотрим выражение $S'_n - q S''_n$ при $q \neq 1$:

$$S'_n - q S''_n = aq + dq^2 + \dots + dq^n - ndq^{n+1} = \\ = \frac{dq(q^n-1)}{q-1} - ndq^{n+1} = dq[\frac{q^n-1}{q-1} - nq^n],$$

поэтому при $q \neq 1$ $S'_n = \frac{dq}{q-1}[nq^n - \frac{q^n-1}{q-1}]$. (I)

Докажем методом математической индукции, что формула (I) верна для любого $n \geq 1$. При $n=1$, как легко убедиться, равенство (I) верно. Предполагая, что оно верно для некоторого $n \geq 1$, покажем, что тогда оно верно и для $n+1$. Действительно,

1. $S_1 = a_1 = f(1) - f(0)$ — база индукции.

2. Пусть $S_{n-1} = f(n-1) - f(0)$. Тогда

$$\begin{aligned} S_n &= S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + f(n) - f(n-1) = \\ &= f(n-1) - f(0) + f(n) - f(n-1) = \\ &= f(n) - f(0), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Очень часто можно слышать слова: "А я доказал формулу без индукции". Почти наверняка Вы придумали рассуждение, в котором индукционный переход очевиден и Вы его отдельно не выделяете).

Пример. Найти $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$. Заметим, что $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Возьмем $f(x) = -\frac{1}{x+1}$. Тогда $a_k = f(k) - f(k-1)$, $S_n = f(n) - f(0) = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}$.

Упражнения.

5.1. Докажите тождества: а). $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

б). $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

в). $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

г). $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

5.2. Найдите суммы: а). $S_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$.

б). $S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n$.

в). $S_n = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$.

г). $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + \dots + n(3n-1)$.

д). $S_n = \sum_{k=1}^n kx^k$. (Указание: рассмотрите S_n и $S_n \cdot x$).

е). $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 x^k$.

5.3. Пусть существует такая функция $f(k)$, что каждый член последовательности $\{a_k\}$ представим в виде $a_k = f(k) - f(k-1)$, $k \geq 1$. Доказать, что в этом случае $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = f(n) - f(0)$ (при $n \geq 1$).

5.4. Найти суммы:

а) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

б) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ ($n \geq 2$);

в) $S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)}$.

§ 6. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Определение. Последовательность, определяемая первым членом a_1 и рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, где d — постоянное число, называется арифметической прогрессией. Число d называется разностью арифметической прогрессии.

Рекуррентное соотношение, определяющее арифметическую прогрессию, можно задать и словами: всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом d .

Найдем формулу для общего члена арифметической прогрессии:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1; a_2 = a_1 + d; a_3 = a_2 + d = \\ &= a_1 + d + d = a_1 + 2d \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Видно, что каждый раз прибавляется еще одно слагаемое d .

Докажем, что всегда $a_n = a_1 + (n-1)d$. Это проверено нами для

$n = 1, 2, 3$. Сделаем индукционный переход: $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{n+1} = a_1 + nd$. Действительно: $a_{n+1} = a_n + d = a_1 + (n-1)d + d = a_1 + nd$, что и требовалось доказать.

Итак, $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Найдем сумму n первых членов арифметической прогрессии. Сначала докажем одно важное свойство членов конечной арифметической прогрессии a_1, a_2, \dots, a_n .

Суммы членов прогрессии, равноотстоящих от концов, равны.

Вычислим сначала $a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$.

Теперь докажем, что сумма k -го члена от конца и k -го от начала также равна $2a_1 + (n-1)d$. Заметим, что k -ый от конца член прогрессии есть $a_n - (k-1)d = a_{n-k+1}$;

$$\begin{aligned} a_k + a_{n-k+1} &= a_1 + (k-1)d + a_1 + (n-k+1-1)d = \\ &= 2a_1 + (n-1)d, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Итак, $a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d$. Теперь легко найти сумму n первых членов арифметической прогрессии. Запишем S_n дважды, но расставив слагаемые в разном порядке: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$, $S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$.

Сложим почленно и воспользуемся доказанным свойством:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) = n[2a_1 + (n-1)d]. \text{ Получаем две формулы для } S_n: S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}; S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)d]n}{2}.$$

Заметим еще одно часто употребляющееся (и легко доказываемое) свойство трех последовательных членов a_{n-1} , a_n , a_{n+1} арифметической прогрессии: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Это свойство часто записывают словами так: всякий член арифметической прогрессии является средним арифметическим двух соседних с ним.

Верно и более общее утверждение: всякий член арифметической прогрессии есть среднее арифметическое между двумя, равноотстоящими от него, то есть $a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$.

Вы легко сможете доказать это свойство самостоятельно.

Определение. Последовательность, определяемая первым членом b_1 и рекуррентным соотношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где q — постоянное число, называется геометрической прогрессией. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии.

Сформулируйте словами рекуррентное соотношение, задающее геометрическую прогрессию.

Формула общего члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ выводится точно так же, как и для арифметической прогрессии. Оставляем её доказательство для самостоятельной работы.

Сформулируйте свойства геометрической прогрессии, аналогичные свойствам арифметической прогрессии:

$$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}, \\ b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}; b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}.$$

Для вывода формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии поступим так: рассмотрим

$$S_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1}$$

и умножим S_n на q : $S_n \cdot q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + \dots + b_1 q^n$

Рассмотрим $S_n - S_n q$. Все члены, кроме крайних, уничтожатся.

Получим: $(1-q) S_n = b_1 - b_1 q^n$, откуда $S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ ($q \neq 1$)

(Случай $q = 1$, т.е. $b_1 = b_2 = \dots = b_n$ не интересен, при этом $S_n = n b_1$).

Упражнения.

6.1. Пусть a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{a^2}{b+c}, \frac{b^2}{c+a}, \frac{c^2}{a+b}$ тоже образуют арифметическую прогрессию.

6.2. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Обратные им числа также образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a = b = c$.

6.3. Найдите сумму $S_n = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77 \dots 7}_{n \text{ семерок}}$.

6.4. В турнире по волейболу набранные командами очки образовали арифметическую прогрессию. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (Все команды сыграли друг с другом ровно по одному разу. Ничьих в волейболе нет).

6.5. Назовем обобщенной последовательностью Фибоначчи такую последовательность: $a_1 = 1, a_2 = q, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. (Обычная последовательность Фибоначчи получается из обобщенной при $q = 1$). Найдите геометрические прогрессии, являющиеся обобщенными последовательностями Фибоначчи.

6.6. Решив предыдущую задачу, Вы должны были найти две обобщенных последовательности Фибоначчи, являющиеся геометрическими прогрессиями. Обозначим их через $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$. Докажите, что существуют два числа M и N такие, что любой член обычной последовательности Фибоначчи вычисляется так: $a_n = M u_n + N v_n$. Найдите эти числа M и N и напишите с их помощью формулу для a_n (не удивляйтесь, что эта формула для нахождения целого числа a_n содержит радикалы).

6.7. Пусть S_n обозначает сумму n первых членов арифметической прогрессии $\{a_k\}$.

***)** Т.е. являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

а) Докажите, что $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow \frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

б) Докажите, что числа $S_n, (S_{2n} - S_n), (S_{3n} - S_{2n})$ образуют арифметическую прогрессию.

в) Докажите, тождества: $S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$,
 $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$.

6.8. Найдите сумму всех положительных трехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

6.9. Сумма S_n первых n членов последовательности выражается формулой $S_n = 3n^2$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, найдите её первый член и разность.

6.10. Члены некоторой последовательности являются суммами соответствующих членов двух геометрических прогрессий. Чему равен третий член этой последовательности, если первые два равны 0?

§ 7. Другие индукционные рассуждения.

Не всегда доказательство методом математической индукции проводится так, как это показано в § 4. Укажем на некоторые особенности в проведении индукционных рассуждений.

1. При формулировке индукционного перехода предполагается верным не только утверждение A_n , но и все утверждения до A_n включительно.

Пример 1. Доказать, что любой (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить на треугольники. База здесь очевидна. Предположим, что любой многоугольник с числом сторон, не превосходящим n , можно разбить на треугольники. Возьмем теперь произвольный $(n+1)$ -угольник. Заметим, что в нем всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника. Этого можно достичь, например, вращением одной из его сторон вокруг вершины. Эта диагональ разбивает $(n+1)$ -угольник на два многоугольника, с числом сторон у каждого, не превосходящим n . Применив к ним индукционное предположение, получим разбиение на треугольники исходного многоугольника.

2. С помощью индукционного перехода мы можем из A_n вывести не A_{n+1} , а только A_{n+k} (происходит прыжок через k членов). Если база будет доказана для первых k утверждений A_1, \dots, A_k , то метод индукций останется в силе.

Пример 2. Доказать, что всякое целое число рублей, больше 7, можно заплатить без сдачи трехками и пяттерками.

Пусть мы заплатили n рублей. Добавляя одну трехку, мы сможем заплатить и $n+3$ рубля. Произошел скачок на 3: $n \Rightarrow n+3$. Ясно, как можно заплатить 8, 9 и 10 рублей: $8 = 5 + 3$; $9 = 3 \times 3$; $10 = 2 \times 5$. Начиная с 8, 9 и 10 и шагая через 3 номера, мы получим любое число, больше 7:

8;	11;	14;	17
9;	12;	15;	18
10;	13;	16;	19

В этом же примере мы столкнулись и с такой особенностью: утверждение — любое целое число n рублей можно заплатить без сдачи трехками и пяттерками — оказалось верным не с самого начала, а при $n > 7$.

Надо отметить, что разного сорта индукционные рассуждения широко используются во всех областях математики. При этом в более сложных задачах очень важно правильно "выбрать n " — тот параметр, по которому мы проводим индукцию (в примере 1 это было число сторон многоугольника, в примере 2 — число рублей, которые мы хотим заплатить). А как быть в следующих задачах?

Пример 3. n — угольник разбит d диагоналями на несколько частей; диагонали пересекаются внутри многоугольника в p точках, причем в каждой точке пересекаются только две. На сколько частей эти диагонали разбивают n -угольник?

Пример 4. Доказать, что для любых целых m и n , $0 < m < n$

$$\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \leq n^m (n+1)^m.$$

Упражнения.

7.1. Докажите, что существует многогранник, имеющий ровно k ребер ($k > 7$).

7.2. Пусть a_n — n -ое число Фибоначчи ($a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$).

Докажите, что 5^n делится на 5.

7.3. Обобщая частные результаты, угадайте формулы для следующих выражений, а затем докажите справедливость установленных Вами формул: а). $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1)$;

б). $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots [1 - \frac{1}{(n+1)^2}]$.

7.4. Докажите, что плоскость, разбитую на части n окружностями, можно закрасить черной и белой краской так, что любые две соседние части будут закрашены в разные цвета.

7.5. а). Докажите, что n плоскостей, проходящих через одну точку так, что никакие три из них не проходят через одну прямую, делят пространство на $A_n = n(n-1)+2$ частей.

б). Докажите, что n плоскостей, из которых никакие три не параллельны одной прямой и никакие четыре не проходят через одну точку, делят пространство на $\frac{n^3+5n}{6} + 1$ частей.

7.6. Решите задачу, приведенную в примере 3 этого раздела; ответ - число частей - зависит от p и a .

7.7. Докажите неравенство из примера 4 этого раздела.

7.8. Докажите, что команды, участвовавшие в волейбольном турнире (где каждые две команды встретились один раз), можно занумеровать так, чтобы оказалось, что каждая команда выиграла у той, которая имеет номер на 1 больше.

7.9. Докажите, что для любого натурального числа n существует конечный набор точек плоскости таких, что если произвольно выбрать одну из них, то среди оставшихся окажется ровно n точек, удаленных от выбранной на расстояние 1.

7.10. Докажите, что каждое целое неотрицательное число можно, и притом единственным способом, представить в виде:

$$\frac{(x+y)^2 + 3x+y}{2}$$

где x, y - целые неотрицательные числа.

7.11. На окружности расставлено n чисел, сумма которых положительна. Докажите, что можно выбрать из них такое число, что если, начиная с него, занумеровать все данные числа против часовой стрелки по порядку: a_1, a_2, \dots, a_n , то будут выполняться все неравенства: $a_1 > 0$;

$$a_1 + a_2 > 0;$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} > 0.$$

7.12. n^2+1 различных чисел выписаны в ряд. Докажите, что из них всегда можно выбрать $(n+1)$ чисел так, что они расположены в данном ряду в порядке возрастания или в порядке убывания.

Пример. ($n=3$): 2; 1; $\frac{1}{2}$; 3; 5; $\frac{1}{10}$; 0,8; $\sqrt{3}$.

Указание. Рассмотрите те числа в этом ряду, перед которыми нет больших, и те, за которыми нет больших. Если среди них нельзя выбрать требуемое $(n+1)$ число, то зачеркните их и примените индукционное предположение к оставшимся.

§ 8. Разные задачи.

В этом параграфе мы дадим несколько задач на метод математической индукции и прогрессии, часть из которых решим в тексте.

Пример I. Найти сумму $S_n = a + (a+d)q + (a+2d)q^2 + \dots + (a+nd)q^n$

Решение. Представим S_n в виде $S_n = S'_n + S''_n$, где

$$S'_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^n,$$

$$S''_n = dq + 2dq^2 + \dots + ndq^n.$$

Сумма S'_n представляет собой сумму первых $n+1$ членов геометрической прогрессии, так что $S'_n = \frac{a(q^{n+1}-1)}{q-1}$ при $q \neq 1$, и $S'_n = (n+1)a$ при $q=1$.

Заметим, что при $q=1$ S''_n есть - сумма первых n членов арифметической прогрессии и, значит, $S''_n = \frac{n(n+1)d}{2}$.

Рассмотрим выражение $S_n - qS_n$ при $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} S_n - qS_n &= dq + dq^2 + \dots + dq^n - ndq^{n+1} = \\ &= \frac{dq(q^n-1)}{q-1} - ndq^{n+1} = dq \left[\frac{q^n-1}{q-1} - nq^n \right], \end{aligned}$$

$$\text{поэтому при } q \neq 1 \quad S_n = \frac{dq}{q-1} \left[nq^n - \frac{q^n-1}{q-1} \right]. \quad (I)$$

Докажем методом математической индукции, что формула (I) верна для любого $n \geq 1$. При $n=1$, как легко убедиться, равенство (I) верно. Предполагая, что оно верно для некоторого $n \geq 1$, покажем, что тогда оно верно и для $n+1$. Действительно,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)aq^{n+1} = \frac{aq}{q-1} [nq^n - \frac{q^n-1}{q-1}] + (n+1)aq^{n+1} = \\ &= \frac{aq}{q-1} [nq^n - \frac{q^n-1}{q-1} + (n+1)(q-1)q^n] = \frac{aq}{q-1} [(n+1)q^{n+1} - \frac{q^{n+1}-1}{q-1}] = \\ &= \frac{aq}{q-1} [(n+1)q^{n+1} - \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - q^n] = \frac{aq}{q-1} [(n+1)q^{n+1} - \frac{q^{n+1}-1}{q-1}]. \end{aligned}$$

Итак, равенство (I) доказано при любом $n \geq 1$. Теперь найдем исходную сумму $S_n = S'_n + S''_n$: $S_n = (n+1)a + \frac{n(n+1)a}{2} = (n+1)[a + \frac{na}{2}]$ если $q=1$, а

$$\begin{aligned} \text{при } q \neq 1 \quad S_n &= \frac{a(q^{n+1}-1)}{q-1} + \frac{aq}{q-1} [nq^n - \frac{q^n-1}{q-1}] = \\ &= \frac{1}{q-1} [aq^{n+1} - a + naq^{n+1} - \frac{aq(q^n-1)}{q-1}] = \\ &= \frac{1}{q-1} [a(q^{n+1}-1) + a[nq^{n+1} - \frac{q^{n+1}-q}{q-1}]]. \end{aligned}$$

Замечание. Формулу (I) можно найти несколько иначе:

$$\begin{aligned} S'_n &= aq + 2aq^2 + \dots + naq^n = a(q + q^2 + \dots + q^n) + \\ &+ a(q^2 + q^3 + \dots + q^n) + \dots + a(q^{n-1} + q^n) + aq^n = \\ &= a[\frac{q^{n+1}-q}{q-1} + \frac{q^{n+1}-q^2}{q-1} + \dots + \frac{q^{n+1}-q^n}{q-1} + \frac{q^{n+1}-q^n}{q-1}] = \\ &= \frac{a}{q-1} (nq^{n+1} - q - q^2 - \dots - q^n) = \frac{a}{q-1} [nq^{n+1} - \frac{q^{n+1}-q}{q-1}] = \\ &= \frac{aq}{q-1} [nq^n - \frac{q^n-1}{q-1}]. \end{aligned}$$

Упражнения.

8.1. Докажите тождества:

- $\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n-1)2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} = 2^n$;
- $1 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;
- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$;

- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$;
- $\frac{1}{n} + \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}) + \frac{1}{3}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2}) + \dots + \frac{1}{n}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

8.2. Докажите методом математической индукции, что число $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ при $n \geq 0$ делится на 19.

8.3. Докажите методом математической индукции, что число $\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{8}$ при $n \geq 0$ целое.

8.4. Найдите суммы:

- $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$;
- $n x + (n-1)x^2 + \dots + 2x^{n-1} + x^n$;
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$;
- $1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + \dots + n \cdot 2 + (n+1)$;
- $1 \cdot 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + \dots + n(n+1)2 + (n+1)(n+2)$.

Пример 2. Доказать неравенство $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ при $n \geq 1$.

при $n \geq 1$

Решение. Будем доказывать это неравенство методом математической индукции. Положим $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ и покажем, что

$\frac{13}{24} < S_n$ для любого $n \geq 1$. Для $n=2$ неравенство $\frac{13}{24} < S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ справедливо. Предполагая, что неравенство $\frac{13}{24} < S_n$ справедливо для некоторого $n \geq 1$, докажем, что тогда верно и неравенство $\frac{13}{24} < S_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2(n+1)}$. Для этого достаточно доказать, что $S_n < S_{n+1}$, т.е. что

$S_{n+1} - S_n > 0$. Но последнее неравенство действительно имеет место, поскольку $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)(2n+2)} > 0$.

Пример 3. Доказать неравенство $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $n \geq 1$.

Решение. При $n=1$ неравенство $2(\sqrt{2}-1) < 1$ верно, поскольку оно равносильно неравенству $2\sqrt{2} < 3$, справедливому, так как $8 = (2\sqrt{2})^2 < 9 = 3^2$. Предполагая, что для некоторого $n \geq 1$ справедливо неравенство $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, покажем, что тогда верно и неравенство $2(\sqrt{n+2}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Из неравенства $2(\sqrt{n+1}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ следует, что для доказательства неравенства $2(\sqrt{n+2}-1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$ достаточно получить, что $2(\sqrt{n+2}-1) < 2(\sqrt{n+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, или что $2\sqrt{n+2} < 2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, что верно, поскольку $(2\sqrt{n+2})^2 = 4n+8 < 4n+4+4+\frac{1}{n+1} = (2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}})^2$.

Пример 4. Доказать неравенство $2^n > n^3$ при $n \geq 10$.

Решение. Для $n=10$ неравенство $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ справедливо. Предположим, что неравенство $2^n > n^3$ справедливо для некоторого $n \geq 10$ и докажем, что в таком случае справедливо неравенство $2^{n+1} > (n+1)^3$. Это неравенство можно переписать в виде $2 \cdot 2^n = 2^{n+1} > (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Поскольку, по предположению, $2^n > n^3$, нам достаточно доказать, что $3n^2 + 3n + 1 < n^3$ при $n \geq 10$. Для этого применим второй раз метод математической индукции. При $n=10$ неравенство $3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 331 < 1000 = 10^3$ верно. Предположим, что для некоторого $n \geq 10$ верно неравенство $3n^2 + 3n + 1 < n^3$ и покажем, что тогда верно и неравенство $3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 < (n+1)^3$. Последнее неравенство перепишем в виде $3n^2 + 3n + 1 + 6(n+1) < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 6(n+1) + 1$. Так как по предположению $3n^2 + 3n + 1 < n^3$, то нам достаточно убедиться, что $6(n+1) < 3n(n+1) + 1$ при $n \geq 10$. Но при $n \geq 10$ $3n > 6$ и, значит, неравенство $6(n+1) < 3n(n+1) + 1$ при $n \geq 10$ верно. Этим справедливость неравенства $2^n > n^3$ для любого $n \geq 10$ полностью доказана.

Пример 5. Доказать неравенство $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n \geq 3$.

Решение. Вместо неравенства $n^{n+1} > (n+1)^n$ будем доказывать равносильное неравенство $n > (\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n$ при $n \geq 3$. Для $n=3$ неравенство $3 > (\frac{4}{3})^3 = (1 + \frac{1}{3})^3$

верно. Предположим, что неравенство $n > (1 + \frac{1}{n})^n$ верно для некоторого $n \geq 3$ и докажем, что тогда $n+1 > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$. Так как для любого $n \geq 1$ верно, что $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ и, по предположению, верно, что $n > (1 + \frac{1}{n})^n$, то

$$(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n+1})^n (1 + \frac{1}{n+1}) < (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n+1}) < n (1 + \frac{1}{n+1}) = n + \frac{n}{n+1} < n+1$$

Пример 6. Доказать неравенство $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$ при $n > 1$, где $a+b > 0$ и $a \neq b$.

Решение. При $n=2$ неравенство $2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ верно, поскольку оно равносильно неравенству $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 > 0$, справедливому при $a \neq b$. Предположим, что для некоторого $n > 1$ $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$ и докажем, что в таком случае $2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > (a+b)^{n+1}$. Так как по условию $a+b > 0$, то из $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$ вытекает, что $2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b) > (a+b)^{n+1}$. Поэтому для доказательства неравенства $2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > (a+b)^{n+1}$ достаточно доказать неравенство $2^n(a^{n+1} + b^{n+1}) > 2^{n-1}(a^n + b^n)(a+b)$, которое после сокращения на 2^{n-1} и очевидных элементарных преобразований легко сводится к равносильному неравенству $(a^n - b^n)(a-b) > 0$. Для доказательства последнего неравенства нужно рассмотреть два возможных случая: $a > b$ и $a < b$. Если $a > b$, то $a-b > 0$. Отсюда и из условия $a+b > 0$ вытекает, что $a^2 - b^2 > 0$, т.е. $a^2 > b^2$. Из $a > b$ и $a^2 > b^2$ следует, что $a^n > b^n$, т.е. $a^n - b^n > 0$ для любого $n \geq 1$. Таким образом, мы имеем $a-b > 0$ и $a^n - b^n > 0$; следовательно, $(a^n - b^n)(a-b) > 0$ при $a > b$. Если же $a < b$, то, повторив только что проведенные рассуждения, мы получим, что $a^n < b^n$ для любого $n \geq 1$. Неравенства $a < b$ и $a^n < b^n$ равносильны соответственно неравенствам $a-b < 0$ и $a^n - b^n < 0$, из которых и в этом случае вытекает, что $(a^n - b^n)(a-b) > 0$.

Упражнения.

6.5. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ при $n \geq 1$;

б) $2^n > n^2 + 2$ при $n \geq 4$;

в) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ при $n \geq 1$;

г) $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n \geq 1$;

- а) $(n!)! < 2^{2n} (n!)^2$ при $n \geq 1$;
 б) $(n!)^2 \geq n^n$ при $n \geq 2$;
 в) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ при $n \geq 1$,
 где $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;
 г) $\frac{1+a^{2n}}{1+a^{2n-1}} \geq \frac{1+a^2}{1+a}$ при $n \geq 1$, если $a > 0$.

Указание к задаче 8.5, а): это неравенство сводите к равносильному неравенству $n(1+a^{2n}) \geq a+a^2+\dots+a^{2n-1}$ при $n \geq 1$, $a > 0$, которое доказывается методом математической индукции с использованием неравенства $1+a^k \geq a+a^{k-1}$, верного для любого натурального $k \geq 1$ и любого $a > 0$.

Пример 2. Доказать, что для любого натурального n число $(\sqrt{2}-1)^n$ представимо в виде разности $\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, где m — некоторое натуральное число.

Решение. Для решения этой задачи мы будем доказывать сразу три утверждения: $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ для некоторого целого $m \geq 0$, $(\sqrt{2}-1)^n = (-1)^{n-1}(p\sqrt{2}-q)$ для некоторых положительных целых чисел p и q и, кроме того, при нечетном n $m+1=2p^2$ и $m=q^2$, а при четном n : $m+1=q^2$ и $m=2p^2$.

Для $n=1$ все три утверждения верны; в этом случае $m=p^2=q^2=1$. Предположим, что для некоторого $n \geq 1$ верны утверждения:

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}, (\sqrt{2}-1)^n = (-1)^{n-1}(p\sqrt{2}-q)$$

для некоторых целых положительных чисел m , p и q и при этом $m+1=2p^2$, $m=q^2$, если n нечетно, и $m+1=q^2$, $m=2p^2$, если n четно. Тогда $(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (-1)^n(p\sqrt{2}-q_1)$.

$$(\sqrt{2}-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}(-p-q)\sqrt{2} + (-1)^n(2p+q) = (-1)^n[(p+q)\sqrt{2} - (2p+q)] = (-1)^n(p_1\sqrt{2}-q_1)$$

где $p_1 = p+q$ и $q_1 = 2p+q$. Теперь рассмотрим два случая: когда n нечетно и когда n четно. При n нечетном из предполагаемых равенств $m+1=2p^2$ и $m=q^2$ вытекает, что $q_1^2 - 2p_1^2 = 4p^2 + 4pq + q^2 - 2p^2 - 4pq - 2q^2 = 2p^2 - q^2 = m+1-m=1$.

Полагая $m_1 = q_1^2 - 1$, мы получим, что $m_1+1 = 2p_1^2$ и, кроме того, $\sqrt{m_1+1}-\sqrt{m_1} = q_1 - p_1\sqrt{2} = (-1)^n$. При n четном аналогичным образом получаем, что $2p_1^2 - q_1^2 = 1$. Полагая в этом случае $m_1 = 2p_1^2 - 1$, мы найдем, что $m_1+1 = 2p_1^2$, $m_1 = q_1^2$ и $\sqrt{m_1+1}-\sqrt{m_1} = p_1\sqrt{2}-q_1 = (-1)^n(p_1\sqrt{2}-q_1) = (-1)^{n+1}$. Таким образом, в обоих случаях из предположения справедливости всех трех наших утверждений для некоторого $n \geq 1$ вытекает, что те же три утверждения справедливы и для $n+1$. Тем самым три наших утверждения и, в частности, утверждение о том, что $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1}-\sqrt{m}$ для некоторого натурального m , доказаны для любого $n \geq 1$.

Упражнения

8.6. а) Третий член арифметической прогрессии равен 0. Найдите сумму первых 5-ти членов. б) Третий член геометрической прогрессии равен 4. Найдите произведение первых 5-ти членов.

8.7. Докажите равенство: $\frac{S_n}{S_{2n}-S_n} = \frac{S_{2n}-S_n}{S_{4n}-S_{2n}}$, где через S_k обозначена сумма k первых членов геометрической прогрессии.

8.8. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — n первых членов геометрической прогрессии. Зная $S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, найдите $P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$.

8.9. Квадраты 12-го, 13-го и 15-го членов арифметической прогрессии образуют геометрическую прогрессию. Найдите все возможные знаменатели этой прогрессии.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Глава I. Основные понятия.....	3
§1. Определения.....	3
§2. Рекуррентные соотношения.....	5
§3. Свойства числовых последовательностей.....	7
Глава II. Метод математической индукции.....	11
§4. Сущность метода.....	11
§5. Суммирование конечных последовательностей..	16
§6. Арифметическая и геометрическая прогрессии..	19
§7. Другие индукционные рассуждения.....	22
§8. Разные задачи.....	25

Подписано к печати 12.7.74г. Заказ 406

Тираж 8000 экз. Объем 1 п.л. Цена 5 коп.

Ротапринт НИИ общей педагогики АПН СССР
Нахимовский проспект, дом 4

I.2.6. Угадайте формулу общего члена последовательности:

$$1; 2\frac{1}{4}; 2\frac{7}{9}; 3\frac{1}{16}; 3\frac{6}{25}; \dots;$$

$$\text{Ответ: } a_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$$

$$\text{Решение: } 1; \frac{3^2}{2^2}; \frac{5^2}{3^2}; \frac{7^2}{4^2}; \dots$$

I.2.г. Угадайте формулу общего члена последовательности:

$$2; 10; 26; 52; 242; 730; \dots$$

$$\text{Ответ: } a_n = 3^n + (-1)^n$$

$$\text{Решение: } 3-1, 3^2+1, 3^3-1, 3^4+1, 3^5-1, 3^6+1; \dots$$

2.2. Последовательность (a_n) задается двумя первыми членами

$$a_1 = 0, a_2 = 1 \text{ и рекуррентным соотношением } a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \quad (n \geq 1).$$

$$\text{Найдите } a_{30}; a_{885}.$$

$$\text{Ответ: } a_{30} = -1; a_{885} = 1.$$

Решение: Данная последовательность периодическая с периодом "шесть":

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = -1, a_7 = 0, \dots$$

$$a_{30} = a_{18 \cdot 6} = a_6 = -1; a_{885} = a_{147 \cdot 6 + 3} = a_3 = 1$$

$$4 \quad 2.7.a \quad \text{Докажите, что } \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} &= \frac{n!(n-k+1) + (n!)k}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \end{aligned}$$

2.76 Докажите, что число $T_m(R)$ из задачи 2.6 при $R \leq m$ равно

$$\frac{m!}{R!(m-R)!}$$

Задаётся эта последовательность так:

$$T_m(0) = 1; T_m(R+1) = \frac{m-R}{R+1} T_m(R), R=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Решение: } T_m(0) = 1 = \frac{m!}{0!m!}; T_m(1) = \frac{m-0}{0+1} = m = \frac{m!}{1!(m-1)!} \dots$$

$$\text{Если } T_m(R) = \frac{m!}{R!(m-R)!} \text{ при } R \leq m, \text{ то}$$

$$T_m(R+1) = \frac{m-R}{R+1} T_m(R) = \frac{m-R}{R+1} \cdot \frac{m!}{R!(m-R)!} = \frac{m!}{(R+1)!(m-R-1)!}$$

3.1a Дана последовательность (a_n) : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Докажите, что эта последовательность убывает.

Решение:

$$\text{Прежде всего, } a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

так как последовательность (b_n) , где $b_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$, возрастающая, то последовательность (a_n) , где $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ убывающая.

3.1б Дана последовательность (a_n) : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Очевидно, что 0 является ее нижней границей. Имеет ли она положительную нижнюю границу?

Ответ: Последовательность не имеет нижней границы.

Решение: Прежде всего заметим, что так как $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n}$,

то $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Предположим теперь, что последовательность $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ имеет положительную нижнюю границу $A > 0$. Тогда $A < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $\sqrt{n} < \frac{1}{A} \Leftrightarrow n < (\frac{1}{A})^2$ и $n \geq 1$,

что противоречит неограниченности последовательности натуральных чисел. Тем самым доказано, что последовательность $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ не имеет положительной

нижней границы.

($\forall n$ - означает "для любого n ").

8.2. Является ли монотонной последовательность $(a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}})$?

Ответ: последовательность возрастающая.

Решение: Покажем, что данная последовательность возрастает.

Для этого нужно показать, что $a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{\sqrt{n+1}+1} - \frac{n}{\sqrt{n}+1} &> 0 \Leftrightarrow \frac{(n+1)(\sqrt{n}+1) - n(\sqrt{n+1}+1)}{(\sqrt{n+1}+1)(\sqrt{n}+1)} > 0 \Leftrightarrow (n+1)\sqrt{n}+1 > n\sqrt{n+1}+1 \\ &\Leftrightarrow (n+1)\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} \Leftrightarrow (n+1)\sqrt{n} > n\sqrt{n+1} \Leftrightarrow n^2+2n^2+1 = [(n+1)\sqrt{n}]^2 > (n\sqrt{n+1})^2 = n^3+n^2 \Leftrightarrow n^2+n > 0, \end{aligned}$$

что очевидно при $n \geq 1$.

8. Дана последовательность: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$ Какие из следующих утверждений истинны, какие - ложны?

- а) последовательность лежит вся в отрезке $[0; 1]$
- б) "почти вся" последовательность лежит в отрезке $[0; 1]$
- в) "почти вся" последовательность лежит в отрезке $[0, 5; 1]$
- г) "почти вся" последовательность лежит в отрезке $[10; 0, 4]$
- д) в отрезке $[0; 1]$ лежит бесконечно много членов последовательности;
- е) последовательность ограничена.

Ответ: а) истинно

б) истинно

в) ложно

г) ложно

д) истинно

е) истинно

9. Ответьте на вопросы г)-е) задачи 8 для последовательности

$$1; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{4}; \dots; (2k-1); \frac{1}{2k}; \dots$$

- Ответ: г) ложно
д) истинно
е) ложно

11. Выяснить монотонна ли последовательность $\{x_n\} = \frac{10^n}{n!}$ и есть ли у нее наибольший и наименьший члены?

Ответ: наибольший член $x_9 = x_{10} = \frac{10}{9!}$, наименьшего нет.

Решение: на всей области определения последовательность является монотонной. Найдем участки монотонности; для этого сравним два последовательных члена последовательности x_n и x_{n+1} ; $x_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{10^n \cdot 10}{n! \cdot (n+1)} = x_n \cdot \frac{10}{n+1}$; Итак, $x_{n+1} = \frac{10}{n+1} \cdot x_n$ выясним при каких n $\frac{10}{n+1} > 1$ и при каких n $\frac{10}{n+1} < 1$. $\frac{10}{n+1} > 1$ при $n < 9$; $\frac{10}{n+1} < 1$ при $n > 9$, то есть последовательность возрастает при $n \leq 9$ и убывает при $n \geq 10$.

12. Дана последовательность $K_3; K_6; K_{12}; \dots; K_{2^k}; \dots$, где K_n — апофема правильного n -угольника, вписанного в окружность данного радиуса R .

- а) является ли эта последовательность монотонной?
б) ограничена ли она?
в) есть ли у нее наибольший или наименьший члены?

Ответ: а) Последовательность является монотонно возрастающей.

б) Последовательность является ограниченной.

в) Наибольшего члена последовательность не имеет. Наименьший член $K_{\min} = K_3$.

Решение: Выразим апофему через сторону правильного многоугольника и радиус описанной окружности

$$K_n = R - \frac{a_n^2}{4}; \quad K_{2(n+1)} = R - \frac{a_{2(n+1)}^2}{4}$$

$$\text{отсюда } \frac{K_{2(n+1)}}{K_{2n}} = \sqrt{\frac{R^2 - \frac{a_{2(n+1)}^2}{4}}{R^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}}} = \sqrt{\frac{R^2 - \frac{a_{2n}^2}{4} + \frac{a_{2n}^2 - a_{2(n+1)}^2}{4}}{R^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}}} = \sqrt{1+d}$$

где $d = \frac{a_{2n}^2 - a_{2(n+1)}^2}{R^2 - \frac{a_{2n}^2}{4}} > 0$, так как $R > \frac{a_n}{2}$ из прямоугольного треугольника; и $a_{2n} > a_{2(n+1)} \Leftrightarrow a_{2n}^2 > a_{2(n+1)}^2 \Rightarrow \frac{a_{2n}^2}{4} > \frac{a_{2(n+1)}^2}{4}$ следовательно $\frac{K_{2(n+1)}}{K_{2n}} > 1$.

Эта последовательность является ограниченной ($0 < K_n < R$)

Наименьший член $K_{\min} = K_3$.

Наибольшего члена последовательность не имеет.

3.3. Последовательность (a_n) задана так: $a_1 = 1$ $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$

Ограничена ли эта последовательность? Изменится ли Ваш ответ, если взять другой первый член?

Ответ: Последовательность неограничена. Ответ не изменится, если взять другой первый член.

Решение: Докажем, что последовательность (a_n) монотонна:

$$\text{рассмотрим } a_{n+1} - a_n = a_n + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0 \quad \forall n$$

Предположим, что последовательность (a_n) ограничена.

Тогда она должна иметь предел (по аксиоме Больцано-Вейерштрасса). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = c$.

Но $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + \frac{1}{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = c + \frac{1}{c}$, тогда $c = c + \frac{1}{c}$, что невозможно. Следовательно данная последовательность неограничена.

Рассмотрим $a_1 \neq 1$: тогда, если $a_1 > 0$, то можно дословно повторить все рассуждения, проведенные для $a_1 = 1$;

если же $a_1 < 0$, то (a_n) тоже будет монотонна, так как

$$a_{n+1} - a_n = a_n + \frac{1}{a_n} - a_n = \frac{1}{a_n} < 0 \quad \forall n$$

(то есть эта последовательность будет монотонно убывающей)

далее доказательство, аналогичное доказательству при

$a_1 = 1$. Следовательно ответ не изменится, если взять другой первый член.

При $a_1 = 0$ последовательность не определена.

8.7 Докажите, что последовательность (a_n) : $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ ограничена. Укажите верхнюю границу для этой последовательности.

Решение: из рекуррентного соотношения видно, что $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Так как произвольное слагаемое $\frac{1}{k(k+1)}$ ($1 \leq k \leq n$) последней суммы можно представить в виде $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, то $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2$

Таким образом, $a_{n+1} < 2 \quad \forall n \geq 0$; то есть 2 — верхняя граница.

8.8 Пусть (a_n) — любая последовательность, k_n — любая строго возрастающая последовательность целых положительных чисел. Тогда последовательность $b_k = a_{k_n}$ (где $k = 1, 2, 3, \dots$) называется подпоследовательностью последовательности (a_n) .

а) Докажите, что если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности (a_n) ограничена, то и сама последовательность (a_n) ограничена.

Решение: рассмотрим случай, когда данная последовательность (a_n) возрастающая. Тогда ясно, что a_1 будет нижней границей последовательности и, значит, нужно только доказать, существование верхней границы последовательности. Пусть (a_{k_n}) — некоторая подпоследовательность последовательности (a_n) , обладающая верхней границей a , то есть при любом $K = 1, 2, 3, \dots$: $a_{k_n} \leq a$ и пусть a_k — произвольный член последовательности (a_n) . Тогда по определению подпоследовательности найдется такой индекс n_i , что $k \leq n_i$ и так как (a_n) возрастающая, то $a_k \leq a_{n_i} \leq a$. Таким образом a является верхней границей всей последовательности (a_n) . Случай, когда последовательность убывающая, рассматривается аналогично/.

8.8 б) Приведите пример (немонотонной) неограниченной последовательности (a_n) , у которой есть ограниченная подпоследовательность

Ответ: $a_n = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2k+1 \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2k \end{cases}$

8.8 в) Приведите пример последовательности, у которой нет ограниченной подпоследовательности.

Ответ: $a_n: a_n = n$

8.8 г) Докажите, что у каждой последовательности есть монотонная подпоследовательность. (Неубывающие и невозрастающие последовательности в данной задаче считаем монотонными).

Решение:

Пусть (a_n) — произвольная последовательность. Тогда возможны два случая:

① последовательность (a_n) обладает такой подпоследовательностью (a_{n_k}) , что для любого члена a_{n_i} этой подпоследовательности существует $a_{n_j} \in (a_{n_k})$ такое, что $a_{n_i} < a_{n_j}$.

② (a_n) указанной подпоследовательности не обладает, т.е. в любой подпоследовательности (a_{n_k}) этой последовательности найдется такой член a_{n_j} , что $a_{n_i} < a_{n_j}$ для любого члена подпоследовательности (a_{n_k}) .

Случай ①. Построим возрастающую подпоследовательность последовательности (a_{n_k}) следующим образом. Положим $b_1 = a_{n_1}$. По условию в последовательности (a_{n_k}) существуют такие члены a_{n_l} , что $a_{n_1} < a_{n_l}$. Из таких членов последовательности (a_{n_k}) возьмем один $a_{n_{l_0}}$ с наименьшим номером, т.е. $a_{n_1} < a_{n_{l_0}}$ и $a_{n_i} \geq a_{n_{l_0}}$ при $n_1 \leq n_i < n_{l_0}$. Положим $b_2 = a_{n_{l_0}}$. По условию в последовательности (a_{n_k}) существуют такие члены a_{n_p} , что $a_{n_{l_0}} < a_{n_p}$; из выбора члена $a_{n_{l_0}}$ видно, что $n_{l_0} < n_p$. Из членов a_{n_p} последова-

тельности (a_{n_k}) , удовлетворяющих условию $a_{n_{k-1}} < a_{n_k}$ выберем один $a_{n_{p_0}}$ с наименьшим номером и положим $c_3 = a_{n_{p_0}}$. Продолжая этот процесс, мы получим строго возрастающую подпоследовательность (c_m) последовательности (a_{n_k}) , которая, очевидно, будет строго возрастающей подпоследовательностью всей последовательности (a_n) .

Случай ②. Существует a_k такое, что $a_i \leq a_k$ для всех членов последовательности (a_n) ; положим $c_1 = a_k$ и рассмотрим подпоследовательность $(a_n; n \geq k)$, состоящую из всех членов последовательности, начиная с a_{k+1} . По условию в подпоследовательности $(a_n; n \geq k)$ существует такой член $a_l, l > k$, что $a_j \leq a_l$ для всех членов a_j подпоследовательности $(a_n; n \geq k)$; очевидно, что $a_l \leq a_k$. Положим $c_2 = a_l$ и рассмотрим подпоследовательность $(a_n; n \geq l)$ состоящую из всех членов последовательности (a_n) , начиная с a_{l+1} . В этой подпоследовательности выберем наибольший член a_m и положим $c_3 = a_m$. Очевидно, что $c_2 \leq c_3 \leq c_1$. Продолжая этот процесс, мы получим невозрастающую подпоследовательность (c_k) последовательности (a_n) .

4.1. Докажите методом математической индукции следующие тождества, связывающие между собой члены последовательности чисел Фибоначчи (a_n) ($a_1 = a_2 = 1; a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$):

а) $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$ (сумма чисел Фибоначчи с нечетными номерами).

Решение:

При $n=1$ равенство $a_1 = a_2$ верно, поскольку $a_1 = a_2 = 1$. Предположим, что верно равенство $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n}$. Тогда $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n+1} = a_{2n+2}$. Тем самым равенство $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1} = a_{2n+2}$ доказано.

4.3.б Докажите, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

Решение:

Рассмотрим $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n)$, следовательно надо доказать, что $n^3 + 2n$ делится на 3. Поскольку функция $f(n) = n^3 + 2n$ нечетная, достаточно доказать, что сумма $n^3 + 2n$ делится на 3 $\forall n$. При $n=0$ утверждение верно, поскольку 0 делится на 3. Предположим, что $n^3 + 2n$ делится на 3. Тогда число $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)$ делится на 3. Утверждение доказано.

4.3.г Докажите, что $11^{n+1} + 12^{2n+1}$ делится на 133 ($n=0, 1, 2, \dots$).

Решение:

При $n=0$ число $11^2 + 12 = 133$. Предположим, что число $11^{n+1} + 12^{2n+1}$ делится на 133. Тогда число $11^{(n+1)+1} + 12^{2(n+1)+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^2 \cdot 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n+1} = 11(11^{n+1} + 12^{2n+1}) + 133 \cdot 12^{2n+1}$ также делится на 133. Утверждение доказано для $n=0, 1, 2, \dots$

4.3.в Докажите, что число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1} ($n=0, 1, 2, \dots$).

Решение:

При $n=0$ утверждение верно, поскольку 1, являющееся числом, записанным $3^0 = 1$ единицами, делится на число $3^0 = 1$ и не делится на число $3^1 = 3$. Предположим, что для некоторого $n \geq 0$ число a , записываемое 3^n единицами, делится на число 3^n и не делится на число 3^{n+1} . Тогда число b , записываемое 3^{n+1} единицами, можно представить в виде $b = a \cdot 10^{2 \cdot 3^n} + a \cdot 10^{3^n} + a + a(10^{2 \cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1)$. Сумма цифр числа $10^{2 \cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1$ равна 3; следовательно, число $10^{2 \cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1$ делится на 3 и не делится на $9 = 3^2$. Так как число a делится на 3^n и не делится на 3^{n+1} , а число $10^{2 \cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1$ делится на 3 и не делится на 3^2 , то число $b = a(10^{2 \cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1)$ делится на число 3^{n+1} и не делится на число 3^{n+2} . Таким образом

методом математической индукции доказано, что при любом $n \geq 0$ число, записываемое 3^n единицами, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1} .

4.5.6 Доказать, что $n! > 2^n$ ($n > 3$)

Решение:

При $n=4$ утверждение верно, поскольку $4! = 24 > 16 = 2^4$. Предположим, что $n! > 2^n$ для некоторого $n \geq 4$. Тогда $(n+1)! = n!(n+1) > 2^n(n+1) > 2^{n+1}$, поскольку $n+1 > 2$ при $n \geq 4$. Утверждение доказано.

4.5.7 Докажите неравенство (n — целое): $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ($n > 1$)

Решение:

При $n=2$ утверждение верно, поскольку $2! = 2 < \frac{3}{2}^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$. Предположим, что для некоторого $n \geq 2$ справедливо неравенство $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. Тогда $(n+1)! = n!(n+1) < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1)$ и неравенство $(n+1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$ будет доказано, если мы покажем, что $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$. Но $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n (n+1) < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1} \iff \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n} < \frac{(n+2)^{n+1}}{2^{n+1}} \iff 2 < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Таким образом, для того, чтобы доказать, что из неравенства $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ вытекает неравенство $(n+1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$, достаточно показать, что при любом $n \geq 1$ верно неравенство $2 < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

Вместо этого при любом фиксированном $n \geq 1$ индукцией по k мы будем доказывать, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}$ при любом $k \geq 1$.

При $k=1$ имеет место равенство $1 + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$. Предположим,

что для некоторого $k \geq 1$ верно, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}$.

Тогда $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{k}{n} + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2} = 1 + \frac{k+1}{n} + \frac{k}{n^2} > 1 + \frac{k+1}{n}$.

Таким образом, методом математической индукции нами доказано,

что при любом фиксированном $n \geq 1$ для любого $k \geq 1$ имеет место неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n}$. В частности, при $k=n$

справедливо неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n} = 2$ из которого, как уже отмечалось, вытекает, что если $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$,

то $(n+1)! < \left(\frac{n+2}{2}\right)^{n+1}$. Таким образом, дважды применяя метод математической индукции, мы доказали, что $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при любом $n \geq 2$.

4.5.8 Доказать неравенства: $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$; $n > 1$

Решение:

$n=2$. Покажем, что $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2} \iff 2 < \sqrt{2} + 1 < 4$

Это верно, поскольку $1 < \sqrt{2} < 2$. Предположим теперь, что для некоторого $n \geq 2$ справедливы неравенства $\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

Тогда для того, чтобы доказать справедливость неравенства

$\sqrt{n+1} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ достаточно показать, что $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Это действительно верно, поскольку $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \iff n+1 < \sqrt{n(n+1)} + 1 \iff n^2 < (\sqrt{n(n+1)})^2 = n^2 + n \iff 0 < n$, что очевидно при

$n \geq 2$. Аналогично, чтобы доказать неравенство $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ достаточно показать, что $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$.

Это неравенство верно, поскольку $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \iff 2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2(n+1) \iff 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \iff 0 < 1$.

Таким образом неравенство доказано.

4.7.а Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$$

Решение:

При $n=2$ $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} \geq 2$, поскольку $\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} \geq 2 \iff a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2 \iff (a_1 - a_2)^2 \geq 0$.

Предположим, что для некоторого $n \geq 2$ справедливо неравенство

$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$ для любых положительных чисел

a_1, a_2, \dots, a_n и докажем, что в таком случае $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq n+1$ для любых положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n+1}$.

Прежде всего заметим, что $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + \dots + a_n^2 a_1 + a_{n+1}^2 a_1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}}$ т.е. сумма симметрична относительно a_1, a_2, \dots, a_{n+1} и, следовательно, не изменяется при перестановке индексов у чисел

a_1, a_2, \dots, a_{n+1} . Поэтому без ограничения общности можно считать, что $a_i \leq a_{n+1}; i=1, 2, \dots, n$. Так как $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1}$ и по предположению $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq 0$, то для доказательства неравенства $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq n+1$ достаточно показать, что $-\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq 1$. Но $-\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} \geq 1 \iff -a_n a_{n+1} + a_n a_1 + a_1^2 \geq a_1 a_{n+1} \iff a_1^2 - a_1 a_{n+1} + a_n a_1 - a_n a_{n+1} = (a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_n) \geq 0$, что верно, поскольку $a_{n+1} \geq a_1$ и $a_{n+1} \geq a_n$. Тем самым методом математической индукции доказано, что $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq n$ для любого $n \geq 2$ и для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n .

4.7.6 Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, причем $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, то $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n$.

Указание: Проводя индукционный переход, воспользуйтесь тем, что если среди неравных положительных чисел, произведение которых равно единице, есть число, большее единицы, то обязательно найдется и число, меньшее единицы.

Решение:

Будем доказывать методом математической индукции:

$n=1$ $a_1=1$, тогда и $a_1=1 \geq 1$. Допустим, что при $n=k$ $(a_1 \cdot \dots \cdot a_k = 1; a_i > 0; 1 \leq i \leq k) \Rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k)$. Тогда докажем, что и при $n=k+1$

$(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k \cdot a_{k+1} = 1) \Rightarrow (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k + b_{k+1} \geq k+1)$. Обозначим $b_k \cdot b_{k+1} = x$, тогда из того, что $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_k \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{k-1} \cdot x = 1$,

по предположению индукции следует $b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + x \geq k$.

Поэтому $b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1} + b_k + b_{k+1} + x - x \geq k + b_k + b_{k+1} - x =$

$= k+1 + b_k + b_{k+1} - b_k \cdot b_{k+1} - 1 = k+1 + (b_k - 1)(1 - b_{k+1})$.

Теперь воспользуемся указанием и если $b_k \neq 1$ или $b_{k+1} \neq 1$

то занемерим члены последовательности b_1, \dots, b_k, b_{k+1} таким

образом, что b_k будет больше 1, а b_{k+1} — меньше 1, тогда получим, что $(b_k - 1)(1 - b_{k+1}) > 0$ и $b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} > k+1$.

Если же $b_k = 1$ или $b_{k+1} = 1$, то $(b_k - 1)(1 - b_{k+1}) = 0$ и $b_1 + b_2 + \dots + b_k + b_{k+1} \geq k+1$.

Таким образом методом математической индукции мы доказали, что если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа и $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ для любого натурального n .

4.7.7 Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, то $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$ (неравенство Коши), причем равенство достигается, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Решение:

данное неравенство равносильно неравенству

$$n \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}} = \frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}}$$

Для установления справедливости этого неравенства при

в силу утверждения задачи а) достаточно найти такие положительные числа a'_1, \dots, a'_n , что $\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}} = \frac{a'_1}{a'_2}; \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}} = \frac{a'_2}{a'_3}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}} = \frac{a'_{n-1}}{a'_n}; \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}} = \frac{a'_n}{a'_1}$,

При $n=2$ такими числами очевидно являются $a_1 = x_1$ и $a_2 = x_1 x_2$.

Предположим, что для некоторого n мы нашли такие положительные числа a_1, \dots, a_n , что $\frac{x_1^n}{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \frac{a_1}{a_2}; \dots, \frac{x_{n-1}^n}{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n};$

$\frac{x_n^n}{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \frac{a_n}{a_1}$. Тогда положим $b_1 = a_1 x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}, \dots$

$b_i = a_i x_1^{n-1} \dots x_{i-1}^{n-1} x_{i+1}^{n-1} \dots x_n^{n-1}, 1 \leq i \leq n, b_{n+1} = a_1 x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}$.

При этом $\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1 x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}}{a_2 x_1^{n-1} \dots x_n^{n-1}} = \frac{a_1 x_1}{a_2 x_{n+1}} = \frac{x_1^{n+1}}{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1}}; \frac{b_2}{b_3} = \frac{a_2 x_1 x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}{a_3 x_1 x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}} = \frac{a_2 x_2}{a_3 x_{n+1}} = \frac{x_2^{n+1}}{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1}}, \dots, \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_n x_1 \dots x_n^{n-1}}{a_1 x_1 \dots x_n^{n-1}} = \frac{x_n^{n+1}}{a_1 x_1 \dots x_n^{n-1}} = \frac{x_n^{n+1}}{x_1 \cdot \dots \cdot x_{n+1}}$

Таким образом, для $n+1$ нашему условию удовлетворяют положительные числа b_1, \dots, b_{n+1} . Тем самым, используя метод мате-

матической индукции и утверждение задачи а), мы доказали, что $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$ для любого $n \geq 2$ и для любых

положительных чисел x_1, \dots, x_n . При $n=1$ отношение $\sqrt[n]{x_1} = x_1 = \frac{x_1}{1}$ очевидно.

4.7.г Докажите, что если a_1, a_2, \dots, a_n — положительные числа, то $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$ ($n \geq 1$).

Указание: Примените неравенство 4.7.в.

Решение:

Действительно воспользуемся указанием и применим неравенство

$$\text{Коши: } (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \cdot n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}} = n^2$$

, что и требовалось доказать.

5.1.б Докажите тождество: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Решение:

При $n=1$ равенство $1 \cdot 1! = 2! - 1$ верно. Предположим, что для некоторого $n \geq 1$ верно равенство: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } 1 \cdot 1! + \dots + n \cdot n! + (n+1)(n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1)! \cdot (n+1) = \\ &= (n+1)! (1 + n+1) - 1 = (n+1)! (n+2) - 1 = (n+2)! - 1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

5.2.в Найдите сумму: $S_n = 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{Ответ: } S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Решение:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} + \dots + \frac{n \cdot n}{2} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{2} = \\ &= \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Формула } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

доказана в учебнике 9-го класса.

5.4.а Найдите сумму: $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$\text{Ответ: } S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \quad \forall n \geq 1.$$

Решение:

$$\text{Представим } \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \text{ в виде } \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k+1)}$$

$$\text{Тогда } S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots - \frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

Чтобы убедиться в том, что сумма определена правильно можно

воспользоваться методом математической индукции. При $n=1$

$$\text{утверждение верно } S_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}; \text{ Допустим } S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)},$$

$$\begin{aligned} \text{тогда } S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2n+3-2}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+3)}. \end{aligned}$$

Таким образом, методом математической индукции мы подтвердили

$$\text{справедливость формулы } S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \quad \forall n \geq 1.$$

1.а Третий член арифметической прогрессии равен 0. Найдите сумму первых 5-ти членов.

$$\text{Ответ: } S_5 = 0$$

Решение:

Так как суммы членов арифметической прогрессии, равностоящих

от концов, равны, то $a_1 + a_5 + a_3 + a_4 + a_6 = (a_1 + a_5) + (a_2 + a_4) + a_3 =$

$$= 2a_3 + 2a_3 + a_3 = 5a_3 = 0$$

7. Найдите сумму всех положительных трехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

$$\text{Ответ: } S = 164700.$$

Решение:

Чтобы найти искомую сумму, мы найдем сумму S_1 всех положительных трехзначных чисел и из нее вычтем сумму S_2 всех положительных трехзначных, делящихся на 2, и сумму S_3 положительных трехзначных чисел, делящихся на 3. Так как при этом мы дважды вычитаем все положительные трехзначные числа, делящиеся на 6, то к разности нужно прибавить сумму S_6 всех положительных трехзначных чисел, делящихся на 6. Таким образом, искомая сумма

$$S_1 = \frac{200 + (900-1)1}{2} \cdot 900 = 495000 - 450 = 494550$$

$$S_2 = \frac{200 + (450-1)2}{2} \cdot 450 = 247500 - 450 = 247050$$

$$S_3 = \frac{204 + (300-1)3}{2} \cdot 300 = 165300 - 150 = 165150$$

$$S_6 = \frac{204 + (150-1)6}{2} = 82650 - 300 = 82350$$

Следовательно, $S = 494550 - 247050 - 165150 + 82350 = 164700$.

- 6.8 Пусть a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ тоже образуют арифметическую прогрессию.

Решение:

Запишите соотношение между числами арифметической прогрессии

$$\frac{a^2 + c^2}{2} = b^2 \quad \text{тогда надо доказать} \quad \frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}}{2} = \frac{1}{c+a};$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}}{2} &= \frac{a+b+b+c}{2(b+c)(a+b)} = \frac{a+2b+c}{2(b+c)(a+b)} = \frac{a+2b+c}{2ab+2ac+\underline{a^2+c^2}+2cb} = \\ &= \frac{a+2b+c}{2b(a+c)+(a+c)a} = \frac{a+c+2b}{(a+c)(2b+a+c)} = \frac{1}{a+c}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

- 6.10 Найдите сумму $S_n = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{77\dots7}_{n \text{ цифрок}}$

Ответ: $S_n = \frac{7}{81} (10^{n+1} - 9n - 10)$

Решение:

$$\begin{aligned} 7 + 77 + \dots &= 7 + (7 \cdot 10 + 7) + (7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 7) + \dots + (7 \cdot 10^{n-1} + 7 \cdot 10^{n-2} + \dots + 7) = \\ &= 7(1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) + 7(1 + 10 + \dots + 10^{n-2}) + \dots + 7 = 7 \left(\frac{10^n - 1}{9} \right) + \\ &+ 7 \left(\frac{10^{n-1} - 1}{9} \right) + \dots + 7 \left(\frac{10 - 1}{9} \right) = \frac{7}{9} (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 - n) = \\ &= \frac{7}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} \right) - \frac{7}{9} n = \frac{7}{81} (10^{n+1} - 9n - 10). \end{aligned}$$

- 6.12 Сумма S_n первых n членов последовательности выражается формулой $S_n = 3n^2$. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией, найдите ее первый член и разность.

Ответ: $a_1 = 3; d = 6;$

Решение:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n-1)^2 = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 = 3(2n-1).$$

Так как разность $a_n - a_{n-1} = 3(2n-1) - 3(2n-3) = 6n-3-6n+9 = 6$

не зависит от n , то данная последовательность является арифметической прогрессией с разностью $d = 6$. Первый член прогрессии $a_1 = S_1 = 3$.

- 6.14. Назовем обобщенной последовательностью Фибоначчи такую последовательность: $a_1 = 1, a_2 = q, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

(Обычная последовательность Фибоначчи получается из обобщенной при $q = 1$). Найдите геометрические прогрессии, являющиеся обобщенными последовательностями Фибоначчи.

Ответ: $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Решение:

Так как последовательность является геометрической прогрессией с первым членом $a_1 = 1$, со знаменателем прогрессии q удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, то $q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$

Отсюда $q^{n+1}(q^2 - q - 1) = 0$. Это верно при любом n ; в частности и при $n = 1$. Таким образом q есть корень уравнения $q^2 - q - 1 = 0$, т.е. $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$

Значит обобщенные последовательности Фибоначчи являются геометрическими прогрессиями

- 6.15. Решив предыдущую задачу, Вы должны были найти две обобщающие последовательности Фибоначчи, являющиеся геометрическими прогрессиями. Обозначим их через (u_n) и (v_n) . Докажите, что существуют два числа M и N такие, что любой член n -й обобщенной последовательности Фибоначчи инципируют так:

$a_n = Mu_n + Nv_n$. Найдите эти числа M и N и напишите с их помощью формулу для a_n (не удивляйтесь, что эта формула для нахождения целого числа a_n содержит радикалы).

Решение:

Так как формула $a_n = Mu_n + Nv_n$ должна быть справедливой при любом $n \geq 1$, то, в частности, она должна быть справедливой

при $n=1$ и $n=2$. Таким образом, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} M+N=1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}M + \frac{1-\sqrt{5}}{2}N=1 \end{cases}$$

решениями которой являются $M = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$ и $N = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$.
Остается показать, что равенство $a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}u_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_n$ справедливо при любом $n \geq 1$. При $n=1$ и $n=2$ равенства справедливы по выбору M и N . Предположим, что для некоторого $n \geq 2$ уже доказаны равенства $a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}u_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_n$ для любого $1 \leq k \leq n$. Тогда $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} =$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}u_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}u_{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_{n-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}(u_n + u_{n-1}) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}(v_n + v_{n-1}) = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}u_{n+1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_{n+1}$$

поскольку $u_n + u_{n-1} = u_{n+1}$ и $v_n + v_{n-1} = v_{n+1}$.

Таким образом, методом математической индукции показано, что равенство $a_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}u_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}v_n$ справедливо при любом $n \geq 1$.

7.3. Обобщая частные результаты, угадайте формулы для следующих выражений, а затем докажите справедливость установленной Вами

формулы: а) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1)$;

Ответ: $n(n+1)^2$.

Решение: 1 способ

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n(3n+1) = 1(3 \cdot 1 + 1) + 2(3 \cdot 2 + 1) + \dots + n(3n+1) =$$

$$3 \cdot 1 + 1 + 3 \cdot 2 + 2 + \dots + 3n^2 + n = 3(1+2+\dots+n^2) + (1+2+\dots+n) =$$

$$= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+2)}{2} = n(n+1)^2.$$

2 способ

$$S_1 = 4 = 2^2$$

$$S_2 = 18 = 2 \cdot 3^2$$

$$S_3 = 48 = 3 \cdot 4^2$$

Предположим, что $S_n = n(n+1)^2$.

Докажем справедливость этой формулы методом математической индукции:

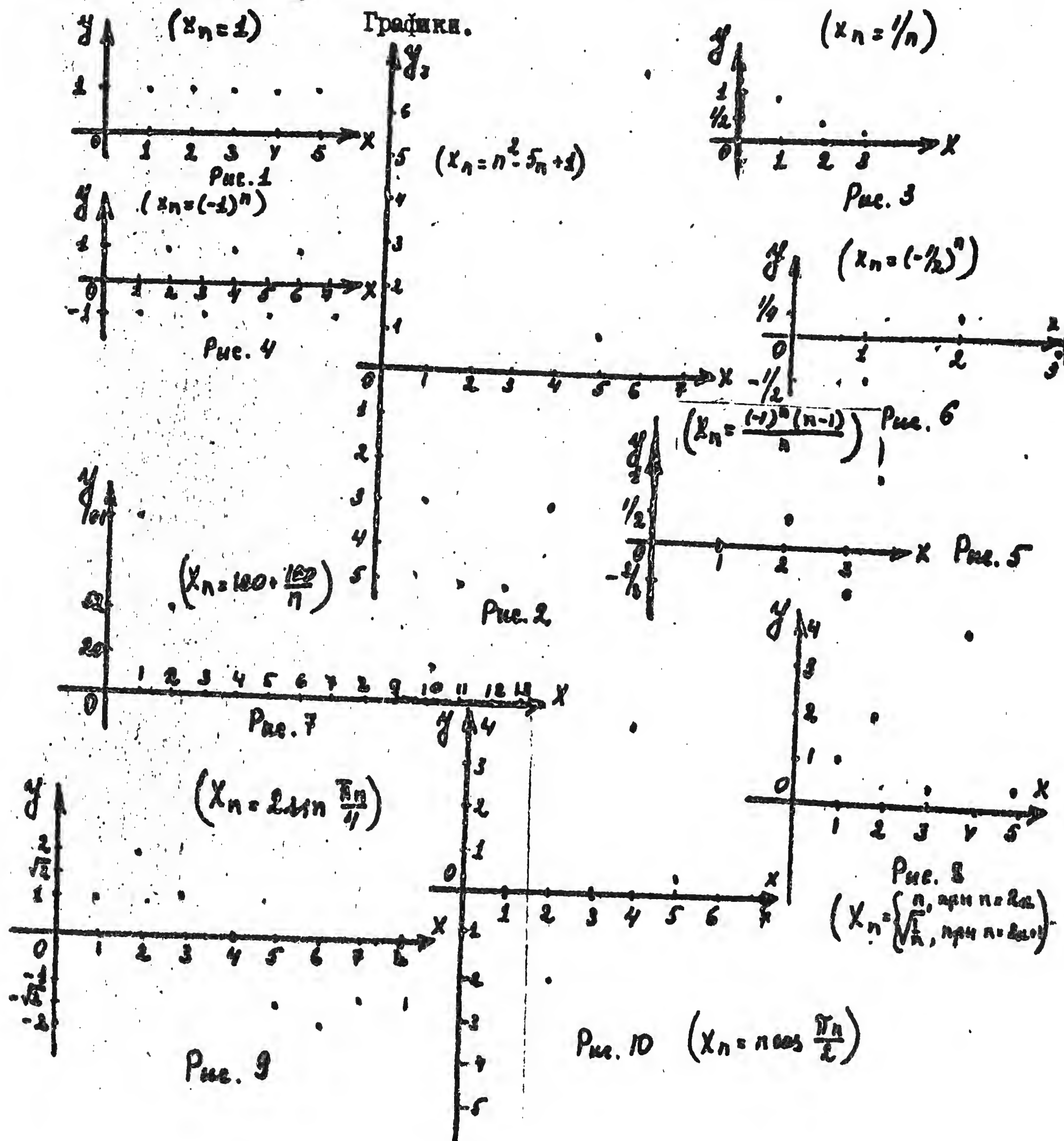
при $n=1$ формула проверена.

Допустим, что $S_n = n(n+1)^2$, тогда докажем, что $S_{n+1} = (n+1)(n+2)^2$. Действительно $S_{n+1} = S_n + (n+1)(3(n+1)+1) = n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4) = (n+1)(n^2+4n+4) = (n+1)(n+2)^2$.

Следовательно установленная нами формула верна.

Список последовательностей

1. $x_n = 1$.
2. $x_n = n^2 - 5n + 1$.
3. $x_n = \frac{1}{n}$.
4. $x_n = (-1)^n$.
5. $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$.
6. $x_n = (-\frac{1}{2})^n$.
7. $x_n = n + \frac{100}{n}$.
8. $x_n = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2k \\ \sqrt{k}, & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}$
9. $x_n = 2 \sin \frac{\pi n}{4}$.
10. $x_n = n \cos \frac{\pi n}{2}$.



Ответы

вопр. посл.	I		2	3		4 предел
	наим.	наим.		а	б	
1	1	1	да	да	нет	1
2	нет	-5	нет	нет	нет	нет
3	1	нет	да	нет	нет	0
4	1	-1	да	да	да	нет
5	нет	нет	да	да	да	нет
6	1/4	-1/2	да	нет	да	0
7	нет	20	нет	нет	нет	нет
8	нет	нет	нет	нет	нет	нет
9	2	-2	да	да	да	нет
10	нет	нет	нет	нет	да	нет

Зак 6498

Зинс (10 к) 89/90

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

N 15, 16, 17

С.М. Львовский, Ж.М. Работ, А.Л. Тоом

ТРИГОНОМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Методические разработки

для учащихся III курса ВЗМШ

Набор задач с очень краткими указаниями. Подобр. задач для подготовки к вступительным экзаменам. Встречаются интересные задачи, применение которых только при крайней необходимости.

Срок:

Москва - 1987

20/9, 20/10, 20/11

УДК 37.018.43

Тригонометрия. Задачи по планиметрии. Текстовые задачи:
Методич. разработки для учащихся III курса ВЗМШ АПН СССР при МГУ
(С.М.Львовский, Ж.М.Работ, А.Л.Тоом. - М., изд. АПН СССР,
с. 17).

Разработки предназначены для учащихся III курса Всесоюзной
заочной математической школы Академии педагогических наук СССР
при Московском университете им. М.В.Ломоносова (ВЗМШ).

Они содержат подборки задач и контрольные задания для
учащихся по трем темам и некоторые указания по решению контроль-
ных задач, а также критерии оценок контрольных работ.

О г л а в л е н и е

	стр.
Предисловие	3
Задание № (тема "Тригонометрия")	4
Задание № (тема "Задачи по планиметрии")	5
Задание № (тема "Текстовые задачи")	10

© Академия педагогических наук СССР (АПН СССР), 1987г.

- 3 -

Предисловие

Дорогие ребята!

Перед Вами три очередных задания. Номера контрольных задач
и сроки присылки помещены ниже.

Первое из заданий посвящено решению задач по тригонометрии.
Обязательная часть за редким исключением состоит из вполне тра-
диционных задач, может быть, чуть более трудных, чем Вы решали
на школьных уроках. Здесь от Вас требуется четкое знание формул
и навыки в преобразованиях, а также владение общими понятиями,
связанными с решением уравнений и неравенств (равносильность,
следствие уравнения и т.п.).

Задачи второго задания также сравнительно просты. Они помогут
Вам вспомнить основные геометрические факты.

В третьем задании собраны самые разные по уровню сложности
задачи. Для их решения часто достаточно просто здравого смысла.

После текстов заданий приведены некоторые указания, помогаю-
щие в решении задач. Вы, впрочем, можете решать задачи по-своему,
не используя указания.

В целом задания должны помочь Вам лучше подготовиться к
школьным и вступительным экзаменам.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!

З а д а н и е № (тема "Тригонометрия")

I. Упростите следующие выражения:

а) $\cos 8^\circ \cdot \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cdot \cos 53^\circ$; б) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$;
в) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

2. Докажите, что:

а) $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ ($\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$);

б) если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

3. Решите уравнения:

а) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 1$;

б) $\sin 4x / \sin 6x = 1$;

- в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + 2 \sin 2x$; г) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;
 д) $\sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$; е) $\cos 5x + \cos 7x = \sin 2x$;
 ж) $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$; з) $\sin x + \cos^4 x + 2 \sin 5x = 4$;
 и) $\sin x + \cos x = \sin^2 2x$; к) $\sin 2x (\sqrt{3} + \cos x) = \sin x (4 + 2 \sin^2 x)$;
 л) $\cos^2 x - \cos^4 x = \sin^2 x \sin 3x - 1$;
 м) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \frac{1}{2}$;
 н) $\sin(\pi \cos x) = \cos(\pi \sin x)$.

4. Решите неравенство $\cos 2x \geq \sin x$.

5. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Обязательные задачи

- | | | | |
|----------|-----------|-----------|----------|
| 1. № 1а. | 2. № 1б. | 3. № 2а. | 4. № 3а. |
| 5. № 3б. | 6. № 3в. | 7. № 3г. | 8. № 3д. |
| 9. № 3е. | 10. № 3ж. | 11. № 3з. | 12. № 5. |

Дополнительные задачи

- | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 13. № 1в. | 14. № 2б. | 15. № 3и. | 16. № 3к. |
| 17. № 3л. | 18. № 3м. | 19. № 3н. | 20. № 4. |

Критерии оценок

Обязательная часть: "зачет" – решены 6–8 задач;
 "4" – решены 9–10 задач;
 "5" – решены 11–12 задач.

Дополнительная часть: "4" – решены 4–6 задач;
 "5" – решены 7–8 задач.

Срок присылки задания №

Указания к решению некоторых задач

№ 1. а) $8^\circ + 82^\circ = 37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$.

№ 2. а) Разложите числитель и знаменатель левой части на множители. Когда определены левая и правая части тождества?

б) Представьте α как $\pi - (\beta + \gamma)$ и разложите левую часть на множители. Иначе: преобразуйте в правой части произведение функций в сумму.

№ 3. а) Сведите уравнение к однородному.

б) Не забудьте исключить из ответа те значения x , при которых $\sin 6x = 0$.

в) Преобразовав левую часть, сделайте замену переменной.

д) Поделите обе части уравнения на 2 и воспользуйтесь формулой косинуса суммы или синуса разности.

е) Преобразуйте обе части уравнения в произведения.

ж) Не забудьте отсеять посторонние корни.

з) При каких условиях левая часть может равняться 4?

и) Сделайте замену переменной $\sin x + \cos x = y$.

Задание №

(тема "Задачи по планиметрии")

Эта часть состоит из набора геометрических задач, взятых из первого издания книги И.Ф.Шарыгина "Задачи по геометрии. Планиметрия". В некоторых из них Вам предлагается доказать важные геометрические факты, входившие раньше в школьную программу. Другие задачи – это задачи на вычисление. Среди дополнительных задач есть задачи посложнее.

К большинству задач приведены указания.

Обязательные задачи

1. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Доказать, что величина угла измеряется полуразностью дуг, отсекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

2. Пусть вершина угла находится внутри круга. Доказать, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

3. Пусть AB – хорда окружности, ℓ – касательная к окружности (A – точка касания). Доказать, что каждый из двух углов между AB и ℓ измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

4. Через точку M , находящуюся на расстоянии a от центра окружности радиуса R ($a > R$), проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B . Доказать, что $MA \cdot MB$ постоянно для всех секущих и равно $a^2 - R^2$ (квадрату длины касательной).

[5.] В окружности радиуса R через точку M , находящуюся на расстоянии a от её центра ($a < R$), проведена хорда AB . Доказать, что $AM \cdot MB$ постоянно для всех хорд и равно $R^2 - a^2$.

[6.] Пусть AM - биссектриса треугольника ABC . Доказать, что $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.

[7.] Доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b - катеты, c - гипотенуза.

[8.] Доказать, что расстояния от вершины A треугольника ABC до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC равны $p - a$, где p - полупериметр $\triangle ABC$, $a = BC$.

[9.] В треугольнике ABC даны стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B .

[10.] Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна S , а высота трапеции в 2 раза меньше её боковой стороны. Определить радиус вписанного в трапецию круга.

[11.] В треугольнике ABC из вершины A выходит прямая, делящая пополам медиану BQ (точка Q лежит на стороне AC). В каком отношении эта прямая делит сторону BC ?

[12.] Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, где K - точка пересечения диагоналей. Найти $\angle ACD$.

[13.] Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K , известно, что $AB = a$, $BK = b$, $AK = c$, $CD = d$. Найти длину диагонали AC .

[14.] Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60° . Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a .

Дополнительные задачи

[15.] В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на основании AC взята точка M так, что $AM = a$, $MC = b$. В треугольнике ABM и CBM вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM .

[16.] Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены хорды AC и AD , касающиеся данных окружностей. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

[17.] Дана окружность и точка A вне её. AB и AC - касательные к окружности (B и C - точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на дуге BC этой окружности.

[18.] Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность, и на дуге BC взята произвольная точка M . Доказать, что $AM = BM + CM$.

[19.] В треугольнике ABC проведены: BK - медиана, BE - биссектриса, AD - высота. Найти длину стороны AC , если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и длина AB равна 4.

[20.] В треугольнике ABC на наибольшей стороне $AC = b$ выбирается точка M . Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM .

[21.] Во вписанном в круг четырехугольнике две противоположные стороны взаимно перпендикулярны, одна из них равна a , прилежащий к ней острый угол делится диагональю на части α и β . Определить диагонали (угол α прилежит к данной стороне).

Указания по решению некоторых задач

[# 1, 2, 3.] Через одну из точек пересечения какой-нибудь стороны угла с окружностью проведите хорду, параллельную другой стороне угла; воспользуйтесь теоремой о вписанном угле.

[# 4.] Пусть MC - касательная к окружности, причем C - точка касания. Докажите, что треугольники AMC и BMC подобны.

[# 5.] Пусть CD - хорда, проходящая через точку M перпендикулярно отрезку MO , где O - центр круга. Докажите, что треугольники AMC и BMD подобны.

[# 6.] Проведите через вершину C прямую, параллельную биссектрисе AM , или воспользуйтесь теоремой синусов. Возможно и решение с помощью площадей.

[# 7, 8.] Воспользуйтесь тем, что касательные, проведенные из точки к окружности, равны.

[# 9.] Воспользуйтесь результатом задачи 11.

[# 10.] Воспользуйтесь тем, что отрезки, соединяющие центры окружностей, перпендикулярны их общей хорде.

№ 11. Проведите через точку D прямую, параллельную прямой AE , где E - середина медианы BD .

№ 12. Воспользуйтесь результатом задачи № 2 и вспомните, как измеряется угол, вписанный в окружность.

№ 13. Докажите, что треугольники ABK и CDK подобны.

№ 14. Возможны 2 случая: центры окружностей лежат по разные стороны от общей хорды и по одну сторону. В любом случае общая хорда окружностей перпендикулярна прямой, соединяющей центры.

№ 15. См. задачи 7, 8.

№ 16. Докажите, что треугольники ABC и ABD подобны.

№ 17. Пусть O - центр данной окружности. Докажите, что эта окружность пересекается с отрезком AD в точке пересечения биссектрис треугольника ABC .

№ 18. Пусть точка N лежит на отрезке AM и $MN = BM$. Докажите, что треугольник BMN - правильный и что треугольники ABN и BCM равны. Другой путь решения - применить теорему синусов.

№ 19. Докажите, что высота AD проходит вне треугольника ABC , так что точка C лежит между точками B и D (то есть угол C треугольника ABC - тупой). Можно найти углы треугольника ABD .

№ 20. Эту задачу можно решить, не пользуясь производной. Где лежит в треугольнике центр описанного круга?

Критерии оценок

Обязательная часть: "зачет" - решены 7-9 задач;
"4" - решены 10-12 задач;
"5" - решены 13-14 задач.

Дополнительная часть: "4" - решены 3 - 4 задачи;
"5" - решены 5-7 задач.

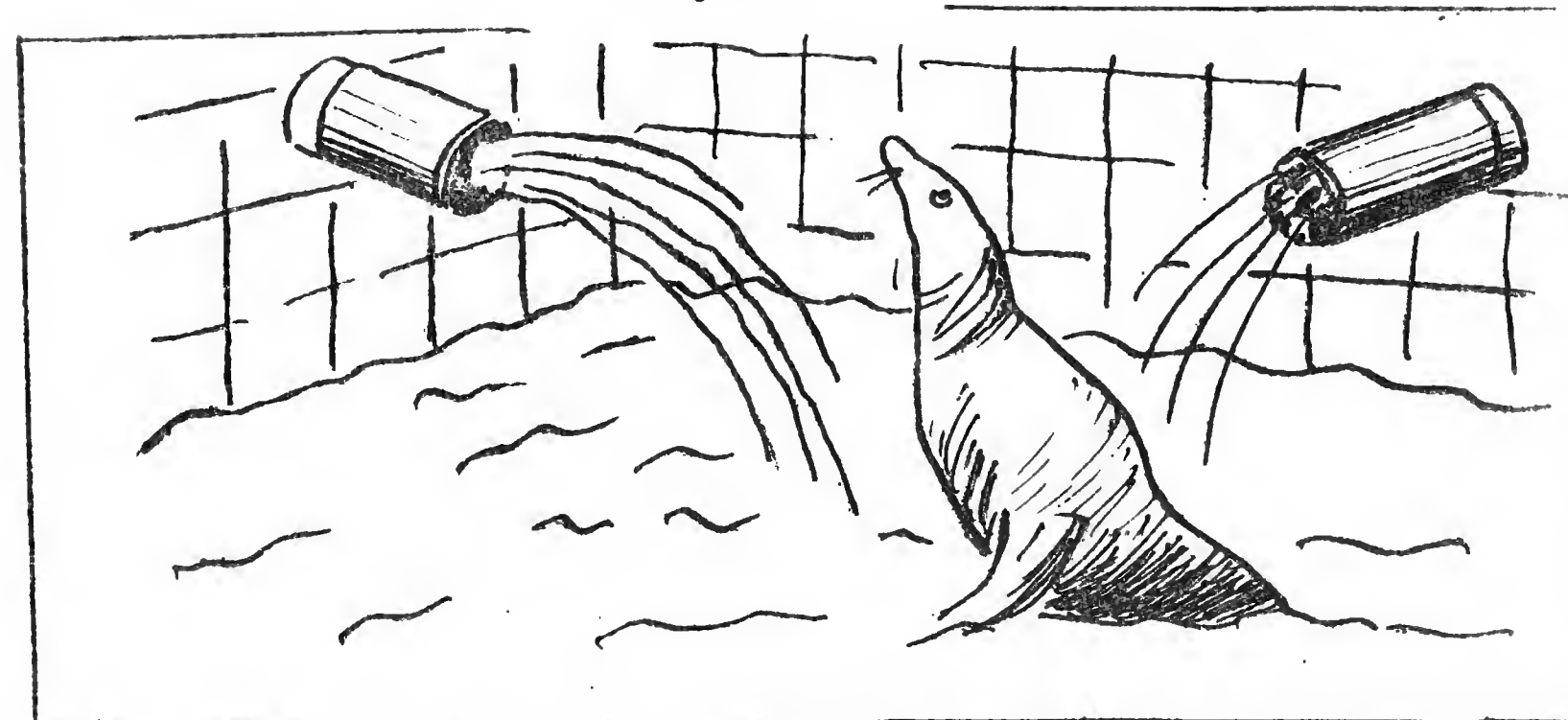
Срок присылки задания № -

В заключение - еще несколько задач посложнее, не входящих в задание.

А. Точка K лежит на окружности, описанной около треугольника ABC . M , N и P - проекции точки K на стороны AB , BC и AC соответственно. Докажите, что точки M , N и P лежат на одной прямой.

Б. Пусть R и r - радиусы описанного и вписанного кругов треугольника, d - расстояние между их центрами. Докажите, что $d^2 = R^2 - 2Rr$.

В. Докажите, что в любом треугольнике центр описанной окружности, точка пересечения высот и точка пересечения медиан лежат на одной прямой.



Задание № (тема "Текстовые задачи")

Здесь собрано несколько десятков задач, в условиях которых говорится не только о числах, но и о часах, автомобилях, эскалаторах, бассейнах и многом другом. Чтобы решать эти задачи, необходимо каждую из них "перевести" с обычного языка на математический.

При этом необходимо понимать все, что не сказано, но подразумевается в условии: скорости, если не сказано иного, предполагаются постоянными; в задачах про смеси считается, что при смешивании веществ их объемы складываются, а перемешивание является равномерным; в задачах про бассейн имеется в виду, что по каждой трубе вода течет равномерно и т.п.

Не обязательно решать все эти задачи алгебраически: некоторые из них Вам удастся решить арифметически или даже в уме, некоторые удобно решать с помощью метода координат. Важно только одно: чтобы решение было четким, ясным и правильным.

Записывая решения задач, обязательно пишите, что Вы обозначаете буквами, что принимаете за единицу, к какой системе уравнений или неравенств сводите условие. В задачах на проценты надо уяснить себе, что принимается за сто процентов. В задачах с целыми числами полезно использовать равенства типа

$$N = 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0,$$

где a_3, a_2, a_1, a_0 - цифры четырехзначного числа N .

Во всех задачах важен не только ответ, но и ход решения, который Вам нужно записать понятно и логично. Желаем успеха!

Задачи

- [1.] Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Вамте 11/11 лет. Сколько лет каждому?
- [2.] Двое часов начали бить одновременно. Удары первых часов следуют друг за другом через 2 секунды, а вторых - через три секунды. Слившиеся удары воспринимаются как один. В котором часу это происходило, если всего послышалось 16 ударов?
- [3.] Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 100, а наименьшее общее кратное равно 1001.
- [4.] Найдите все трехзначные числа, которые в 25 раз больше суммы своих цифр.
- [5.] Какие двузначные числа меньше суммы квадратов своих цифр на 11 и больше удвоенного произведения своих цифр на 5?
- [6.] Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите это число.
- [7.] Сумма квадратов двух целых чисел равна 17, а их среднее арифметическое на 25% больше их среднего геометрического. Найдите эти числа.
- [8.] В 12 часов часовая и минутная стрелки часов совпадают. Когда они совпадут в следующий раз?
- [9.] Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки совпадают?
- [10.] Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки направлены точно в противоположные стороны?
- [11.] Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки образуют прямой угол?
- [12.] Человек вышел из дому между 9 и 10 часами утра, а пришел обратно между часом и двумя половинами. Он заметил, что часовая и минутная стрелки часов за это время совместились востанов. Когда он ушел и когда пришел?
- [13.] Человек шел по дороге со скоростью 4 км/ч. В 10 часов он встретил человека, идущего навстречу ему со скоростью 6 км/ч. Через сколько времени они встретятся снова?

- [14.] Человек прошел половину пути со скоростью 4 км/ч, а другую половину - со скоростью 8 км/ч. Какова была его средняя скорость на всем пути?
- [15.] Человек прошел от *A* до *B* со скоростью 3 км/ч, а затем от *B* до *C* - со скоростью 6 км/ч, в результате чего весь путь от *A* до *C* он прошел со средней скоростью 5 км/ч. Найдите отношение *AB* к *BC*.
- [16.] Два катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние и возвращаются обратно. В какой реке на это потребуется больше времени: в реке с быстрым или в реке с медленным течением?
- [17.] Пароход плывет от Горького до Астрахани 5 суток, а от Астрахани до Горького - 7 суток. Сколько суток плывут плоты от Горького до Астрахани?
- [18.] Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу, и каждый приехал туда, откуда выехал другой, причем один приехал через 16, а другой - через 25 часов после их встречи. Сколько часов ехал каждый автомобиль?
- [19.] Войсковая колонна имеет длину 1 км. Связной, выехав из начала колонны, передал пакет в конец колонны и вернулся к началу. Колонна за это время прошла 3 км. Какой путь проехал связной?
- [20.] По шоссе едет колонна машин, растянувшаяся на 1 км, со скоростью 60 км/ч. Проезжая мимо поста ГАИ, каждая машина сбавляет скорость до 40 км/ч. Какой станет длина колонны, когда все машины проедут мимо поста ГАИ?
- [21.] Спортсмены бегают колонной со скоростью 8 км/ч. Навстречу бежит тренер со скоростью 4 км/ч. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, бежит назад со скоростью 6 км/ч. Во сколько раз изменится длина колонны, когда все спортсмены развернутся?
- [22.] Эскалатор метро спускает идущего по нему вниз человека за 1 минуту. Если человек будет идти вниз вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?
- [23.] Человек, идя по движущемуся эскалатору, насчитал на нем 50 ступенек, а идя в ту же сторону втрое быстрее, он насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, идя с перво-

начальной скоростью по неподвижному эскалатору?

[24.] Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист отставал от них на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обошел пешехода в тот момент, когда пешехода нагнал мотоциклист?

[25.] Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B , велосипедисту оставалось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B ?

[26.] Человек, идущий по шоссе, заметил, что через каждые 15 минут его обгонял автобус, а через каждые 10 минут он встречал автобус. Считая, что автобусы с равными интервалами идут в обоих направлениях, найдите интервал времени, с которым пройдут в одну сторону два автобуса мимо неподвижного наблюдателя.

[27.] Пассажир, едущий из A в B , половину затраченного времени ехал на автобусе, а половину — на автомобиле. Если бы он полпути ехал на автобусе, а полпути — на автомобиле, то потратил бы на весь путь вдвое больше времени. Найдите отношение скорости автомобиля к скорости автобуса, если известно, что оно больше единицы.

[28.] Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом через каждый час. При движении в те же скорости в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

[29.] Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

[30.] Пока болел мастер, производительность бригады снизилась на 20%. На сколько процентов она должна теперь повыситься, чтобы достичь прежнего уровня?

[31.] Пока Петя сдавал экзамены, он похудел на 10%. Потом у него гостила бабушка, и он поправился на 15%. Потом он пошел в поход и похудел на 10%. Потом он поехал в пионерский лагерь и поправился на 5%. Как изменился его вес за весь этот период времени?

[32.] На овощной базе хранились огурцы, содержавшие 99% воды по весу. За время хранения часть воды испарилась, в результате чего в огурцах стало 98% воды. Сколько процентов своего веса потеряли огурцы?

[33.] Сторону правильного пятиугольника увеличили на 20%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

[34.] Температуру можно измерять по шкале Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0 градусов по Цельсию соответствует 0 градусов по Реомюру и 32 градусам по Фаренгейту, а 100 градусов по Цельсию соответствует 80 градусам по Реомюру и 212 градусам по Фаренгейту. Сколько градусов по Реомюру будет, если температуры по Цельсию и Фаренгейту составляют равное число градусов?

[35.] Из сосуда, наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Наконец, опять после перемешивания отлили литр смеси и долили литр воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в семь раз больше по объему оставшегося в нем глицерина. Каков объем сосуда?

[36.] Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом сплаве?

[37.] В бассейн проведены три трубы. Если открыты первая и вторая трубы, то пустой бассейн наполняется за 5 часов. Если открыты первая и третья трубы, то пустой бассейн наполняется за 4 часа. Если открыты вторая и третья трубы, то полный бассейн опорожняется за 2 часа. Пусть бассейн заполнен наполовину и в этот момент открываются все три трубы. Какая часть бассейна будет заполнена через 10 часов?

[38.] Соревнуются четыре бригады лесорубов. Первая и вторая бригады обработали древесины вдвое больше, чем третья; вторая и

третья - втрое больше, чем четвертая; а вторая, третья и четвертая - вчетверо больше, чем первая. Какая бригада победила в соревновании?

39. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое быстрее, а второй - вдвое медленнее, то они выполнили бы всю работу за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу каждый рабочий, работая один?

40. Три работницы делают игрушки. Первая работница делает 5 игрушек в час, вторая - 8 игрушек в час. Первые две работницы начали работу одновременно, а третья - на полчаса позже. Через некоторое время третья работница догнала по количеству изготовленных игрушек первую работницу, а через полтора часа после этого догнала и вторую. Определите производительность труда третьей работницы.

41. Одну и ту же работу могут выполнить три бригады. Первая бригада выполняет $\frac{2}{3}$ всей работы за некоторое время. Такое же время потребуется, если сначала третья бригада выполнит $\frac{1}{3}$ часть всей работы, а затем вторая бригада выполнит $\frac{9}{10}$ работы, оставшейся после третьей бригады. Производительность третьей бригады равна полусумме производительностей первой и второй бригады. Во сколько раз производительность второй бригады больше производительности третьей бригады?

42. В двух бригадах вместе 27 человек. Число членов первой бригады более чем в два раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде?

43. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его веса. Можно ли увеличить цену бриллианта, разрезав его на куски?

44. Сумма в 5 рублей уплачена 30 монетами, среди которых имеются только десятикопеечные, пятнадцатикопеечные и двадцатикопеечные. Докажите, что двадцатикопеечных монет больше, чем десятикопеечных.

45. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ x/y = 3,7 \end{cases}$$

Придумайте формулировки задач, приводящих к этой системе: на движение, на работу, на бассейн, на смеси.

Контрольное задание

Обязательные задачи: № 2, 4, 8, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 28, 32, 35, 39.

Дополнительные задачи: № 1, 6, 9, 11, 19, 23, 24, 25, 34, 40.

Критерии оценок

Обязательные задачи: "зачет" - решены 7-9 задач;
"4" - решены 10-11 задач;
"5" - решены 12-13 задач.

Дополнительные задачи: "4" - решены 3-5 задач;
"5" - решены 6-10 задач.

Срок присылки задания № - _____

Указания по отдельным задачам

Обязательные задачи

№ 2. Эту задачу проще всего решить подбором: посмотрите, сколько ударов послышалось бы в разное время: в 2 часа - 3 удара, в 3 часа - 5 ударов, в 4 часа - 6 ударов. А дальше?

№ 4. Обратите внимание, что искомое число делится на 25.

№ 8. См. указание к задаче 28.

№ 13, 14, 15. Средней скоростью за какой-то промежуток времени называется отношение пройденного пути ко времени, за которое этот путь был пройден.

№ 28. Пусть два автомобиля выехали по кольцевой дороге из одной точки в одном направлении; к моменту, когда первый автомобиль первый раз догонит второго, он пройдет ровно на круг больше, чем второй.

№ 32. Вода из огурцов испаряется, но что-то остается. Проследите за тем, что останется.

№ 35. Один из возможных путей решения - проследить, как меняется количество глицерина в сосуде.

№ 39. За неизвестные удобно принять числа, показывающие, какую часть работы выполняет каждый из рабочих за день.

Дополнительные задачи

№ I. Разность моего и Вашего возраста с течением времени не меняется.

№ 9. Эту задачу можно решить, исходя из результата задачи № 8. Но можно решить её и без вычислений.

№ II. У задач 9 и 10 ответы совпадают, а у этой задачи ответ другой.

№ 23. Сколько человек насчитает ступенек, определяется скоростью человека относительно эскалатора.

№ 24. Если получится, попробуйте перейти в систему отсчета, связанную с пешеходом. Но можно решить задачу и без этого.

№ 25. Удобно принять за неизвестные времена, за которые велосипедист и автомобиль проезжают путь из A в B .

№ 34. Для начала выведите формулы, по которым температура по Цельсию переводится в температуру по Фаренгейту и Реомюру.

Ротапринт НИИОП АПН СССР

128327, Москва, ул. Ленинская, 4

Заказ № 356 тираж 6000

АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Всесоюзная заочная математическая школа при МГУ

С.М.Львовский, Ж.М.Работ, А.Л.Тоом

ТРИГОНОМЕТРИЯ. ЗАДАЧИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Педагогические разработки
для преподавателей
В З М Ш

Москва - 1987

УДК 373-37.018.43-371.3

Тригонометрия. Задачи по планиметрии. Текстовые задачи:
Методич. разработки для преподавателей ВЗМШ АПН СССР при МГУ
(С.М.Львовский, Ж.М.Работ, А.Л.Тоом - М., Изд. АПН СССР, 37 с.

Разработки предназначены преподавателям Всесоюзной заочной
математической школы Академии педагогических наук СССР при
Московском университете им.М.В.Ломоносова (ВЗМШ).

Они содержат условия, ответы, указания по решению и решению
задач трех контрольных работ для учащихся ВЗМШ по указанным
в заголовке темам, критерии оценок заданий и рекомендации по их
проверке.

О г л а в л е н и е

Предисловие	3
I. Тригонометрия	3
1. Условия, ответы, решения, указания к решениям	3
2. Указания по проверке	10
3. Критерии оценок	10
II. Задачи по планиметрии	11
1. Условия, ответы, решения, указания к решениям	11
2. Указания по проверке	24
3. Критерии оценок	24
III. Текстовые задачи	25
1. Условия, ответы, решения, указания к решениям	25
2. Номера контрольных задач	37
3. Критерии оценок	37

Академия педагогических наук СССР (АПН СССР), 1986.

- 3 -

Предисловие

Здесь помещены условия, решения, указания и иногда коммен-
тарии к решениям контрольных задач из трех заданий для учащихся
ВЗМШ, а также критерии оценок контрольных работ по ним.

Задания призваны помочь школьникам подготовиться к школь-
ным и вступительным экзаменам по математике.

Несколько особняком стоит третье задание, содержащее наи-
более традиционный материал.

В пособие, по которому школьники выполняли эти задания,
включено большое количество не вошедших в контрольную работу
текстовых задач. Мы рекомендуем преподавателям - руководителям
групп "Коллективный ученик ВЗМШ" постоянно решать их с учащими-
ся: это развивает их, учит рассуждать, а также способствует выра-
ботке технических навыков в решении систем уравнений.

Все пожелания и замечания по разработкам просьба присылать
по адресу: 119823, Москва, В-234, ГСП, МГУ, ВЗМШ.Методической
комиссии.

I. Тригонометрия

1. Условия, ответы, решения, указания.

Большая часть приведенных ниже решений не является образцами
для оформления задания в тетради. Это - всего лишь наброски,
призванные облегчить подготовку к занятию (для руководителя
группы "Коллективный ученик") и проверку работ (для преподавате-
ля ВЗМШ).

[1.] Упростите следующие выражения:

$$а) \cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ; \quad б) \frac{\operatorname{tg} \pi/8}{1 + \operatorname{tg}^2 \pi/8};$$

$$в) \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

Ответ: а) $\sqrt{2}/2$; б) $\sqrt{2}/4$; в) $1/8$.

Решение. а) $\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ = \cos 8^\circ \cos 37^\circ - \sin 8^\circ \sin 37^\circ =$

$$= \cos(37^\circ + 8^\circ) = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2.$$

Использованы формулы приве-
денные в формулах выше.

*) Задания * являются необязательными контрольными заданиями.

$$б) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2} \left(\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \right) = \frac{1}{2} \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Использована формула, выражающая синус через тангенс половинного аргумента.

$$в) \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

Использована формула синуса двойного угла и формула приведения.

[2.] Докажите, что:

$$а) \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}; \quad б) \text{ если } \alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ то}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{Решение. а) } \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Использованы формулы: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}; \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Тождество справедливо, если $\sin \alpha \neq 0$, т.е. $\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$;

легко видеть, что тогда определены обе его части.

$$б) \text{ Пусть } \alpha = \pi - (\beta + \gamma), \text{ тогда } \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma =$$

$$= \sin(\beta + \gamma) + \sin \beta + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} + 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} =$$

$$= 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \left(\cos \frac{\beta + \gamma}{2} + \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \right) = 2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\beta}{2} =$$

$$= 4 \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Использованы формулы: приведения, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}; \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

[3.] Решите уравнения:

$$а) 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 3 \sin^2 x = 1; \quad б) \frac{\sin 4x}{\sin 6x} = 1;$$

$$в) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + 2 \sin 2x; \quad г) \sin^2 x + \cos^2 x = 1/2;$$

$$д) \sqrt{3} \sin x - \cos x = \sqrt{2}; \quad е) \cos 5x + \cos 7x = \sin 2x;$$

$$ж) \sqrt{\sin x} + \cos x = 0; \quad з) \sin x + \cos 4x + 2 \sin 5x = 4;$$

$$и) \sin^2 x + \cos x = \sin 2x; \quad к) \sin 2x (\sqrt{3} + \cos x) = \sin x (4 + 2 \sin^2 x)$$

$$л) \cos^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x \sin 3x - 1;$$

$$м) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - 1/2;$$

$$н) \sin(4 \cos x) = \cos(\pi \sin x).$$

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi n; \arctg \frac{1}{2} + \pi k \mid k, n \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \neq 5l + 2 \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$;
в) $\left\{ (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; г) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; д) $\left\{ \frac{\pi}{6} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi m \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\}$;
е) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5} \pi k; \frac{\pi}{14} + \frac{2}{7} \pi m \mid n, k, m \in \mathbb{Z} \right\}$; ж) $\left\{ \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$;
з) $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$; и) $\left\{ \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$;
к) $\left\{ \pi n; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$; л) $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; м) \emptyset ;
н) $\left\{ (-1)^k \arcsin \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{4} + \pi k; \pm \arccos \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi m \mid k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$

Указания и решения. а) Заменяя 1 в правой части на $\sin^2 x + \cos^2 x$, приходим к однородному уравнению

$$\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0.$$

$$б) \text{ Имеем: } \begin{cases} \sin 4x - \sin 6x = 0, \\ \sin 6x \neq 0 \end{cases} \quad \text{Решая уравнение, полу-}$$

чаем, что $2 \sin x \cos 5x = 0$, откуда $x_1 = \pi n$ или

$x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$. Из этих серий надо отбросить решения уравнения $\sin 6x = 0$, т.е. $x_3 = \frac{\pi m}{6}, m \in \mathbb{Z}$.

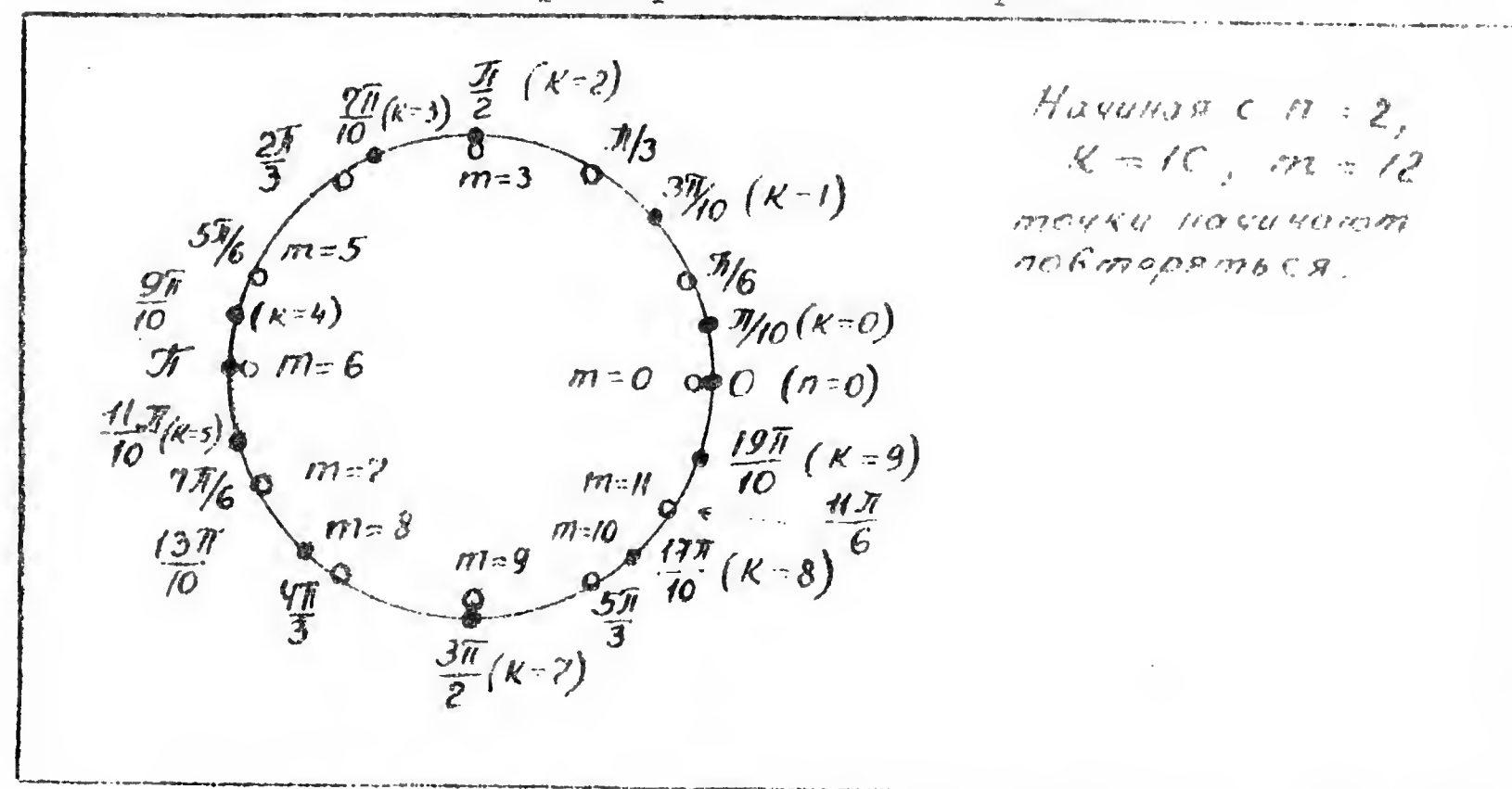
1 способ. Если $m = 6p$, серия x_3 дает серию x_1 , поэтому всю серию x_3 надо отбросить.

Поскольку 2π есть общий период серий x_2 и x_3 , после-

днем пересечение этих серий на отрезке $[0; \pi]$. Серия x_2 дает на этом отрезке (соответственно при $k=0, 1, 2, 3, 4$) значения $\frac{\pi}{10}; \frac{3\pi}{10}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{10}; \frac{9\pi}{10}$, а серия x_3 (соответственно при $m=0, 1, 2, 3, 4, 5$) — значения $0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$.
Теперь ясно, что из серии x_2 надо исключить значения $\frac{\pi}{2} + \pi\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$; они получаются при $k=5\ell+2$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

II способ. Нанесем на тригонометрический круг значения $x_1 = \frac{\pi n}{10}$ и $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$ (черные точки), а также значения $x_3 = \frac{\pi m}{6}$.

которые надо отбросить (они обозначены кружочками). Нам надо оставить те из черных точек, которые не совпадают с белыми кружочками. Каждая из точек разворачивается в серию:



$x = \frac{\pi}{10} + 2\pi\ell$, $x = \frac{3\pi}{10} + 2\pi p$, $x = \frac{7\pi}{10} + 2\pi z$ и т.д. То, что записано у нас в ответе, — это объединение всех этих серий, записанное более компактно.

в) Так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$, после замены $\sin 2x = t$ приходим к квадратному уравнению.

г) Так как $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$, уравнение приводится к такому: $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{2}$, откуда $\sin^2 2x = 1$, т.е. $\cos^2 2x = 0$.

д) Разделив обе части уравнения на 2, получим

$$\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } \sin(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

е) Преобразуем данное уравнение: $2\cos 6x \cos x - 2\sin x \cos x = 0$, откуда $2\cos x(\cos 6x - \sin x) = 0$, т.е. $\cos x = 0$ или $\cos 6x - \sin x = 0$ (*). Уравнение (ж) решим так: $\cos 6x - \cos(\frac{\pi}{2} - x) = 0$, откуда $2\sin(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = 0$; дальнейшее ясно.

ж) Имеем: $\sqrt{\sin x} = -\cos x$, откуда $\sin x = \cos^2 x$, т.е. $\sin x = 1 - \sin^2 x$. Итак, $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, поэтому

$$\sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < -1 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (1).$$

Должно быть $\cos x \leq 0$, среди решений уравнения (1) этому условию удовлетворяют лишь $x = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — см. рис. I.

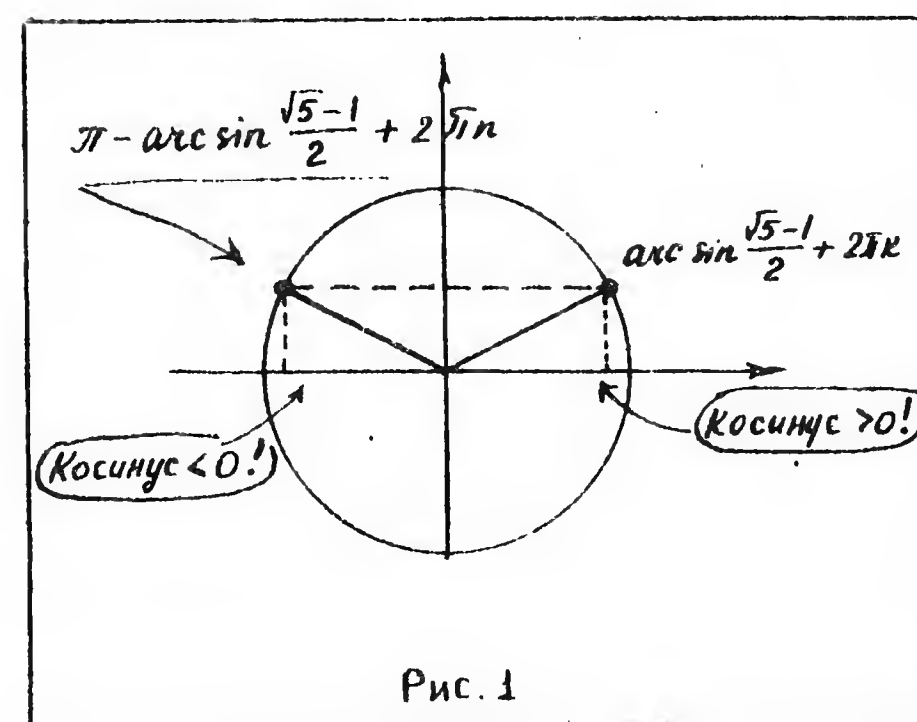


Рис. 1

3) Складывая верные неравенства $\sin x \leq 1$, $\cos 4x \leq 1$, $2\sin 5x \leq 2$, получаем, что $\sin x + \cos 4x + 2\sin 5x \leq 4$,

причем требуемое в условии равенство получается, только если в каждом из сложенных неравенств будет равенство, т.е.

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \\ \sin 5x = 1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ясно, что общие решения первых двух серий суть $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$; они входят и в третью (при $n = 5\ell + 1$, $\ell \in \mathbb{Z}$).

Можно также найти общие решения серий на тригонометрическом круге (аналогично пункту б).

и) Если $\sin x + \cos x = t$, то $1 + \sin 2x = t^2$, данное уравнение примет вид $t = t^2 - 1$, откуда $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Так как $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, приходим к уравнениям $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Поскольку $\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{2}} > 1$, остается решить уравнение $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

к) Поскольку $4 + 2\sin^2 x = 6 - 2\cos^2 x = 2(\sqrt{3} - \cos x)(\sqrt{3} + \cos x)$, уравнение приводится к виду $2\sin x(\sqrt{3} + \cos x)(2\cos x - \sqrt{3}) = 0$. Учитывая, что $\sqrt{3} + \cos x \neq 0$, получаем ответ. *↑ неверно!!*

л) Так как $\cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x(1 - \cos^2 x) = \cos^2 x \sin^2 x$, уравнение можно привести к виду $1 + \cos^2 x \sin^2 x = \sin^2 x \sin 3x$. Левая часть не меньше, а правая — не больше единицы, поэтому

$$\begin{cases} \cos^2 x \sin^2 x = 0, \\ \sin^2 x \sin 3x = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\sin x \neq 0$, тогда из первого уравнения $\cos x = 0$, поэтому $\sin^2 x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. Но тогда $3x = \frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, и нужно, чтобы

$\sin 3x = 1$, т.е. $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi n \right) = 1$, что может быть лишь при нечетных значениях n (при четных n $\sin \left(\frac{3\pi}{2} + 3\pi n \right) = -1$).

м) Уравнение приводится к виду $\left(\tan x - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\tan 3x - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$, откуда $\begin{cases} \tan x = \frac{1}{2}, \\ \tan 3x = \frac{1}{2}. \end{cases} (1)$

Так как $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$, то при $\tan x = \frac{1}{2}$ имеем

$\tan 3x = \frac{11}{2}$, поэтому система (1) несовместна.

н) Имеем: $\sin \left(\pi \cos x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \pi \sin x \right) = 0$,

откуда $2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\cos x + \sin x - \frac{1}{2} \right) \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(\cos x - \sin x + \frac{1}{2} \right) \right) = 0$,

поэтому $\sin \left(\frac{\pi}{2} \left(\cos x + \sin x - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$ (1) или $\cos \left(\frac{\pi}{2} \left(\cos x - \sin x + \frac{1}{2} \right) \right) = 0$ (2). Из уравнения (1) $\frac{\pi}{2} \left(\cos x + \sin x - \frac{1}{2} \right) = \pi n$, значит

$\cos x + \sin x = 2n + \frac{1}{2}$, то есть $\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 2n + \frac{1}{2}$,

откуда $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}n + \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Должно быть $\begin{cases} -1 \leq \sqrt{2}n + \frac{1}{2\sqrt{2}} \leq 1, \\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

то есть $\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \leq n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}, \\ n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

откуда $n = 0$. Тогда $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ и $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Аналогично решаем уравнение (2).

[4]* Решите неравенство $\cos 2x \geq \sin x$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{13\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Указание. Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, неравенство сводится к квадратному $2z^2 + z - 1 \leq 0$, где $z = \sin x$. Получаем $-1 \leq z \leq \frac{1}{2}$, то есть $-1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$.

Так как $\sin x \geq -1$ всегда, остается решить неравенство $\sin x \leq \frac{1}{2}$.

[5] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin y \cos x = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2n + k \right); \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2n - k \right) \right) \mid n, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Решение. Складывая и вычитая уравнения системы, получим $\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = 0, \end{cases}$ откуда

$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x-y = \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}$, значит $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2n + k \right), \\ y = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} + 2n - k \right), \end{cases} n, k \in \mathbb{Z}$.

2. Указания по проверке

Общие указания

Почти для всех задач имеются решения, отличные от приведенных нами и не менее рациональные. Даже если приведенное школьником решение длиннее нашего, оценку снижать не следует, но надо указать на более короткий путь.

Ответ может иметь разный вид, в зависимости от способа решения, поэтому надо тщательно проверять совпадение разных форм ответа.

Задача 2. а) Если не указана область определения, оценку не снижать, но сделать замечание.

Задача 3. б) Если не отброшены лишние корни - ставить не выше "+".

в) Если нет упоминаний о допустимых значениях, но все остальное верно, считать задачу решенной, но сделать замечание.

г) Если сократили и потеряли корни, ставить не выше "+".

ж) Если нет исследования и есть посторонние корни, объяснить ученику, где конкретно он эти корни приобрел и снизить до "+".

з) Если верно получена система уравнений, ставить не меньше "+".

и) Если школьник не заметил, что $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} > 1$, ставить не выше "+".

Задача 4. При ответе типа $x < (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ объяснить, что такой ответ лишен смысла ("верно ли, что $1 < (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$?") и снизить до "+".

Задача 5. В этой задаче могут получиться ответы, записанные очень по-разному; сравнить два таких ответа может оказаться непростой задачей. Поэтому советуем не сличать ответы, а следить за ходом решения.

3. Критерии оценок

Обязательная часть: "зачет" - решены 6-8 задач;

"4" - решены 9-10 задач;

"5" - решены 11-12 задач.

Дополнительная часть: "4" - решены 4-6 задач;
"5" - решены 7-8 задач.

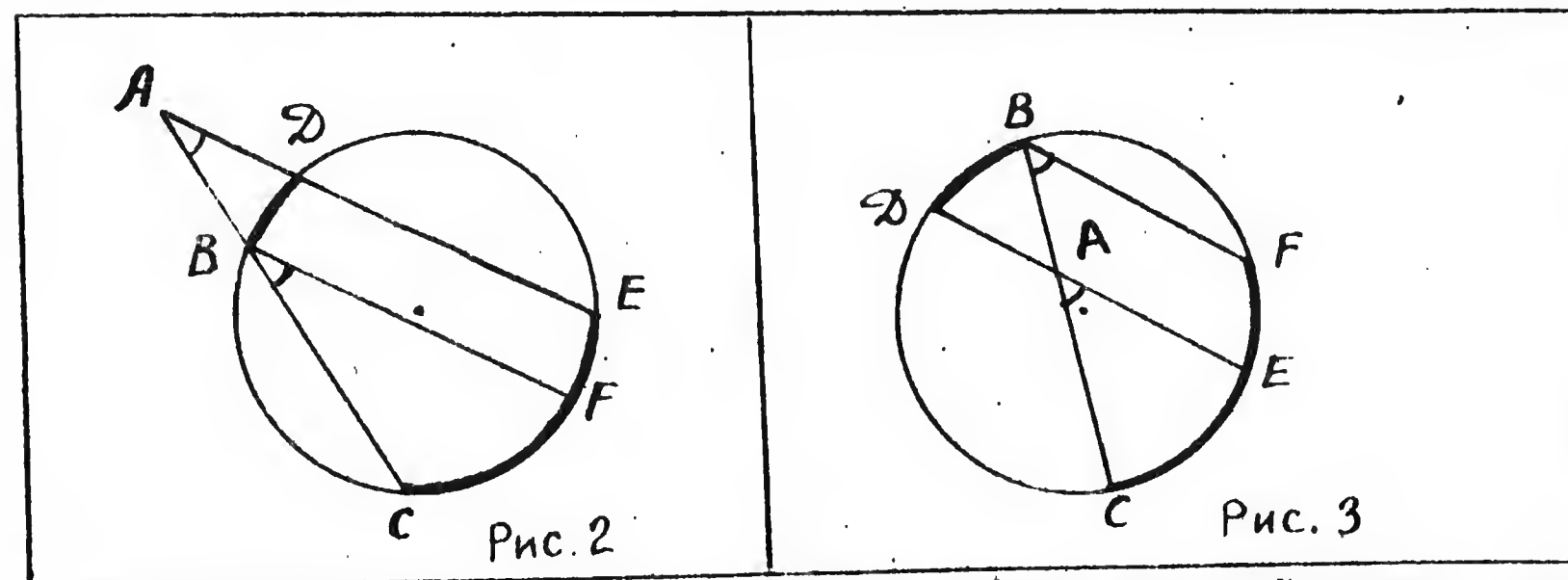
II. Задачи по планиметрии

I. Условия, ответы, решения и указания к решению

Обязательные задачи

№ 1. Пусть вершина угла находится вне круга и стороны угла пересекают окружность. Доказать, что величина угла измеряется полумразностью дуг, отсекаемых его сторонами на окружности и расположенных внутри угла.

Доказательство. Пусть A - данный угол (рис. 2) и пусть хорды BF и DE - параллельны. Тогда отмеченные на рисунке углы A и B одинаковы, а $\angle BDE = \angle FED$ (как дуги, заключенные между параллельными хордами). Угол B - вписанный, поэтому $\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \angle CFE = \frac{1}{2} (\angle CDE - \angle FED) = \frac{1}{2} (\angle CDE - \angle BDE)$, что и требовалось.



№ 2. Пусть вершина угла находится внутри круга. Доказать, что величина угла измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла.

Указание. Рассуждая аналогично решению задачи № 1, получим из рис. 3: $\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \angle CFE = \frac{1}{2} (\angle CDE + \angle FED) = \frac{1}{2} (\angle CDE + \angle BDE)$, что и требовалось.

№ 3. Пусть AB - хорда окружности, ℓ - касательная к окружности (A - точка касания). Доказать, что каждый из двух углов между AB и ℓ измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри рассматриваемого угла.

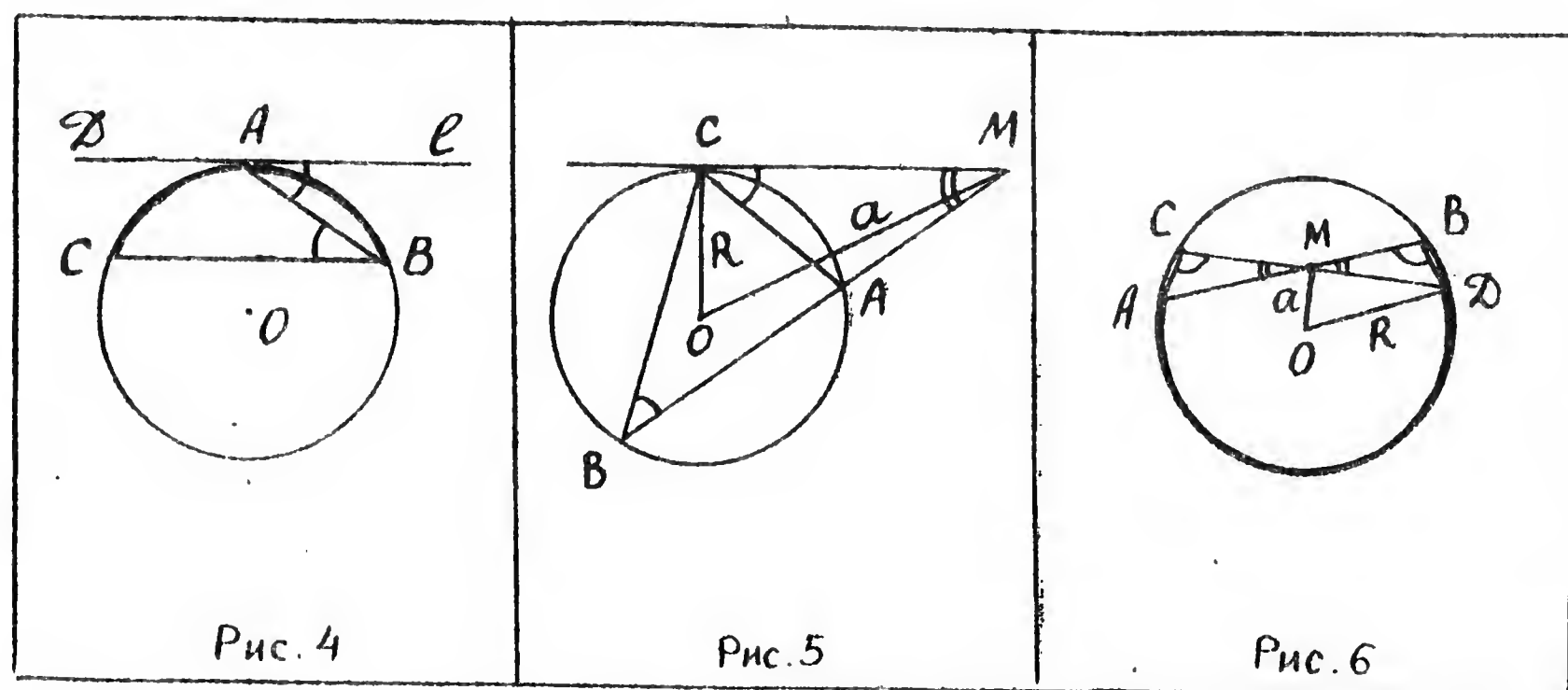
Доказательство. Пусть хорда BC параллельна прямой ℓ - см.рис.4. Тогда отмеченные на рис.4 углы A и B равны и выделенные дуги AC и AB - тоже равны. Поэтому

$$\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \angle AC = \frac{1}{2} \angle AB.$$

что и требовалось.

Учитывая, что второй из указанных в условии углов, $\angle DAB$, составляет в сумме с отмеченным углом A угол величиной π и внутри него заключена дуга $(2\pi - \angle AB)$, получаем и второе требуемое утверждение:

$$\angle DAB = \pi - \angle A = \frac{1}{2} (2\pi - \angle AB) = \frac{1}{2} \angle ACB.$$



№ 4. Через точку M на расстоянии a от центра окружности радиуса R ($a > R$), проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B . Доказать, что $MA \cdot MB$ постоянно для всех секущих и равно $a^2 - R^2$ (квадрату длины касательной).

Доказательство. Пусть O - центр окружности, MC - отрезок касательной, C - точка касания - см.рис. 5. Треугольники AMC и BMC подобны: (M - общий угол; отмеченные углы B и C равны, т.к. $\angle B = \frac{1}{2} \angle AC$ (как вписанный угол, и $\angle C = \frac{1}{2} \angle AC$ как угол между касательной и хордой - см.задачу № 3). Поэтому $MA : MC = MC : MB$, откуда $MA \cdot MB = MC^2$.

Но из прямоугольного треугольника OMC имеем, что $MC^2 = MC^2 - OC^2 = a^2 - R^2$.

Итак, $MA \cdot MB = a^2 - R^2$.

№ 5. В окружности радиуса R через точку M , находящуюся на расстоянии a от её центра ($a < R$), проведена хорда AB . Доказать, что $MA \cdot MB$ постоянно для всех хорд и равно $R^2 - a^2$.

Доказательство. Пусть O - центр окружности, $CD \perp MD$ - см.рис.6. В силу равенства отмеченных на рис.6 углов (углы при точке M равны как вертикальные, а $\angle C = \angle B$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же отмеченную дугу AD) треугольники ACM и BDM подобны, откуда

$$MA : MC = MD : MB, \text{ поэтому } MA \cdot MB = MC \cdot MD \quad (I)$$

Но диаметр круга, проходящий через точку M , перпендикулярен хорде CD и поэтому делит её пополам, значит равенство (I) можно переписать так:

$$MA \cdot MB = (MD)^2. \quad (2)$$

Наконец, из прямоугольного треугольника OMD получаем:

$$MD^2 = OD^2 - OM^2 = R^2 - a^2.$$

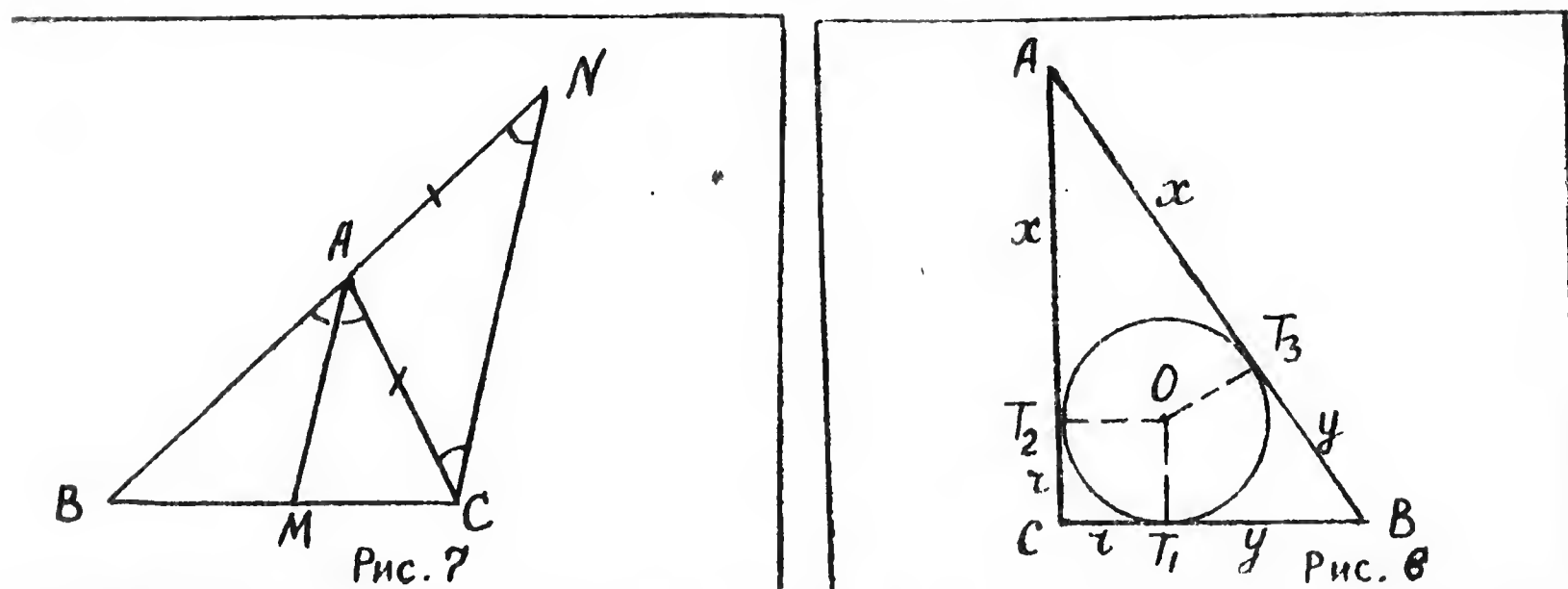
Поэтому равенство (2) принимает вид $MA \cdot MB = R^2 - a^2 = \text{const}$ - постоянно для всех хорд, проходящих через точку M .

№ 6. Пусть AM - биссектриса треугольника ABC . Доказать, что $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC}$.

Доказательство. Пусть прямая CN параллельна биссектрисе. Из подобия треугольников ABM и NBC см.рис.7 имеем, что

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AN}{CN} \quad (I)$$

Из того, что AM - биссектриса и из параллельности AM и CN вытекает равенство четырех отмеченных на рис. 7 углов, поэтому треугольник ANC - равнобедренный и $AN = AC$. Подставляя в (I) AC вместо AN , получим требуемое.



№ 7. Доказать, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычисляется по формуле $r = \frac{a+b-c}{2}$, где a и b - катеты, c - гипотенуза.

Доказательство. Пусть O - центр круга, вписанного в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), T_1, T_2, T_3 - точки касания - см. рис. 8. В четырехугольнике OT_1CT_2 : $\angle T_1 = \angle C = \angle T_2 = 90^\circ$, значит, он - прямоугольник, но $OT_1 = OT_2 = r$, поэтому он - квадрат со стороной r . Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны, положим: $x = AT_2 = AT_3$; $y = BT_1 = BT_3$. Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} r+x=b, \\ r+y=a, \\ x+y=c. \end{cases}$$

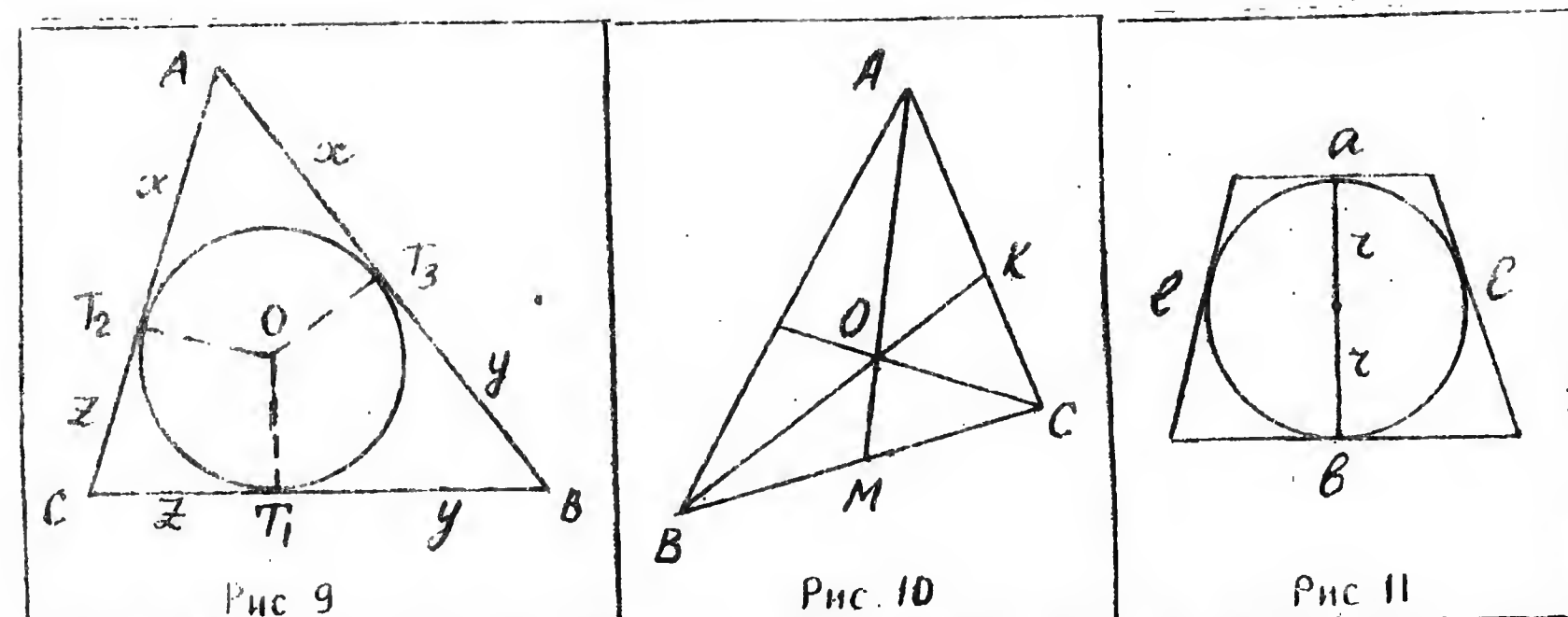
Сложив все три уравнения системы, получаем:

$$r+x+y = \frac{a+b+c}{2}, \text{ откуда } r = \frac{a+b+c}{2} - (x+y) = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2},$$

что и требовалось.

№ 8. Доказать, что расстояния от вершины A треугольника до точек касания вписанной окружности со сторонами AB и AC равны $p-a$, где p - полупериметр $\triangle ABC$, $a = BC$.

Указание. Обозначим расстояния от вершин треугольника ABC до точек касания T_1, T_2, T_3 через x, y, z соответственно - см. рис. 9, а дальше рассуждаем точно так же, как в задаче № 7.



№ 9. В треугольнике ABC даны стороны: $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Найти отношение, в котором точка пересечения биссектрис делит биссектрису угла B .

Решение. Пусть BK - биссектриса угла B , O - точка пересечения биссектрис (см. рис. 10). Воспользуемся результатом задачи 6: $BO:OK = BC:CK$, так как CO - биссектриса треугольника BKC . Далее, $BC=a$; чтобы найти CK , применим результат задачи 6 к треугольнику ABC :

$$CK:KA = CB:AB = a:c.$$

Так как $CK+KA = CA = b$, то $CK = \frac{ab}{a+c}$.
Отсюда имеем: $BO:OK = a:\frac{ab}{a+c} = \frac{a+c}{b}$.

Ответ: $\frac{a+c}{b}$.

№ 10. Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна S , а высота трапеции в 2 раза меньше её боковой стороны. Определить радиус вписанного в трапецию круга.

Решение. Пусть a и b - основания трапеции, c - её боковая сторона, h - высота. Так как трапеция описанная, то $a+b=2c$. следовательно, $\frac{a+b}{2} = c$. Воспользуемся тем, что $h = \frac{c}{2}$, запишем:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = c \cdot \frac{c}{2}.$$

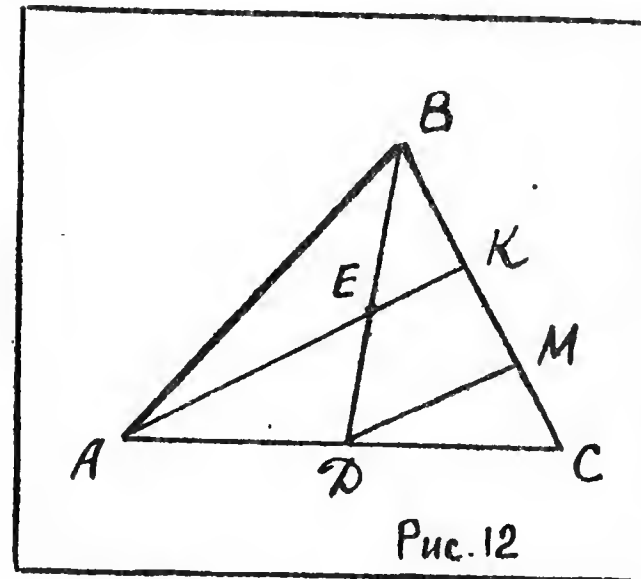
откуда $c = \sqrt{2S}$, поэтому $h = \frac{1}{2}\sqrt{2S}$.

Так как радиус вписанного в трапецию круга равен, очевидно, половине высоты (см. рис. 11), то

$$z = \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{2S}$$

Ответ: $\frac{1}{4} \sqrt{2S}$.

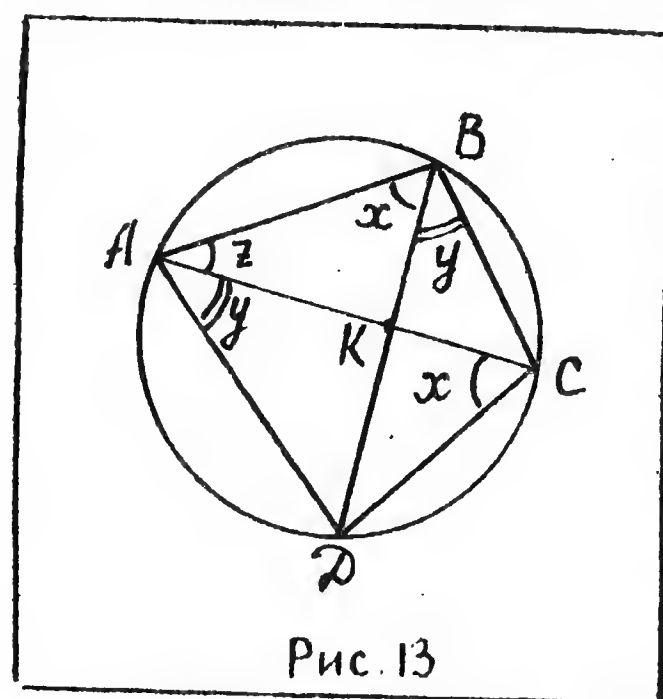
№ 11. В треугольнике ABC из вершины A выходит прямая, делящая пополам медиану BD (точка D лежит на стороне AC). В каком отношении эта прямая делит сторону BC ?



Решение. Пусть E — середина BD . Проведем отрезок $DM \parallel AE$ (см. рис. 12). Тогда по теореме Фалеса, с одной стороны, $BK = KM$ (так как $BE = ED$), с другой стороны, $KM = MC$ (так как $AD = DC$ по определению медианы). Стало быть, $BK = KM = MC$, значит, точка K делит сторону BC в отношении 1:2.

Ответ: 1:2.

№ 12. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle DAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BKC = \gamma$, где K — точка пересечения диагоналей. Найти $\angle ACD$.



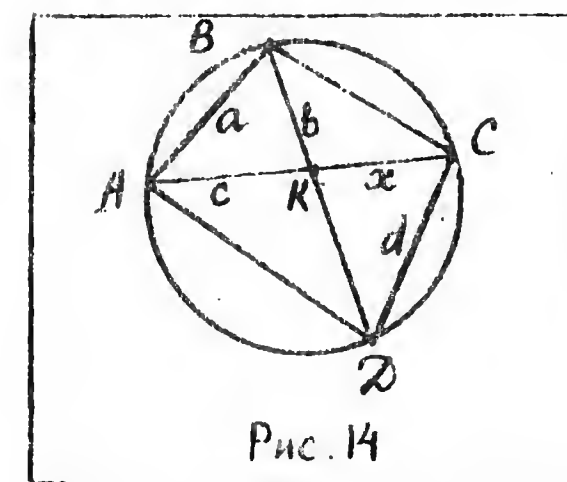
Решение. Обозначим $\angle ACD$ через x , $\angle CBD$ через y , $\angle BAC$ — через z (см. рис. 13). По свойству вписанных углов, опирающихся на одну дугу, имеем: $\angle ABD = \angle ACD = x$, $\angle DAC = \angle CBD = y$. запишем также очевидные равенства: $y + z = \angle DAB = \alpha$; $x + y = \angle ABC = \beta$. Так как угол BKC — внешний в треугольнике AKB , то можно записать $x + z = \angle BKC = \gamma$. Получаем систему трех уравнений

$$\begin{cases} y + z = \alpha, \\ x + y = \beta, \\ x + z = \gamma. \end{cases}$$

Решая её, например, способом, описанным в решении задачи 7, находим: $x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

№ 13. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K , известно, что $AB = a$, $CD = d$, $BK = b$, $AK = c$. Найти длину диагонали AC .



Решение. Пусть $KC = x$. Заметим, что треугольники ABK и CKD подобны, так как $\angle ABD = \angle ACD$ и $\angle BAC = \angle BDC$ (в обоих случаях углы равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Поэтому

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC} \quad \text{или} \quad \frac{a}{d} = \frac{b}{x}$$

Отсюда $x = \frac{bd}{a}$, $AC = c + x = \frac{ac + bd}{a}$.

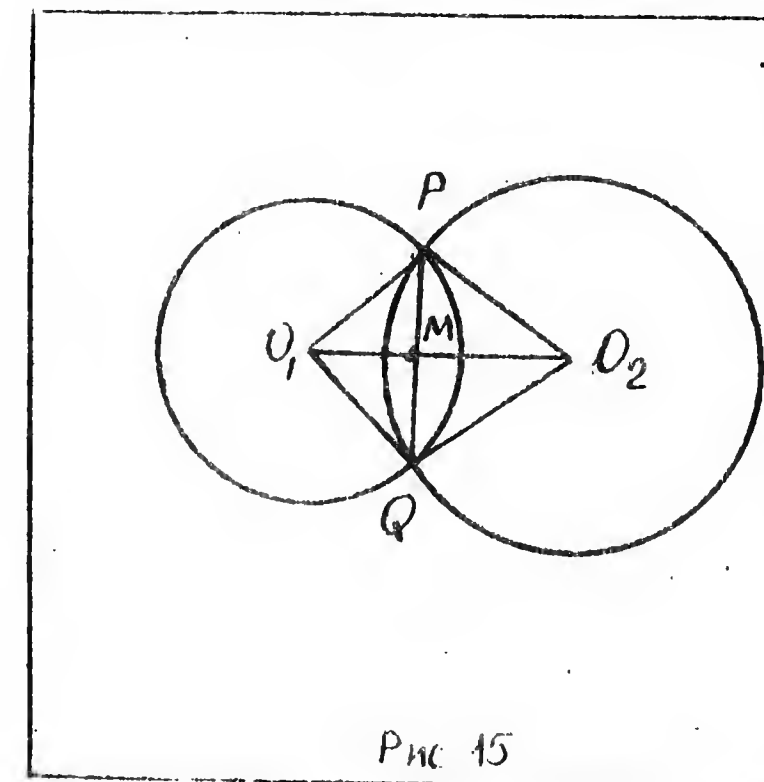
Ответ: $\frac{ac + bd}{a}$.

№ 14. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60° . Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно a .

Решение. Возможны два случая:

- центры находятся по разные стороны от общей хорды;
- центры находятся по одну сторону от общей хорды.

Разберем первый случай. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, P и Q — их точки пересечения,



$\angle PO_1Q = 90^\circ$, $\angle PO_2Q = 60^\circ$.

Каждая из окружностей при симметрии относительно прямой O_1O_2 переходит в себя, значит P переходит в Q . Отсюда $\angle PO_1M = 45^\circ$, $\angle PO_2M = 30^\circ$, $PM \perp O_1O_2$.

Если обозначить радиусы окружностей через $x = O_1P$ и $y = O_2P$, то $PM = x \sqrt{2}/2 = y/2$, откуда $y = x \sqrt{2}$.

Далее, $a = O_1O_2 = O_1M + MO_2 = x \sqrt{2}/2 + y \sqrt{3}/2 = \frac{x \sqrt{2}}{2} + \frac{x \sqrt{2} \sqrt{3}}{2}$.

Отсюда находим, x , а затем y и получаем:

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1), \quad y = a(\sqrt{3}-1).$$

Второй случай разберем аналогично, и получается

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1), \quad y = a(\sqrt{3}+1).$$

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$ и $a(\sqrt{3}-1)$, если центры окружностей находятся по разные стороны относительно общей хорды; $\frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$ и $a(\sqrt{3}+1)$ - если по одну сторону.

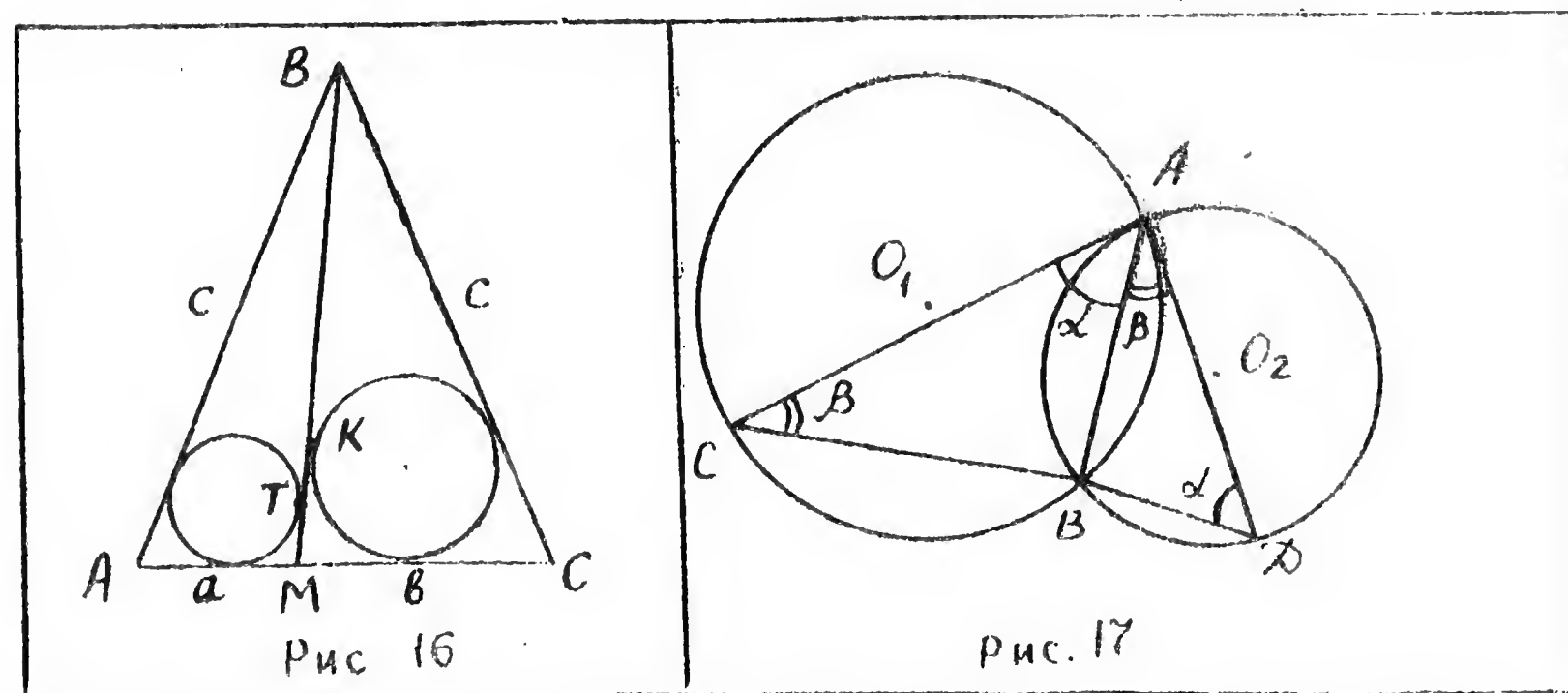
Дополнительные задачи

№ 15. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на основании AC взята точка M так, что $AM = a$, $MC = b$. В треугольники ABM и CBM вписаны окружности. Найти расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BM .

Решение. Пусть $AB = BC = c$; $BM = d$, P_{ABM} и P_{CBM} - полупериметры треугольников ABM и CBM соответственно, K и T - точки касания вписанных окружностей со стороной BM - см.рис.16. Заметим, что $KT = |MT - MK|$. (Знак модуля избавляет нас от необходимости рассматривать разные случаи взаимного расположения точек M , K и T). Используя результат задачи № 8, получим

$$KT = |(P_{ABM} - c) - (P_{CBM} - c)| = |P_{ABM} - P_{CBM}| = \\ = \left| \frac{1}{2}(a+c+d) - \frac{1}{2}(b+c+d) \right| = \frac{1}{2}|a-b|.$$

Ответ: $\frac{1}{2}|a-b|$.



№ 16. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку A проведены хорды AC и AD , касающиеся данных окружностей. Доказать, что $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$.

Решение. Будем называть окружности с центрами O_1 и O_2 (см. рис.17) соответственно первой и второй окружностью.

Угол ADB измеряется половиной дуги AB второй окружности (как вписанный), а угол BAC - половиной той же дуги (как угол между хордой и касательной). Следовательно, $\angle BAC = \angle ADB$. Аналогично доказывается, что $\angle BAD = \angle ACB$. Следовательно, треугольники ABC и ADB подобны. Тогда имеем:

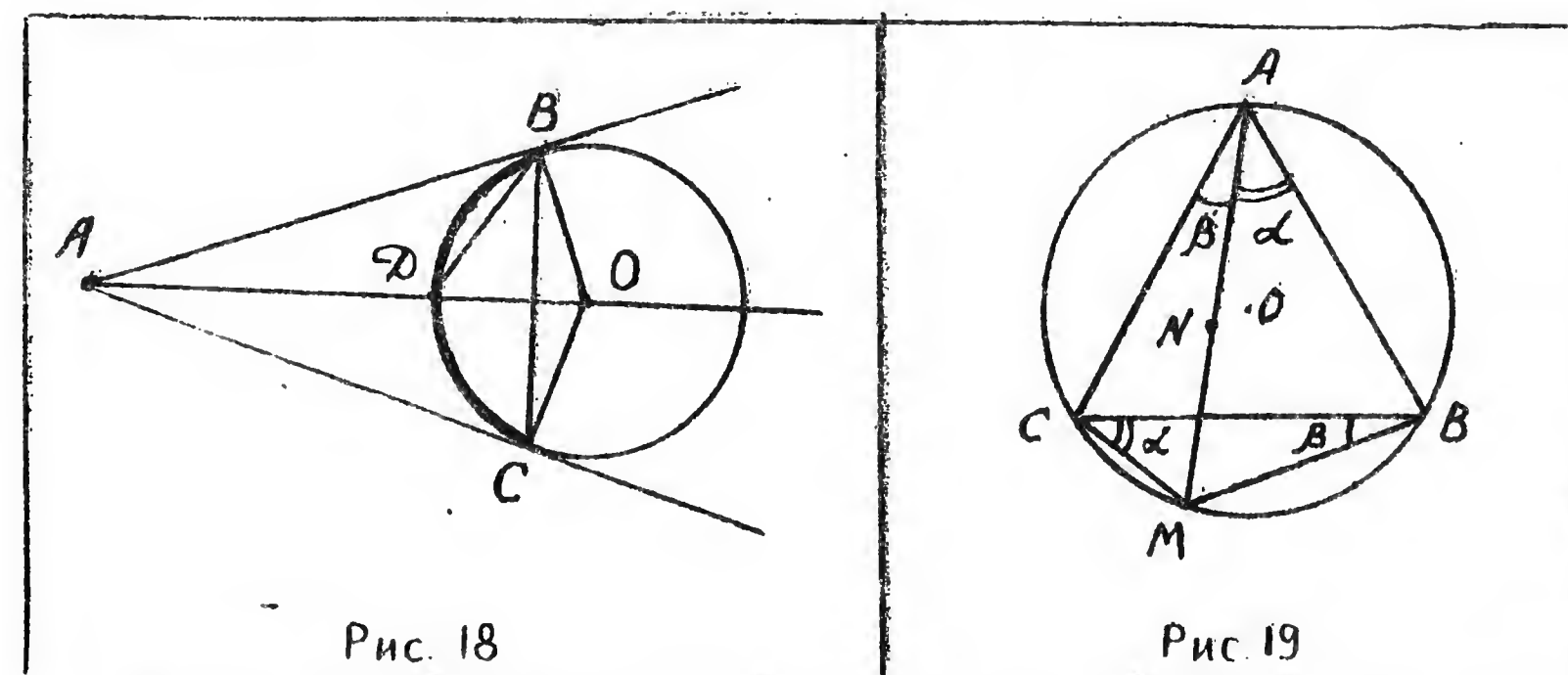
$$\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}.$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC^2}{AD^2}$$

или $AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC$

что и требовалось.



№ 17. Дана окружность и точка A вне её. AB и AC - касательные к окружности (B и C - точки касания). Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , лежит на данной окружности.

Решение. Пусть O - центр данной окружности и отрезок AO пересекает её в точке D - см.рис.18. Докажем, что D - точка

пересечения биссектрис треугольника ABC и, тем самым, что она - центр вписанной в этот треугольник окружности.

1) Докажем, что AO - биссектриса угла BAC . Действительно, прямоугольные треугольники AOB и AOC равны по гипотенузе AO и катетам OB и OC , потому что $\angle BAD = \angle CAD$.

2) Докажем, что BO - биссектриса угла ABC . Поскольку угол ABO измеряется половиной дуги AO (см. задачу № 3), а угол OBC - половиной дуги AO как вписанный угол, то достаточно показать, что выделенные на рис. 18 дуги BO и OC равны. Но это так, поскольку AO - ось симметрии угла BAC как его биссектриса и одновременно ось симметрии данного круга как его диаметр, а точки B и C симметричны относительно AO (треугольник ABC - равнобедренный, поэтому AO - биссектриса, значит - и высота, и медиана). Задача решена.

№ 18. Вокруг равностороннего треугольника ABC описана окружность и на дуге BC взята произвольная точка M . Доказать, что $AM = BM + CM$.

Решение. Пусть R - радиус окружности, $\angle BAM = \alpha$, $\angle MAC = \beta$ (рис. 19). Тогда $\angle MBC = \beta$, $\angle MCB = \alpha$ (по свойству вписанных углов), $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$. По теореме синусов, примененной к треугольникам BAM и MAC , имеем:

$$\begin{aligned} BM &= 2R \sin \angle BAM = 2R \sin \alpha; \\ CM &= 2R \sin \angle MAC = 2R \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right); \\ AM &= 2R \sin \angle ACM = 2R \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right). \end{aligned}$$

Стало быть, для доказательства надо проверить равенство

$$2R \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) = 2R \sin \alpha + 2R \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right).$$

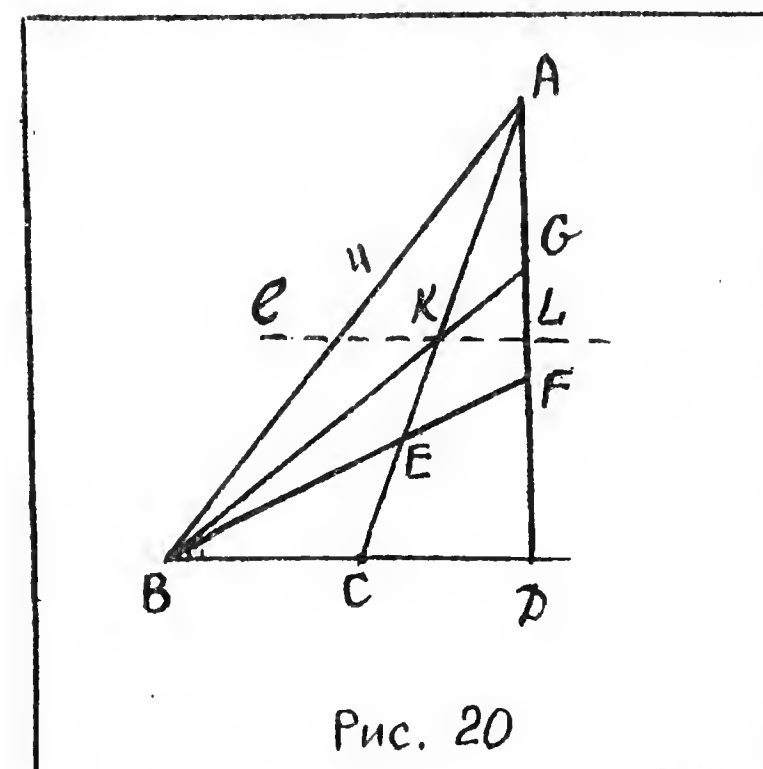
Сокращая на $2R$ и раскрывая $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$ и $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$ по формуле синуса суммы,

получаем, что наше тождество выполнено, что и требовалось доказать.

Второе решение. Выберем на отрезке AM точку N так, что $MN = BM$. Тогда треугольник BMN равносторонний, так как $MN = BM$ и $\angle BMN = \angle BMA = \angle BCA = 60^\circ$. Следовательно, при повороте вокруг точки B на 60° точка M перейдет в точку N , а так как при этом же повороте точка C , очевидно, перейдет в точку A , то отрезки BM и CA совпадут, т.е. $AM = CM$.

Теперь запишем $AM = MN + AN = BM + CM$, что и требовалось доказать.

№ 19. В треугольнике ABC проведены: BK - медиана, BE - биссектриса, AD - высота. Найти длину стороны AC , если известно, что прямые BK и BE делят отрезок AD на три равные части и длина AB равна 4.



Решение. Пусть прямая BE пересекает высоту AD в точке F , а прямая BK - в точке G (см. рис. 20). Из прямоугольного треугольника ABD имеем (по свойству биссектрисы):

$$AB : BD = AF : FD.$$

Так как гипотенуза AB больше катета BD , то $AF : FD > 1$.

Так как точки F и G делят отрезок AD на три равные части, то $AF : FD = 2$, G лежит между A и F и $AG = GF = FD$.

Так как $AB : BD = AF : FD = 2$, то $\angle ABD = 60^\circ$, $BD = 2$.

Отсюда по теореме Пифагора $AD = 2\sqrt{3}$.

Проведем через точку K - середину отрезка AC - прямую CE , параллельную BD . Она пересечет отрезок AD в точке L , его середине. Имеем:

$$AC = \frac{1}{3} AD < \frac{1}{2} AD = AL.$$

Теперь мы можем найти положение точки K как точки пересечения прямых CE и BC ; она находится от прямой AD по ту же сторону, что и точка C , значит, угол BCA - тупой.

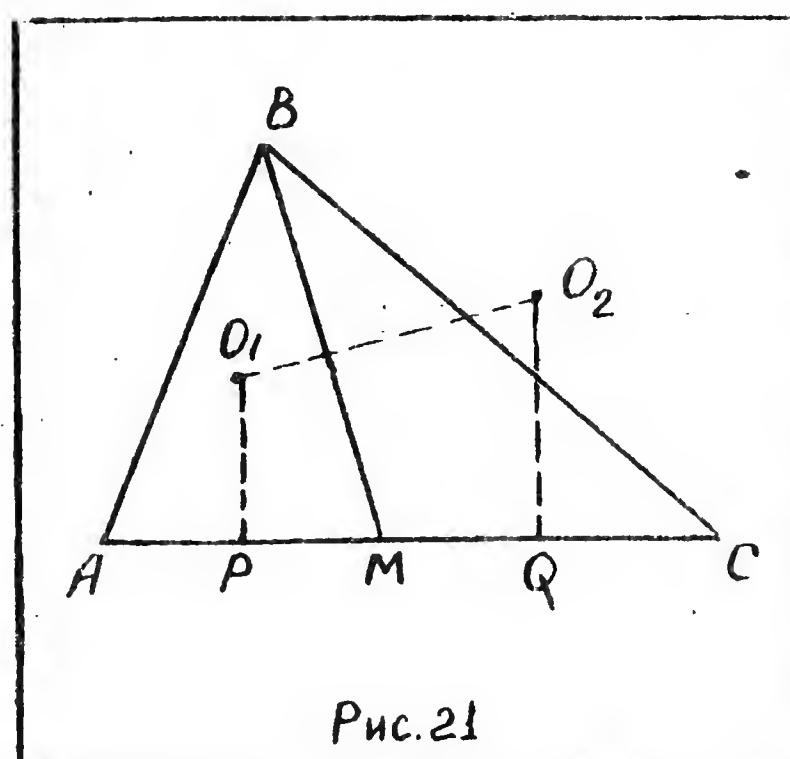
Легко видеть, что $CL = \frac{1}{6} AD$, $CD = \frac{2}{3} AD$,

откуда $CL : CD = \frac{1}{4}$. Из подобия треугольников CKL и CBK имеем тогда: $KL : BK = \frac{1}{4}$, поэтому $KL = \frac{1}{2}$. KL - средняя линия в треугольнике ADC , значит $CD = 2KL = 1$. Теперь из треугольника ADC имеем:

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{1 + 12} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\sqrt{13}$.

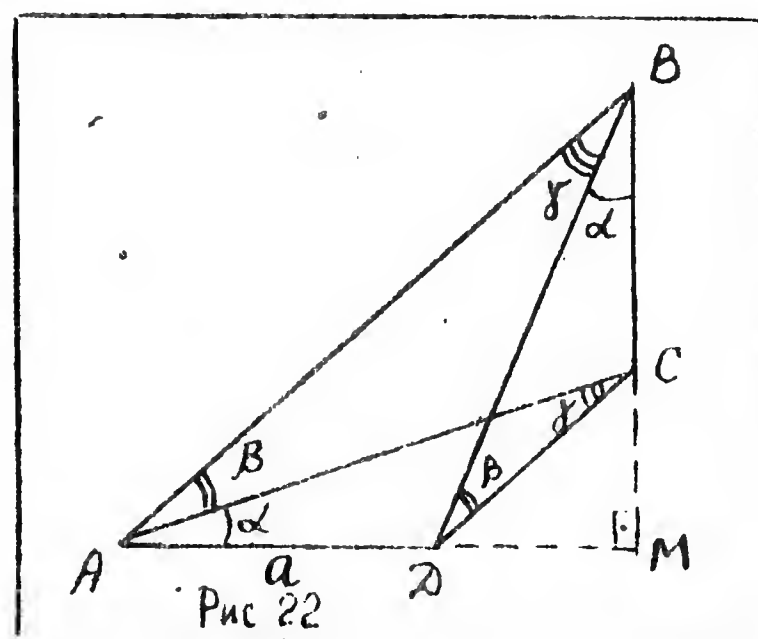
№ 20. В треугольнике ABC на наибольшей стороне $AC = b$ выбирается точка M . Найти наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM .



Решение. Покажем, что наименьшее расстояние равно $b/2$. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников BAM и BCM , P и Q — середины отрезков AM и MC . Тогда O_1P и O_2Q — серединные перпендикуляры к отрезкам AM и MC соответственно. Отрезок PQ — проекция отрезка O_1O_2 на прямую AC . Следовательно, $O_1O_2 \geq PQ$. Но $PQ = PM + MQ = \frac{1}{2}(AM + MC) = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$, то есть $O_1O_2 \geq b/2$. С другой стороны, в этом неравенстве равенство может достигаться, если $BM \perp AC$. В этом случае, поскольку X — середина отрезка BM и $O_1X \perp BM$, $O_2X \perp BM$, то $O_1O_2 \parallel AC$ (т.к. $BM \perp AC$). Следовательно, O_1O_2QR — прямоугольник и $O_1O_2 = PQ = b/2$. Этим наше утверждение доказано.

Ответ: $\frac{b}{2}$.

№ 21. Во вписанном в круг четырехугольнике две противоположные стороны взаимно перпендикулярны, одна из них равна a , прилежащий к ней острый угол делится диагональю на части α и β . Определить диагонали (угол α прилежит к данной стороне).



Решение. Пусть $AD \perp BC$, $AD = a$. Так как четырехугольник $ABCD$ вписанный, то $\angle DBC = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle ABD = \angle ACD$. Обозначим этот угол через γ . Из прямоугольного треугольника DBM имеем: $\angle BDM = \frac{\pi}{2} - \alpha$, откуда $\angle CDM = \frac{\pi}{2} - \alpha - \beta$. Тогда из прямоугольного треугольника DCM :

$$\angle DCM = \frac{\pi}{2} - \angle CDM = \alpha + \beta.$$

В прямоугольном треугольнике ACM : $\gamma + \angle DCM = \frac{\pi}{2} - \alpha$, поэтому

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha - \angle DCM = \frac{\pi}{2} - 2\alpha - \beta.$$

Теперь, применяя теорему синусов к треугольникам ACD и ABD , имеем:

$$AC = \frac{a \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma} = \frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)};$$

$$BD = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \gamma} = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}.$$

Ответ: $\frac{a \cos(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}$; $\frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\cos(2\alpha + \beta)}$.

2. Указания по проверке

Почти все общие соображения, приведенные по проверке задания по тригонометрии (см. с. 10), можно повторить и здесь.

Задача 3. Если результат получен лишь для одного из углов, сделать замечание, но оценку не снижать.

Задача 14. Если верно рассмотрен лишь один случай, ставить "±".

Задача 19. Если не обосновано, что треугольник ABC тупоугольный, чертеж неверный и его по существу используют для решения, ставить не выше "±".

Задача 20. Если сделана оценка, но не приведен пример её достижения, ставить не выше "±".

Критерии оценок

Обязательная часть: "зачет" — решены 7-9 задач;

"4" — решены 10-12 задач;

"5" — решены 13-14 задач.

Дополнительная часть: "4" — решены 3-4 задачи,

"5" — решены 5-7 задач.

III. Текстовые задачи

Условия, ответы, решения, указания к решению



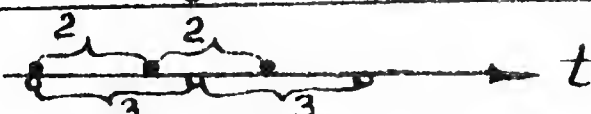
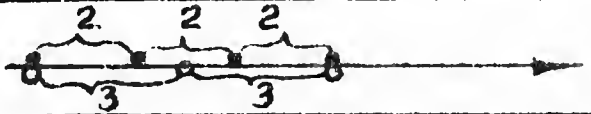

За малым исключением эти решения не являются образцами для оформления решений в тетради; к большинству задач приведены лишь наброски решений и зачастую, чтобы довести эти наброски до полных решений, необходимо приложить известные усилия.

Обязательные задачи

[2.] Двое часов начали бить одновременно. Удары первых часов следуют друг за другом через 2 секунды, а вторых – через 3 секунды. Слившиеся удары воспринимаются как один. В котором часу это происходило, если всего послышалось 18 ударов?

Ответ: в II часов.

Набросок решения. Проще всего решить эту задачу подбором. Будем составлять такую таблицу (на рисунке по оси отложено время в секундах; черные кружки – удары I-х часов, белые – удары вторых часов).

Который час	Сколько послышалось ударов	Рисунок
I	I	
2	3	
3	5	
4	6	
5	8	

Доведем эту таблицу до конца (удобно рисовать её на клетчатой бумаге), получим, что 18 ударов было в II часов.

[4.] Найдите все трехзначные числа, которые в 25 раз больше суммы своих цифр.

Ответ: 150; 225; 375.

План решения. Искомое число, по условию, делится без остатка на 25. Значит, две его последние цифры могут быть только 00, 25,

50 или 75. Теперь разберем эти четыре случая.

Пусть сначала две последние цифры – 75, x – цифра сотен. Тогда число равно $100x + 75$, а сумма его цифр равна $x + 7 + 5 = x + 12$. Отсюда уравнение:

$$100x + 75 = 25(x + 12).$$

Решая его, получаем $x = 3$, т.е. в этом случае наше число равно 375. Три оставшихся случая разбираются аналогично.

Замечание. Возможны, разумеется, и другие решения. Например, можно не сообразить, что число оканчивается на 00, 25, 50 или 75, но догадаться, что оно оканчивается на 0 или 5, (т.к. делится на 5). В этом случае перебор будет длиннее.

[8.] В 12 часов часовая и минутная стрелки часов совпадают. Когда они совпадут в следующий раз?

Ответ: в I час $5\frac{5}{11}$ минут.

Решение. Как известно, циферблат разделен на 60 делений. При этом минутная стрелка проходит циферблат за час, а часовая стрелка за час проходит $1/12$ циферблата, т.е. 5 делений. Можно сказать, что минутная стрелка движется со скоростью 60 делений в час, а часовая – со скоростью 5 делений в час.

Пусть теперь встреча стрелок произойдет через t час после полудня. Часовая стрелка к этому моменту пройдет $5t$ (делений), а минутная $60 + 5t$ делений, т.к. она пройдет дополнительно целый круг (см. рис. 23). С другой стороны, за время t минутная стрелка

должна пройти $60t$ делений. Отсюда $60 + 5t = 60t$, $t = \frac{12}{11}$ час.

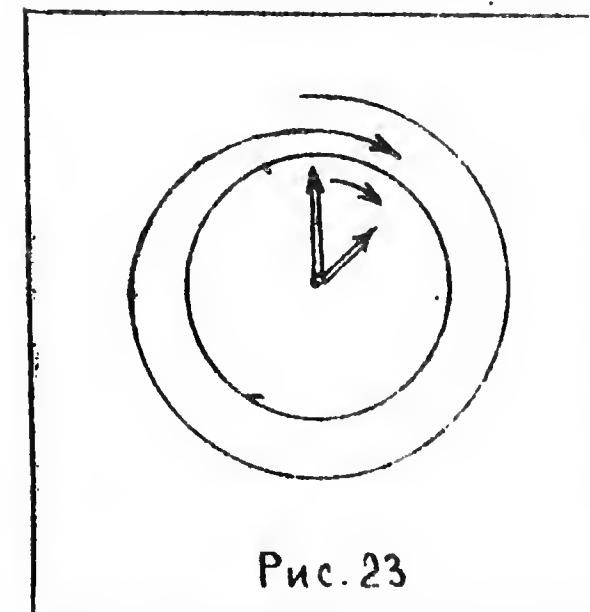


Рис. 23

[13.] Человек шел некоторое время со скоростью 4 км/ч, а потом столько же времени – со скоростью 8 км/ч. Какова была за это время его средняя скорость?

Ответ: 6 км/ч.

[14.] Человек прошел половину пути со скоростью 4 км/ч, а другую половину – со скоростью 8 км/ч. Какова была его средняя скорость на всем пути?

Ответ: $5\frac{1}{3}$ км/ч.

Указание к задачам I3 и I4. Средней скоростью называется отношение пройденного пути ко времени, за которое этот путь пройден.

I5. Человек прошел от A до B со скоростью 3 км/ч, а затем от B до C - со скоростью 6 км/ч, в результате чего весь путь от A до C он прошел со средней скоростью 5 км/ч. Найдите отношение AB к BC .

Ответ: $AB : BC = 1 : 4$.

Набросок решения. Пусть отношение AB к BC равно x , BC равно S км. Тогда AB равно (xS) км. Весь путь от A до C равен $xS + S$ км, и человек его прошел за $\frac{xS}{3} + \frac{S}{6}$ час. По определению средней скорости, средняя скорость на пути от A до C равна $\frac{xS + S}{\frac{xS}{3} + \frac{S}{6}}$ км/ч, что по условию равно 5 км/ч.

Отсюда

$$\frac{xS + S}{\frac{xS}{3} + \frac{S}{6}} = 5.$$

Сокращая дробь, приходим к ответу.

I7. Пароход плавает от Горького до Астрахани 5 суток, а от Астрахани до Горького - 7 суток. Сколько суток плывут плоты от Горького до Астрахани?

Ответ: 35 суток.

Набросок решения. Пусть пароход в стоячей воде проходит за сутки V км (или иными словами: скорость парохода в стоячей воде равна V км/сутки), U км/сутки - скорость течения Волги. Тогда скорость парохода по течению равна $(V + U)$ км/сутки, а против течения $(V - U)$ км/сутки. С другой стороны, если S км - расстояние от Горького до Астрахани, то из условия имеем $\frac{S}{5} = V + U$, $\frac{S}{7} = V - U$; время, которое нам надо найти, равно $\frac{S}{U}$.

$$\text{Из системы } \begin{cases} V + U = \frac{S}{5}, \\ V - U = \frac{S}{7} \end{cases}$$

можно выразить U через S ; после этого легко находится $\frac{S}{U}$, что и дает ответ.

I8. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу, и каждый приехал туда, откуда выехал другой, причем один приехал через 16, а другой - через 25 часов после их встречи. Сколько часов ехал каждый автомобиль?

Ответ: первый ехал 36 час., второй - 45 час.

Набросок решения. Пусть первый автомобиль ехал x часов, второй ехал y часов; расстояние между пунктами, из которых выехали автомобили, обозначим через S км.

Значит, скорость первого автомобиля равна $\frac{S}{x}$ км/ч, скорость второго $\frac{S}{y}$ км/ч. Тогда легко видеть, что время от выезда автомобилей до момента встречи равно

$$\frac{\frac{S}{\frac{S}{x} + \frac{S}{y}}}{\frac{S}{x}} = \frac{\frac{xy}{x+y}}{\frac{S}{x}} \text{ (час.)}$$

Поэтому первый автомобиль проехал до встречи $\frac{S}{x} \cdot \frac{xy}{x+y} = \frac{Sy}{x+y}$ км, а второй - $\frac{Sx}{x+y}$ км.

Стало быть, первый автомобиль после встречи ехал еще

$$\left(\frac{Sx}{x+y} : \frac{S}{x} \right) \text{ час., а второй } \left(\frac{Sy}{x+y} : \frac{S}{y} \right) \text{ час.}$$

Сокращая на S и применяя условие, получаем систему уравнений:

$$\frac{x^2}{x+y} = 16; \quad \frac{y^2}{x+y} = 25.$$

Решая эту систему (удобно начать с того, что поделить первое уравнение на второе, после чего x легко выражается через y), получаем ответ.

Замечание к задачам I7 и I8. Обратите внимание, что в этих задачах нам было все равно, в каких единицах измерять расстояние. При желании можно было бы и вообще не обозначать расстояние никакой буквой, а принять его за единицу. Пример такого оформления решения см. ниже.

22. Эскалатор спускает идущего по нему вниз человека за 1 минуту. Если человек будет идти вниз вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе?

Ответ: полторы минуты.

Набросок решения. Примем длину эскалатора за 1, а время будем измерять в минутах. Пусть ε - скорость движения эскалатора, γ - скорость человека, спускающегося по неподвижной лестнице (таким образом, скорость мы измеряем в частях эскалатора, проходимых за минуту). Когда человек спускается по движущемуся эскалатору, его скорость равна $\gamma + \varepsilon$, а время спуска $\frac{1}{\gamma + \varepsilon} = 1$ (по условию). Аналогично рассмотрев случай, когда человек идет вдвое быстрее, получаем уравнение $\frac{1}{2\gamma + \varepsilon} = \frac{3}{4}$.

Решая систему $\begin{cases} \frac{1}{x+z} = 1, \\ \frac{1}{2x+z} = \frac{3}{4} \end{cases}$, находим z ; искомое

время, очевидно, равно $1/z$.

[28.] Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом через каждый час. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются каждые полчаса. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

Ответ: один - за 2 часа, другой - за 40 мин.

Решение. Пусть S км - длина кольцевой дороги, x и y час-времена, за которые первый и второй автомобили соответственно делают полный круг. Скорости автомобилей тогда равны S/x и S/y (км/час). Пусть, для определенности, $\frac{S}{x} > \frac{S}{y}$, и рассмотрим сначала случай, когда автомобили движутся в одну сторону.

За час между двумя обгонами первый автомобиль проедет $\frac{S}{x}$ км, второй $\frac{S}{y}$ км. Ясно, что за это время первый автомобиль проедет ровно на круг больше второго, то есть $\frac{S}{x} - \frac{S}{y} = S$, или, после сокращения на S , $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$.

Пусть теперь автомобили движутся в противоположных направлениях. Тогда за $1/2$ часа между двумя встречами первый автомобиль проедет $\frac{S}{x} \cdot \frac{1}{2}$ км, второй проедет $\frac{S}{y} \cdot \frac{1}{2}$ км, и в сумме эти расстояния дадут как раз полный круг.

Значит, $\frac{S}{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{S}{y} \cdot \frac{1}{2} = S$, или, сокращая на S , имеем $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{2} = 1$. Получаем второе уравнение, связывающее x и y . Решая систему из этих двух уравнений, получаем ответ.

[32.] На овощной базе хранились огурцы, содержавшие 99% воды по весу. За время хранения часть воды испарилась, в результате чего в огурцах стало 98% воды. Сколько процентов веса потеряли огурцы?

Ответ: 50%.

Решение. Пусть вес огурцов был x (кг). Тогда масса сухого вещества в них (т.е. всего, кроме воды) была, при закладке на хранение, $0,01x$. Такой же она осталась и после хранения (испаряется только вода!), но теперь эти $0,01x$ кг сухого вещества составляют от общего веса уже $100\% - 98\% = 2\%$ (а не 1%, как было

первоначально). 2% - это $1/50$, значит, вес огурцов после хранения был в 50 раз больше, чем $0,01x$, т.е. был $0,5x$. Итак, был вес x , стал $0,5x$ - это и означает, что огурцы потеряли 50% своего веса.

[35.] Из сосуда, наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Наконец, опять после перемешивания отлили литр смеси и долили литр воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в 7 раз больше по объему оставшегося в нем глицерина. Каков объем сосуда?

Ответ: 2 л.

Краткое решение. Пусть объем сосуда равен x л. Будем следить за тем, сколько из него отливают каждый раз глицерина. После первого перемешивания в сосуде остался $(x-1)$ л глицерина. В одном литре смеси, получившейся после первого доливания воды, было $\frac{x-1}{x}$ л глицерина (т.к. всего в сосуде был $(x-1)$ л глицерина, и в результате перемешивания эти $(x-1)$ л глицерина равномерно распределились между каждым из x литров смеси). Значит после второго переливания осталось

$$x-1 - \frac{x-1}{x} = (x-1)\left(1 - \frac{1}{x}\right) \text{ л}$$

глицерина.

В одном литре смеси, получившейся после второго перемешивания было

$$\frac{(x-1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \text{ л}$$

глицерина, и стало быть, после третьего перемешивания в сосуде осталось

$$(x-1)\left(1 - \frac{1}{x}\right) - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = (x-1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 \text{ л}$$

глицерина.

С другой стороны, по условию, воды стало в 7 раз больше, чем глицерина, т.е. глицерина стало $\frac{x}{8}$ л (а воды $\frac{7x}{8}$ л). Отсюда уравнение:

$$(x-1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x}{8}$$

Решая его (для этого удобно поделить обе части на x , после чего левая часть будет полным кубом), получаем ответ.

Замечание. I.) Можно решать и по-другому, если следить за количеством не глицерина, а воды в сосуде. При этом решение будет более громоздким, т.к. воду не только вливают в сосуд, но и отливают из него (в составе смеси).

2) Пусть вообще, из сосуда объемом X л, содержащего смесь глицерина и воды, отливают l л смеси и доливают l л воды. Тогда в результате этих операций количество глицерина в сосуде умножается на $(1 - \frac{l}{X})$.

39. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый работал вдвое быстрее, а второй - вдвое медленнее, то они выполнили всю работу за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу каждый рабочий, работая один?

Ответ: каждый бы выполнил работу за 10 дней.

Краткое решение. Пусть первый рабочий потратил бы на всю работу x дней, а второй - y дней. Тогда за день первый делает $\frac{1}{x}$ часть, а второй - $\frac{1}{y}$ часть, всей работы. Работая совместно, они делают за день $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ часть работы. Так как всю работу при этом сделают они за 5 дней, эта часть работы составит $\frac{1}{5}$, откуда $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$. Если первый будет работать вдвое быстрее, а второй вдвое медленнее, то за день они будут вместе делать $\frac{2}{x} + \frac{1}{2y}$ часть работы, что, по условию, составит $\frac{1}{4}$, откуда $\frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}$.

Решая систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

получаем ответ.

Дополнительные задачи

I. Мне вдвое больше лет, чем было Вам тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас. Вместе нам 70 лет. Сколько лет каждому?

Ответ: мне - 40 лет, Вам - 30 лет.

Набросок решения. Пусть мне сейчас x лет, а Вам - y лет. Составим таблицу:

	Мой возраст	Ваш возраст
Сейчас	x	y
Тогда	y	$y - (x - y)$

В этой табличке "тогда" относится к тому времени, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас, т.к. "когда мне было y лет". Так как Вы сейчас (и всегда) моложе меня на $x - y$ лет, Вам тогда было $y - (x - y)$ лет. Согласно первому условию задачи, $x = 2(y - (x - y))$; по второму условию, $x + y = 70$. Решая получившуюся систему двух уравнений, получаем ответ.

6. Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Найдите это число.

Ответ: 63.

План решения. Пусть a - цифра десятков, b - цифра единиц. Тогда из условия следует равенство:

$$10a + b = 3(ab) + 9, \text{ откуда } a(10 - 3b) = 9 - b,$$

так как b - цифра, $9 - b \geq 0$. Значит, $10 - 3b \geq 0$, откуда b может равняться только 0, 1, 2 или 3. Остается разобрать эти 4 случая, учитывая, что должно быть еще $9 < ab$, так как 9 - остаток от деления на ab .

9. Сколько раз в сутки часовая и минутная стрелки совпадают?

Ответ: 22 раза.

Первое решение. Решая задачу 8, мы фактически убедились, что между двумя последовательными моментами совпадения стрелок проходит 1 час $5\frac{5}{11}$ минут. Если поделить 24 часа на 1 час $5\frac{5}{11}$ минут, то как раз и получится 22.

Второе решение. Можно решить эту задачу и без громоздких вычислений. В самом деле, в 12 часов дня стрелки совпадают, в промежутке между 12 часами и часом дня совпадений стрелок, очевидно, не будет. Зато между 1 ч и 2 ч пополудни один раз, очевидно, минутная стрелка обгонит часовую, и тем самым один раз стрелки совпадут. Аналогично, по одному совпадению стрелок будет между 2 ч и 3 ч, 3 и 4, ..., 10 и 11 часами, наконец, в полночь. Итого за полсуток получится 11 совпадений стрелок, а за одни сутки, $2 \cdot 11 = 22$.

11. Сколько раз в сутки часовая стрелка и минутная стрелки образуют прямой угол?

Ответ: 44 раза.

Решение. Приделаем к нашим часам еще две стрелки, жестко связанные минутной и составляющие с ней (во все время) углы по 90°

(см. рис. 24). Заведем теперь часы; очевидно, минутная и часовая стрелки составляют прямой угол, тогда и только тогда, когда часовая стрелка совпадает с одной из двух новых стрелок. С каждой из новых стрелок она совпадает 22 раза (см. задачу 9), а значит всего получается 44 раза.

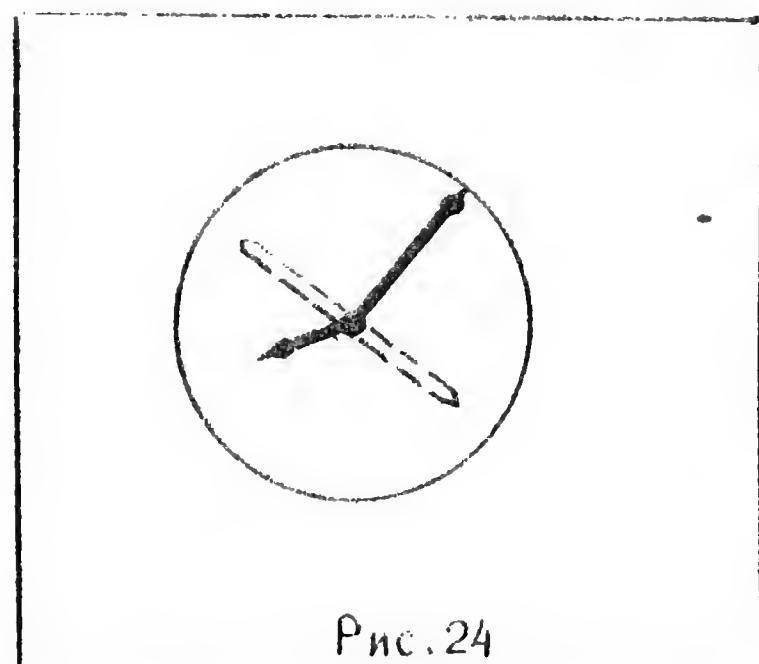


Рис. 24

Ответ: $(\sqrt{10} + 1)$ км.

Набросок решения. Пусть v км/час — скорость колонны, u км/час — скорость связного. Из начала в конец колонны связной ехал

$\frac{1}{u+v}$ час (т.к. длина колонны — 1 км, скорость связного относительно колонны $u+v$ км/час). Аналогично из конца в начало колонны связной ехал $\frac{1}{u-v}$ час, а всего он ездил

$\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v}\right)$ час. Колонна за это время прошла расстояние $v\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v}\right)$, что, по условию, равно 3 км.

Итак,

$$v\left(\frac{1}{u+v} + \frac{1}{u-v}\right) = 3.$$

Из этого уравнения (оно сводится к однородному квадратному уравнению относительно u и v) находим, что $\frac{u}{v} = \frac{1+\sqrt{10}}{3}$.

Следовательно, за то время, пока колонна прошла 3 км, связной проехал расстояние в $\frac{u}{v}$ раз большее, т.е. $\frac{1+\sqrt{10}}{3} \cdot 3 = 1+\sqrt{10}$ км.

[23.] Человек, идя по движущемуся эскалатору, насчитал на нем 50 ступенек, а идя в ту же сторону втрое быстрее, он насчитал 75 ступенек. Сколько ступенек он насчитал бы, идя с той же скоростью по неподвижному эскалатору?

Ответ: 100 ступенек.

Набросок решения. Пусть на неподвижном эскалаторе x ступенек. Будем измерять скорости в "ступеньках в минуту". Пусть u ступенек в минуту — скорость эскалатора, v ступенек в минуту — первоначальная скорость человека относительно эскалатора. Тогда в первый раз человек спустится за $\frac{x}{u+v}$ мин и насчитает за это время $\frac{x}{u+v} \cdot v$ ступенек. Аналогично, второй раз человек насчитает $\frac{x \cdot 3v}{u+3v}$ ступенек. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{xv}{u+v} = 50, \\ \frac{x \cdot 3v}{u+3v} = 75. \end{cases}$$

Из этой системы и находим x .

Замечание. Незвестных тут больше, чем уравнений, но если поделить в обоих уравнениях числитель и знаменатель левой части на v , то получаются два уравнения с двумя неизвестными: x и u/v .

[24.] Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист отставал от них на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обошел пешехода в тот момент, когда пешехода нагнал мотоциклист?

Ответ: на 2 км.

1-е решение (набросок). Будем отсчитывать время от того момента, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, а расстояние от того места, где мотоциклист находился в этот момент (см. рис. 25а). Скорости пешехода, велосипедиста и мотоциклиста

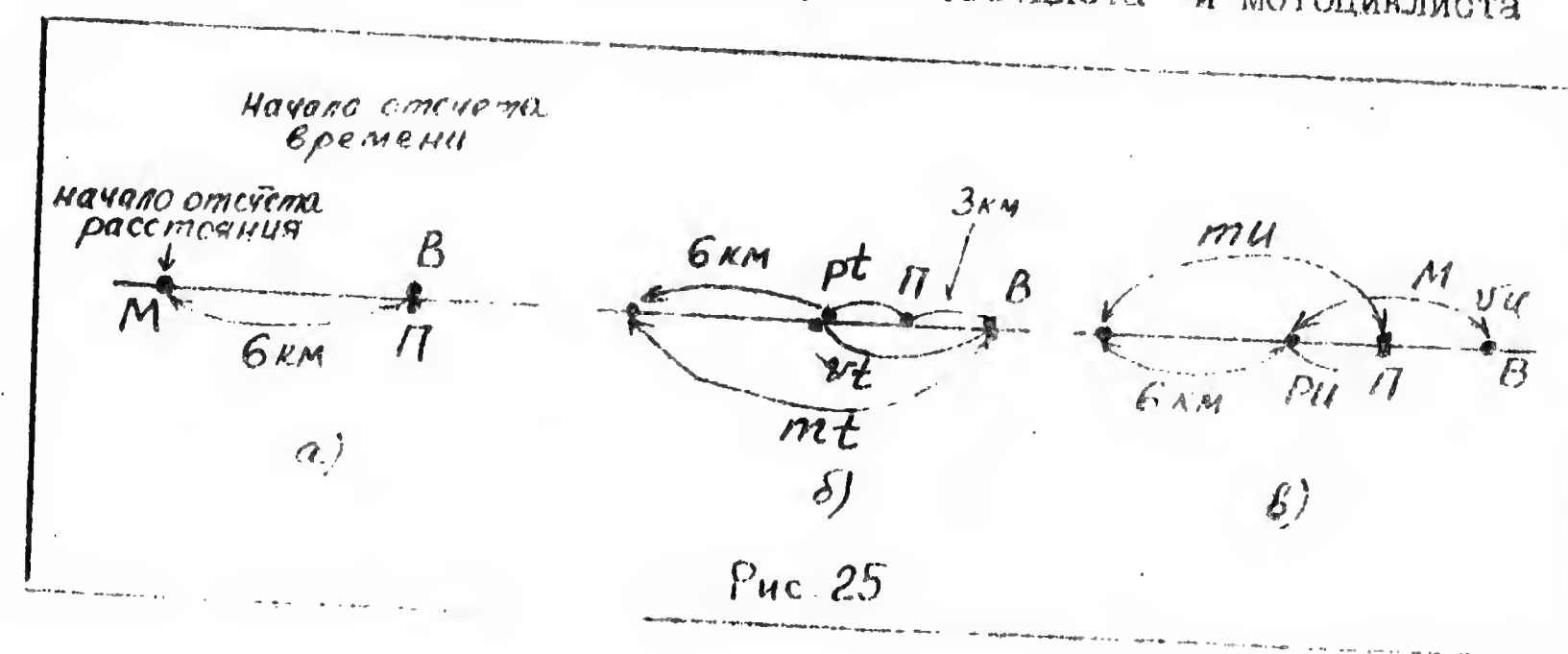


Рис. 25

обозначим соответственно через p , v и m (км/час).

Пусть через t часов мотоциклист догонит велосипедиста (рис. 25б). Тогда нетрудно видеть из рисунка, что $6 + vt = mt$, так как к этому моменту пешеход отставал от велосипедиста на 3 км, имеем $3 + pt = vt$.

Пусть мотоциклист нагнал пешехода через u час после начала отсчета. Тогда (см. рис. 25в) $mu = 6 + pu$, а надо нам найти $(vu - pu)$. Итак,
$$\begin{cases} 6 + vt = mt, \\ 3 + pt = vt, \\ 6 + pu = mu, \end{cases}$$

и надо найти $(vu - pu)$. Это можно сделать, например, так: если подставить выражение для vt из второго уравнения в первое; если сопоставить полученное уравнение с третьим, то легко найти отношение $\frac{u}{t}$; однако же, зная $\frac{u}{t}$ и $vt - pt$ (из второго уравнения), нетрудно найти и $(vu - pu)$.

2-е решение (набросок). Перейдем в систему отсчета, связанную с пешеходом. Расстояния и времена при этом не изменятся, зато пешехода можно будет считать неподвижным — можно даже заменить пешехода на фонарный столб. Задачу можно переформулировать так.

„Велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда велосипедист проезжал мимо фонарного столба, мотоциклист отставал от него на 6 км. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, они были на расстоянии 3 км от фонарного столба. На каком расстоянии от фонарного столба был велосипедист в тот момент, когда мотоциклист поравнялся с фонарным столбом?“

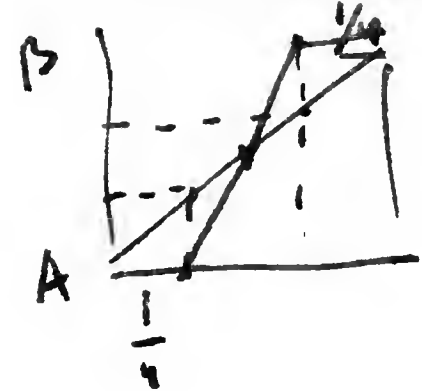
Эту задачу уже легко решить вообще без уравнений (подумайте, во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста).

[25.] Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, а через четверть часа вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от A до B автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в пункт B , велосипедисту осталось проехать еще треть пути. За какое время велосипедист проехал путь от A до B ?

Ответ: за 45 минут.

Решение (план). Пусть велосипедист проедет от A до B за x часов, а автомобиль — за y часов.

Когда автомобиль на половине пути догнал велосипедиста, велосипедист проехал $\frac{x}{2}$ часа, а автомобиль — $\frac{y}{2}$ часа.



$\frac{y}{2}$ часов. Так как автомобиль выехал на $\frac{1}{4}$ часа позже, получаем, что
$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{1}{4}.$$

Когда автомобиль проехал весь путь AB , т.е. ехал y часов, велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, т.е. ехал $\frac{2x}{3}$ часа. Так как автомобиль выехал на $\frac{1}{4}$ часа позже, получаем
$$\frac{2x}{3} = y + \frac{1}{4}.$$

Итак, у нас получились два уравнения с двумя неизвестными.

[34.] Температуру можно измерять по шкале Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0 градусов по Цельсию соответствует 0 градусам по Реомюру и 32 градусам по Фаренгейту, а 100 градусов по Цельсию соответствует 80 градусам по Реомюру и 212 градусам по Фаренгейту. Сколько градусов по Реомюру будет, если температура по Цельсию и Фаренгейту составляет равное число градусов?

Ответ: -32° по Реомюру.

Составим таблицу *)

	Температура		
	C	R	F
Точка замерзания воды	0	0	32
Точка кипения воды	100	80	212

Решение (набросок). Промежуток от точки замерзания воды до её кипения разделен в шкале Цельсия на 100 градусов, а в шкале Фаренгейта на $212 - 32 = 180$ градусов. Значит, градус Фаренгейта в $\frac{180}{100} = 1,8$ раза больше градуса Цельсия.

Пусть температура составляет C градусов Цельсия. Это значит, что она на C градусов Цельсия выше ***) точки замерзания воды, и, тем самым, на $1,8C$ градусов Фаренгейта выше точки замерзания воды. Однако, точка замерзания воды имеет по шкале Фаренгейта температуру 32 градуса, значит, всего температура по Фаренгейту составляет $1,8C + 32$.

Итак, мы нашли, как переводить температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта: если по Цельсию температура составляет C ...

*) C, R, F — сокращения от "Цельсия", "Реомюра", "Фаренгейта".

**) Если $C > 0$; если $C < 0$, то температура отрицательна.

дусов, то по Фаренгейту она будет $1,8C + 32$ градуса. Если искомая температура составляет C градусов Цельсия, то из условия получаем уравнение $C = 1,8C + 32$, откуда $C = -40$.

Осталось перевести эту температуру в шкалу Реомюра. Это делается аналогично тому, как мы переводили температуру из шкалы Цельсия в шкалу Фаренгейта.

40. Три работницы делают игрушки. Первая работница делает 5 игрушек в час, вторая — 8 игрушек в час. Первые две работницы начали работу одновременно, а третья — на полчаса позже. Через некоторое время третья работница догнала по количеству изготовленных игрушек первую работницу, а через 1,5 часа и вторую. Определите производительность труда третьей работницы.

Ответ: 10 игрушек в час.

Решение (набросок). Пусть x игрушек в час — производительности труда третьей работницы, и пусть она догнала первую через t часов после начала работы. К этому моменту первая работница проработала $(t + \frac{1}{2})$ часа. Значит, $xt = 5(t + \frac{1}{2})$.

Через полтора часа третья работница догнала вторую; к этому моменту третья работница проработала $(t + \frac{3}{2})$ часа, а вторая $(t + 2)$ часа.

Отсюда $x(t + \frac{3}{2}) = 8(t + 2)$.

Решая систему уравнений
$$\begin{cases} xt = 5(t + \frac{1}{2}), \\ x(t + \frac{3}{2}) = 8(t + 2), \end{cases}$$

получаем ответ.

Номера контрольных задач

Обязательные задачи: № 2, 4, 8, 13, 14, 15, 17, 18, 22, 28, 32, 35, 39.

Дополнительные задачи: № 1, 6, 9, 11, 19, 23, 24, 25, 34, 40.

Критерии оценок

Основная часть: "5" — решены 7-9 задач;
"4" — решены 10-11 задач;
"3" — решены 12-13 задач.
Дополнительная часть: "4" — решены 4-6 задач;
"3" — решены 7-13 задач.

Редакция НИИОП АПН СССР

125037, Москва, ул. Новосильская, 4

Тел.: 251-11-11, 251-11-12

Российская академия образования

Всероссийская заочная многопредметная школа при МГУ

В.Н.Шандер

Уравнения и неравенства

Методические разработки для учащихся ВЗМШ

Задание 1: срок присылки

Задание 2: срок присылки

Москва, 1992

УДК 37.018.43

Уравнения и неравенства. Методические разработки для учащихся ВЗМШ Российской академии образования при МГУ (В.Н.Шандер - М., изд. РАО, 88 стр.).

Разработки предназначены для учащихся Всероссийской заочной многопредметной школы Российской академии образования при МГУ. Они содержат теоретический материал, посвященный общим принципам решения уравнений, неравенств и систем уравнений, а также разобранные примеры и задачи для самостоятельного решения. В конце брошюры приведены два контрольных задания.

Рецензенты: кандидат физико-математических наук Н.Б.Васильев; Ж.М.Работ.

©В.Н.Шандер, 1992

От автора

Эта брошюра рассказывает об основных идеях исследования и решения задач, связанных с уравнениями и неравенствами. Предполагается, что старшеклассник уже сталкивался и с уравнениями, и с неравенствами, и с системами.

В брошюре довольно много задач, причем почти все задачи в первых шести параграфах предназначены для того, чтобы читатель мог проверить — хорошо ли он понял основной текст. Контрольные задания приведены в конце пособия.

Инициатором написания этой брошюры был Израиль Моисеевич Гельфанд, чьим педагогическим принципам автор пытался следовать. Весьма полезными были обсуждения с Н.Б.Васильевым, Е.Г.Глаголевой, А.Б.Елисеевой и С.М.Львовским. В сотрудничестве с последним были написаны разделы “О неприятностях” и “Примеры и задачи”. Хочу также выразить благодарность В.Д.Арнольду и С.М.Львовскому за содействие в подготовке этой рукописи к печати.

Брошюра, которая лежит перед Вами, представляет собой предварительный, рабочий вариант пособия по теме “Уравнения и неравенства”. Ваши замечания и предложения будут учтены при подготовке следующих вариантов пособия и послужат, тем самым, ко всеобщему благу. Пишите по адресу:

119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, методической комиссии.

Оглавление

1	Какие уравнения мы можем решить?	6
1.1	Разложение на множители	6
1.2	Подстановка	7
1.3	Как найти подстановку	7
1.4	Возвратные уравнения	8
2	Многочлены	9
2.1	Деление с остатком	10
2.2	Вычисляем остатки, не деля	11
2.3	Теорема Безу	12
2.4	Теорема Виета	13
2.5	Целые корни	14
2.6	Рациональные корни	14
2.7	Разложение на множители методом неопределенных коэффициентов	15
3	Множества и условия	17
3.1	Основные понятия и обозначения теории множеств	17
3.2	Условия	19
3.3	Составные условия	20
3.4	Подмножества и следствия	21
4	Кое-что о неравенствах	23
4.1	Свойства числовых неравенств	23
4.2	Что значит решить неравенство?	24
4.3	Разложение на множители	27
4.4	Метод интервалов	27
4.5	Подстановка	28
4.6	Преобразования неравенств	29
5	Возрастающие функции и их свойства	32
5.1	Свойства возрастающих функций	33
5.2	Изготовление возрастающих функций	35

6	Угадывание решений и некоторые хитрости.	37
6.1	Гадаем на графиках	38
6.2	Как сделать из догадки доказанное утверждение	38
6.3	Пример: кубические уравнения	40
6.4	Ищем приближенные значения корней	42
7	О неприятностях	42
7.1	Что такое уравнение?	43
7.2	Как мы решаем уравнения?	45
7.3	Как получить следствие?	50
7.4	Построение следствий	51
7.5	Признаки равносильности	51
7.6	Неприятности, связанные с использованием тождеств	52
7.7	Неприятности с неравенствами	54
8	Системы	60
9	Примеры и задачи	67
9.1	Что такое решение?	74
10	Дополнение. Подмножества прямой и плоскости	80
11	Контрольные задания	86

1 Какие уравнения мы можем решить?

Рецепта, как решить любое уравнение, которое может Вам встретиться, не существует. Обычно поступают так: с помощью разного рода преобразований и логических рассуждений сводят эту задачу к одной или нескольким попроще, новые уравнения тоже сводят к еще более простым, и так до тех пор, пока не дойдут до таких, способ решения которых уже известен.

Понятно, что чем больше разнообразных уравнений Вы решите, тем легче будет справиться с новыми. Сначала наберем побольше примеров таких уравнений, которые удастся решить. Вам известны формулы для корней линейных и квадратных уравнений¹. Запас уравнений, которые мы можем решить, легко пополнить, и даже многими способами. Самые “мощные” из этих способов — разложение на множители и подстановка.

1.1 Разложение на множители

Уравнение пятой степени

$$(x^2 - 2)(x + 1)(x + 2)(x - 10) = 0$$

решить легко: его корни — это числа -1 , -2 , 10 , $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. Действительно, произведение нескольких чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Точно так же уравнение $(x^2 + 1)(x + 1) = 0$ имеет один корень $x = -1$, а уравнение $(2x - 1)(x + 3) = 0$ — два корня: $x = 0$ и $x = -3$. Уравнение $x^4 + 4x^3 + 5x^2 = 3$ достаточно переписать в виде $(x^2 + 3x + 3) \cdot (x^2 + x - 1) = 0$ и останется решить два квадратных уравнения, что не составит труда.

Итак, если нам удастся преобразовать данное уравнение к виду $h(x) \cdot g(x) = 0$ (здесь $h(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции), то достаточно будет решить по отдельности уравнения $h(x) = 0$ и $g(x) = 0$, чтобы найти все корни исходного уравнения.

¹ Если использовать логарифмическую и показательную функции, а также обратные тригонометрические функции, то можно решить уравнения $x^a = b$, $a^x = b$, $\sin x = a$, $\lg x = a$, где a и b — числа, и все уравнения, которые к ним сводятся.

1.2 Подстановка

Посмотрим на уравнение $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) = -12$. Хотя это уравнение и четвертой степени, решить его очень легко. Обозначим $x^2 + x$ через y (обычно говорят “сделаем подстановку $y = x^2 + x$ ”). Тогда уравнение запишется как $y^2 - 8y = -12$. Отсюда легко найти y , а по y найти x . Уравнение $y^2 - 8y = -12$ имеет два корня и каждый из них даст по два корня исходного уравнения.

Ответ: 1; -2; 2; -3.

Итак, если нам удастся записать данное уравнение в виде $h(g(x)) = 0$ (здесь h и g — некоторые функции), то задача упростится. Сначала надо будет решить уравнение $h(y) = 0$, а потом уже решать уравнения $g(x) = t$ для каждого корня t уравнения $h(y) = 0$. Заметим еще, что если уравнение $h(y) = 0$ не имеет решений, то не имеет решений и уравнение $h(g(x)) = 0$, какую бы “страшную” функцию $g(x)$ мы ни подставили. Например, если в не имеющее решений уравнение $y^2 + 2y + 3 = 0$ подставить $y = x^2 + 2x + (1/x)$, то получится неприятное на вид уравнение $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 6x + 7 + (2/x) + (1/x)^2 = 0$, которое также заведомо не имеет решений.

Таким образом, если удалось выразить данную функцию $f(x)$ через более простые — разложить на множители или записать в виде $h(g(x))$, то и уравнение $f(x) = 0$ сводится к более простым уравнениям. (Заметьте, что всякое уравнение с одним неизвестным можно привести к виду $f(x) = 0$). Трудность “лишь” в том, что нет никакого общего способа отыскания подстановки или разложения на множители. Именно поэтому решение уравнений подчас требует изобретательности. Если $f(x)$ — многочлен (особенно, если все коэффициенты многочлена $f(x)$ — целые числа), то существуют специальные способы поиска решений уравнения $f(x) = 0$ и, в частности, разложения f на множители. Им мы посвятим следующий параграф.

1.3 Как найти подстановку

Далеко не всегда уравнения попадают к нам подготовленными, чтобы сделать в них подстановку. Иногда их приходится предварительно преобразовывать (впрочем, и это может не помочь). Все же есть несколько случаев, в которых подстановка очевидна.

Самый простой пример — уравнения, в которых неизвестное входит только в четной степени. Такие уравнения упрощаются заменой $y = x^2$. Например, уравнение $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ после такой замены сводится к квадратному. Другой пример дают так называемые возвратные уравнения.

1.4 Возвратные уравнения

Если $y = x + (1/x)$, то $y^2 = 2 + x^2 + (1/x^2)$, $y^3 = x^3 + (1/x^3) + 3(x + (1/x))$ и так далее. Отсюда $x^2 + (1/x^2) = y^2 - 2$, $x^3 + (1/x^3) = y^3 - 3y$, Таким образом, $x^n + (1/x^n)$ выражается через $x + (1/x)$ для любого n .

Пусть $P(x)$ — многочлен четной степени, у которого одинаковые коэффициенты при симметричных относительно середины выражения степенях x . Тогда уравнение $P(x) = 0$ называется возвратным. (Мы здесь считаем, что записаны все, в том числе и равные нулю, коэффициенты многочлена, в порядке убывания степени. Например, $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ — возвратное уравнение, а $x^4 + 2x + 1 = 0$ — нет.) Оказывается, что в возвратном уравнении можно после небольших преобразований сделать подстановку $y = x + (1/x)$. Покажем на примере, как это делается.

Рассмотрим возвратное уравнение $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0$. Умножив обе части этого уравнения на $(1/x^2)$, получим: $x^2 + 5x + 8 + (5/x) + (1/x^2) = 0$, что удобно записать как $(x^2 + (1/x^2)) + 5(x + (1/x)) + 8 = 0$. Обозначив $x + (1/x)$ через y , получим квадратное уравнение $y^2 + 5y + 6 = 0$. Ответ: $-1, -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

В общем случае возвратное уравнение $P(x) = 0$ степени $2k$ после деления на x и подстановки $x + (1/x) = y$ сводится к уравнению степени k .

Большинство школьных уравнений, содержащих показательные функции или логарифмы, обычно сводятся к уравнению $P(x) = 0$, где P — многочлен, с помощью подстановки вида $\log_a x = y$ или $a^x = y$. Например, уравнение

$$\log_x(125x) \cdot (\log_{25} x)^2 = 1$$

²Так как $x = 0$ не является корнем этого уравнения, то от умножения на $\frac{1}{x^2}$ корни не теряются.

после упрощения и подстановки $\log_5 x = y$ превращается в

$$(1 + \frac{3}{y}) \frac{y^2}{4} = 1,$$

а уравнение $9^x + 6^x = 2^{2x+1}$ после деления на $2x$ и подстановки $y = (3/2)^x$ — в $y^2 + y = 2$. В тригонометрических задачах тоже часто делают подстановку, выражая все тригонометрические функции данного угла через одну и ту же функцию. Подробно тригонометрические уравнения изучаются в брошюре “Тригонометрия”.

Упражнение 1.1. Решить уравнения

- а) $x|x| + x - 2 = 2|x|$; б) $x^4 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$;
в) $x^9 + x^6 = 0$; г) $4x^4 - 6x^3 + 3x - 1 = 0$.

Указание к пункту г). Можно, например, добавить и вычесть в левой части $2x^2$.

Упражнение 1.2. Решить уравнение $x^2 + \sqrt{x^2 - 3} = 5$.

Указание. Подстановка $\sqrt{x^2 - 3} = y$.

Упражнение 1.3. Решить уравнения:

- а) $x^4 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$; б) $x^3 + 8x^2 + 8x + 1 = 0$.

Упражнение 1.4. Вычислить $x^4 + (1/x^4)$, если

- а) $x + (1/x) = 7$; б) $x - (1/x) = 1$.

Упражнение 1.5. Приведите пример уравнения четвертой степени, которое можно упростить подстановкой $y = x - (1/x)$.

2 Многочлены

Займемся разложением многочленов на множители. Мы будем искать только такие разложения, в которых все множители — многочлены: ведь от “разложения” вроде $x^2 + 2 = \frac{x^2+2}{x+1} \cdot (x+1)$ немного толку.

2.1 Деление с остатком

Попробуем узнать, делится ли $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2$ на $x^2 + 1$. Будем постепенно “выделять” в $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2$ множитель $x^2 + 1$, начиная с члена x . Получим цепочку равенств

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2 = x^2(x^2 + 1) - 3x^2 - 3 - 3x + 1 = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - 3x + 1.$$

Разложения на множители не получилось, но вдруг мы использовали неудачный способ? Допустим, что все-таки существует такой многочлен $S(x)$, что $(x^2 + 1) \cdot S(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2$. Тогда $(x^2 + 1) \cdot S(x) = (x^2 - 3)(x^2 + 1) - 3x + 1$ и $3x - 1 = [x^2 - 3 - S(x)] \cdot (x^2 + 1)$, а вот это равенство явно невозможно: степень многочлена $[x^2 - 3 - S(x)] \cdot (x^2 + 1)$ не меньше двойки (степени $x^2 + 1$), поэтому он никак не может быть равен многочлену первой степени.

Итак, не существует такого многочлена $S(x)$, чтобы $(x^2 + 1) \cdot S(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2$, иначе говоря, $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2$ не делится на $x^2 + 1$. Получилось всего лишь равенство

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2 = (x^2 + 1) \cdot S(x) + R(x),$$

где $S(x) = x^2 - 3$ и $R(x) = -3x + 1$. Мы говорим, что при делении $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 2$ на $x^2 + 1$ получается частное $x^2 - 3$ и остаток $-3x + 1$. Вообще,

если $P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x)$, причем степень многочлена $R(x)$ меньше степени $Q(x)$, то говорят, что при делении $P(x)$ на $Q(x)$ получается частное $S(x)$ и остаток $R(x)$.

Остаток $R(x)$ равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен $P(x)$ делится на $Q(x)$.

Знакомое Вам деление целых чисел с остатком определяется почти так же: если $p = q \cdot s + r$, где p, q, s, r — целые числа и $0 \leq r < |q|$, то s — частное, а r — остаток при делении p на q .

В некоторых случаях мы научимся сразу вычислять остаток, не определяя частного, и тогда у нас появится удобный признак делимости многочленов.

Упражнение 2.1. а) Разделите с остатком $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$ на $x^2 + x + 1$;

б) Верно ли, что число $x^2 - 14$ не делится на число $x + 8$ ни при каком натуральном x ?

в) Докажите, что если $A(x), B(x), C(x), D(x), Q(x)$ — многочлены,

$$A(x) \cdot Q(x) + B(x) = C(x) \cdot Q(x) + D(x),$$

причем степень $B(x)$ меньше степени $Q(x)$ и степень $D(x)$ меньше степени $Q(x)$, то $A(x) = C(x)$ и $B(x) = D(x)$.

г) Найдите три разных пары многочленов (Q, R) , для которых выполнено равенство $x^4 - 2x^2 - 3x - 2 = (x^2 + 1) \cdot Q(x) + R(x)$.

Часто оказывается удобно записывать деление многочленов “уголком”, точно так же, как делают при делении чисел. Поделим, например, $x^3 + 3x$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r} x^3 + 0 \cdot x^2 + 3x + 0 \cdot 1 \quad | \quad x - 1 \\ - x^3 - x^2 \\ \hline x^2 + 3x \\ - x^2 - x \\ \hline 4x \\ - 4x - 4 \\ \hline 4 \end{array}$$

Получили, что $x^3 + 3x = (x^2 + x + 4)(x - 1) + 4$. Обратите внимание, что в делимом записаны равные нулю слагаемые $0 \cdot x^2$ и $0 \cdot 1$. Дело в том, что в ходе деления у нас могут появиться слагаемые всех степеней, меньших тройки (степени многочлена), и для них надо заранее оставить место. Писать $0 \cdot x^2$ и $0 \cdot 1$ не обязательно, но место оставить нужно.

2.2 Вычисляем остатки, не деля

Если бы в предыдущем примере нас интересовал только остаток, то его можно было бы найти без деления. Запишем $x^3 + 3x = (x - 1)S(x) + R(x)$, где $S(x)$ и $R(x)$ — те, пока неизвестные нам, многочлены, которые получаются в результате деления. Так как степень остатка должна быть меньше степени делителя, то $R(x)$ — это просто какое-то число r . Подставив $x = 1$ в равенство $x^3 + 3x = (x - 1)S(x) + r$, получим $r = 4$, так как $(r - 1)S(x)$ обратится в нуль.

- Упражнение 2.2.** а) Разделите $x^4 + x^3 + 3x + 4$ на $2x + 1$ с остатком;
 б) Найдите остаток от деления x^5 на $x + \sqrt{2}$;
 в) Найдите остаток от деления $x^{10} + x^3 + 1$ на $x^2 - 1$;
 г) Найдите остаток от деления $x^{100} + 2$ на $x^2 + x - 2$.

2.3 Теорема Безу

Понятно, что и в общем случае

при делении многочлена $P(x)$ на $x - a$, где a — число, остаток равен $P(a)$ — значению $P(x)$ при x , равном a .

Это утверждение называется теоремой Безу.

Чтобы узнать, делится ли один многочлен на другой, нам достаточно любым способом определить остаток. Раз мы научились вычислять остатки от деления многочленов на $x - a$, то это сразу дает нам признак (точнее — необходимое и достаточное условие) делимости многочлена $P(x)$ на $x - a$.

Многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда a — корень уравнения $P(x) = 0$.

Значит, если мы нашли корень a уравнения $P(x) = 0$, то мы можем разложить $P(x)$ на два множителя: $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$. Тогда нам останется решить уравнение $Q(x) = 0$.

На практике остаток от деления $P(x)$ на $x - a$ вычисляется проще, чем $P(a)$. Поэтому теорема Безу используется и для быстрого вычисления значений многочленов. Такой способ вычислений называется схемой Горнера.

Упражнение 2.3. Пусть необходимо вычислить значение многочлена $P(x)$ в точке a . Сколько сложений и сколько умножений потребуется для этого, если действовать:

- непосредственно подставляя a в $P(x)$;
- находя остаток от деления $P(x)$ на $x - a$?

Из теоремы Безу следует, что количество корней уравнения $P(x) = 0$, где P — многочлен, не больше степени многочлена P . Действительно, если a_1 — корень, то $P = (x - a_1)P_1$, где P_1 — некоторый новый многочлен, и если a_2 — другой корень ($a_1 \neq a_2$), то $P(a_2) = 0$, откуда $P = (x - a_1)(x - a_2)P_2$. Таким образом, если a_1, \dots, a_k — корни уравнения

$P(x) = 0$, то $P = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)P_k$ и степень P не меньше степени произведения $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$, значит, не меньше числа корней.

2.4 Теорема Виета

Применим теперь теорему Безу к квадратным уравнениям. Если x — корень уравнения $x^2 + px + q = 0$, то по теореме Безу $x^2 + px + q = (x - x_1)S(x)$, где $S(x)$ — многочлен первой степени. У $S(x)$ старший коэффициент должен быть равен единице, поэтому $S(x)$ можно записать в виде $x - x_2$. Очевидно, x_2 — тоже корень уравнения $x^2 + px + q = 0$. Из равенства $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ получаем знакомую Вам теорему Виета: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$. Заметьте, кстати, что если у уравнения $x^2 + px + q = 0$ только один корень, то $x_1 = x_2$, но формулы остаются верными.

Точно так же, если x_1 — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, откуда $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1x_2 = c/a$.

Легко проверить, что и наоборот, если $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1x_2$, то числа x_1 и x_2 будут корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Это утверждение называется теоремой, обратной к теореме Виета.

К использованию теоремы Виета и обратной к ней сводятся любимые экзаменаторами задачи, в которых требуется вычислить значение какой-нибудь функции от корней данного квадратного уравнения или составить новое уравнение с корнями, зависящими от корней данного.

Например, пусть требуется составить квадратное уравнение, у которого корнями были бы числа, обратные корням уравнения $x^2 + px + q = 0$. Обозначим корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ через u и v , тогда, по обратной к теореме Виета, искомым будет уравнение $x^2 + ax + b = 0$ где $a = -(1/u + 1/v)$, $b = 1/uv$. По теореме Виета из исходного уравнения имеем $-(u + v) = p$, $uv = q$, поэтому получаем $a = p/q$, $b = 1/q$.
 Ответ: $qx^2 + px + 1 = 0$.

Упражнение 2.4. Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни u и v .

- Выразите $1/u^2 + 1/v^2$ через p и q ;
- Составьте квадратное уравнение с корнями $u + v$ и uv .

2.5 Целые корни

Если у квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ целые коэффициенты, то можно попробовать решить его в уме: здесь также помогают формулы Виета.

Решим, например, уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$. Пусть u и v — его корни, тогда по теореме Виета $u + v = -3$, $uv = 2$. Если u — целое число, то v — тоже целое, так как $v = -(3 + u)$. В таком случае, так как $uv = 2$, то u должно быть одним из чисел $-2, -1, 1, 2$. Подставляя $x = -2$, убеждаемся, что это один из корней уравнения, тогда второй равен $\frac{2}{-2} = -1$ (или $-(3 - 2) = -1$).

Обратите внимание, что здесь мы перебирали все такие целые числа u , что $2/u$ — тоже целое. Составить список их было легко: мы выписали все делители числа 2, то есть 2 и 1, а потом приписали эти же числа со знаком “—”. Если бы мы ограничились положительными делителями числа 2, то не нашли бы корней.

Конечно, такой способ решения годится не для всякого квадратного уравнения. Зато похожим способом можно решить некоторые кубические уравнения (и уравнения более высоких степеней).

Пусть u — целый корень уравнения с целыми коэффициентами $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Перепишем равенство $u^3 + pu^2 + qu + r = 0$ как $u(u^2 + pu + q) = -r$. Это значит, что $-r$ разлагается в произведение двух целых чисел, одно из которых $-u$. Проверив все целые делители числа r , мы найдем все целые корни нашего уравнения. Осталось вспомнить, что теорема Безу позволяет разложить многочлен на множители, если известен хотя бы один его корень. Теперь мы можем полностью решить каждое кубическое уравнение, у которого есть хотя бы один целый корень.

2.6 Рациональные корни

Уравнение может иметь нецелые, но рациональные корни, их тоже несложно найти. Пусть кубическое уравнение с целыми коэффициентами $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет рациональный корень. Запишем этот корень в виде несократимой дроби v/u , где v — целое число, а u — натуральное число, тогда $av^3 + bv^2u + cvu^2 + du^3 = 0$. Отсюда $av^3 = -(bv^2 + cvu + du^2)u$, поэтому av^3 делится на u , а так как дробь v/u несократима, то a делится

на u . Точно так же, записав $du^3 = -(cu^2 + bvu + av^2)v$, получаем, что d делится на v . Поэтому, чтобы найти все рациональные корни, достаточно перебрать все дроби v/u , где u — натуральный делитель старшего коэффициента уравнения, а v — делитель свободного члена.³ В частности, если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен единице, то всякий его рациональный корень — целый.

Рациональные корни уравнения с целыми коэффициентами имеют вид v/u , где u — натуральное число, делитель старшего коэффициента, а v — не обязательно положительный делитель свободного члена.

2.7 Разложение на множители методом неопределенных коэффициентов

Расскажем еще об одном способе разложения на множители многочленов с целыми коэффициентами. Здесь тоже используется делимость. Пусть, например, мы хотим разложить многочлен $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1$ на множители с целыми коэффициентами. Если из него можно выделить сомножитель первой степени, то у соответствующего уравнения есть рациональный корень. Мы знаем, как искать рациональные корни — для данного уравнения надо проверить числа $\pm 1, \pm 1/2$, среди которых корней не оказывается. Остается один вариант — два сомножителя, каждый — второй степени. Запишем, что

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = (ax^2 + bx + c)(kx^2 + lx + m),$$

где a, b, c, k, l, m — неизвестные нам пока числа. Вычисляя коэффициент при x^4 , видим, что $ak = 2$, поэтому существует всего четыре возможности:

- 1) $a = 2, k = 1$,
- 2) $a = 1, k = 2$,
- 3) $a = -1, k = -2$,
- 4) $a = -2, k = -1$.

³Процедура поиска целых и рациональных корней подробно проделана в девятом параграфе для уравнения $36x^3 + 20x^2 - 7x - 6 = 0$.

Можно считать, что $a = 1$ и $k = 2$ (остальные варианты дают разложения, отличающиеся знаком или порядком множителей). Теперь раскроем скобки и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x в левой и правой частях равенства. Получим систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными b, c, m, l (мы учли, что $a = 1$ и $k = 2$):

$$\begin{cases} cm = -1 \\ cl + bm = -2 \\ 2c + m + bl = -2 \\ 2b + l = -1 \end{cases}$$

Найти все решения этой системы сложно (это совершенно то же самое, что полностью решить исходное уравнение четвертой степени), но мы ищем только целые решения, а это куда проще: так как $cm = -1$, то либо $m = -1, c = 1$, либо $m = 1, c = -1$. Проверим сначала первую возможность. Если $m = -1, c = 1$, то получается система трех уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 1 - b = -2 \\ bl = -3 \\ 2b + l = -1 \end{cases},$$

которая несовместна: из первого и третьего уравнений имеем $b = 1/3, l = -5/3$, что противоречит второму уравнению. Осталась вторая возможность: $m = 1, c = -1$, тогда получается система

$$\begin{cases} b - 1 = -2 \\ bl = -1 \\ 2b + l = -1 \end{cases},$$

которая имеет решение $b = -1, l = 1$, что дает разложение

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1 = (x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 1).$$

Конечно, далеко не всякий многочлен можно разложить на множители с целыми коэффициентами. Например, для $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)$ соответствующая система уравнений не имеет решений в целых числах. Но уж если разложение существует, то таким способом оно будет найдено.

Упражнение 2.5. а) Решить уравнение $2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$;

б) разложить на множители многочлен $x^3 + 2x + 12$;

в) решить уравнение $x^3 + (3 + \sqrt{3})x^2 + (7 + 3\sqrt{3})x + 7\sqrt{3} = 0$;

г) решить уравнение $x^4 + 2x^3 - 31x^2 + 4x + 4 = 0$.

3 Множества и условия

Вся эта брошюра посвящена уравнениям и неравенствам. Тем не менее нам придется посвятить целый параграф отдельной, более общей теме. Дело в том, что многие трудные вопросы, связанные с решением уравнений и неравенств, мы будем разбирать на языке теории множеств.

3.1 Основные понятия и обозначения теории множеств

В математике очень часто приходится уточнять, о каких именно объектах или группах объектов идет речь. Например, теорема Пифагора относится ко всем прямоугольным треугольникам, а утверждение, что сумма углов треугольника равна 180° — к любым треугольникам. Для того, чтобы было удобно говорить о той или иной точно определенной совокупности объектов, в математике используется слово *множество*⁴.

Например, «множество всех треугольников» означает только то, что речь идет о всех треугольниках, «множество китов в океане» — что речь идет о всех китах в океане.

Описать множество можно разными способами. Множество, состоящее из небольшого числа объектов (эти объекты называют элементами множества) удобно задать списком всех его элементов. Обычно этот список заключают в фигурные скобки. Например,

$$\{\text{стол, стул, шкаф, облако}\}$$

⁴Сам по себе этот термин — множество — точного математического определения не имеет. Дело в том, что дать термину точное определение — значит объяснить его через другие термины. Используемые в определении термины также надо объяснить через другие термины и так далее. Рано или поздно нам потребуется принять некоторые термины, не объясняя их через другие. Термин «множество» — один из исходных терминов, служащих для построения всей современной математики.

или

$\{1, 2, 4\}$.

Если список элементов множества трудно или невозможно составить, то используют другие способы. Например, описывают правило, как по любому объекту определить, входит он в данное множество или нет. Так, в множество четных натуральных чисел входят только натуральные числа, причем именно те, что делятся на 2.

Еще один способ задать новое множество — “изготовить” его из тех множеств, которые уже описаны. Это можно сделать разными способами. Сейчас мы кратко опишем обозначения, принятые в теории множеств, и определим основные операции над множествами. Обычно (но не обязательно) множества обозначают большими латинскими буквами, а их элементы — маленькими латинскими буквами. Запись $x \in A$ означает, что x — элемент множества A (еще говорят “ x входит в A ” или “ x принадлежит A ”).

Пересечением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех элементов, общих для A и B . Операция взятия пересечения обозначается \cap . Если у A и B нет общих элементов, то их пересечением считается пустое множество. Пустое множество обозначается \emptyset и по определению не содержит ни одного элемента.

Объединением множеств A и B называется множество, которое состоит из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств (при этом элементы, общие для A и B , входят в объединение по одному разу, а не по два). Операция взятия объединения обозначается \cup .

Упражнение 3.1. Объясните, из каких элементов состоят множества $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, если:

а) A — множество всех четных чисел, B — множество всех чисел, делящихся на 3, C — множество всех чисел, делящихся на 5;

б) A — множество всех видимых в Северном полушарии звезд, B — множество всех птиц на Земле, C — множество всех живых существ на Земле.

Если всякий элемент множества A является элементом множества B , то говорят, что A есть подмножество B , или что B содержит A , и обозначают это так: $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$.

Знак \subseteq очень похож на \leq , и это сделано специально — они обозна-

чают схожие понятия. Ясно, что если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$; если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то A и B равны.

Упражнение 3.2. Сопоставим каждому числу x подмножество числовой оси, состоящее из всех чисел, меньших x . Обозначим это подмножество A_x .

а) Что за множество $A_2 \cap A_3$?

б) Тот же вопрос про $A_2 \cup A_3$?

в) Какому числу соответствует множество $A_x \cup A_{x+2}$?

г) Каким числам соответствуют множества $A_x \cap A_y$ и $A_x \cup A_y$?

Упражнение 3.3. Из приведенных ниже шести утверждений одно является неверным. Укажите это утверждение и покажите на примере, что оно неверно (A , B и C обозначают произвольные множества).

а) Если $A \subseteq B$, то $A \cap C \subseteq B \cap C$.

б) Если $A \subseteq B$, то $A \cup C \subseteq B \cup C$.

в) Если $A \cap C \subseteq B \cap C$, то $A \subseteq B$.

г) $A \cup (A \cap B) = A$.

д) $A \subseteq A \cup B$.

е) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3.2 Условия

Пусть M — множество, заданное некоторым условием, то есть правилом, позволяющим по любому объекту определить, является ли он элементом M . При этом подразумевается, что в M входят те и только те элементы, для которых это условие выполнено⁵.

Например, достаточно сказать, что “ M — множество всех зеленоглазых кошек” вместо того, чтобы произносить длинную фразу: “объекты, являющиеся зеленоглазыми кошками, входят в множество M , а объекты, не являющиеся зеленоглазыми кошками — нет”. Кстати, в упражнениях 3.1 и 3.3 множества были заданы именно с помощью условий.

Важным для нас примером условия является любое уравнение или неравенство. Например, уравнение $x^2 + 2|x| = 7$ — это условие, задающее

⁵Сам термин “условие” (как и термин “множество”) мы не определяем. В математической логике этому понятию соответствуют термины “предикат” или “высказывание, содержащее переменную”. При некоторых значениях переменной высказывание истинно, при других — ложно; первые входят в множество M , вторые — нет.

множество таких чисел x , для которых $x^2 + 2|x| = 7$. Множество, определяемое таким условием, называется *множеством решений* уравнения (неравенства).

Не надо думать, что множество и задающее его условие — это одно и то же. Дело в том, что разные условия могут задавать одно и то же множество. Два условия, задающие одно и то же множество, называются *равносильными* (еще говорят — *эквивалентными*). Равносильные условия могут сильно различаться по понятности и удобству в работе, точно так же, как различаются для нас текст на незнакомом языке и его русский перевод. Например, условия $x > 1$ и $x^{17} + x > 2$ задают одно и то же множество, но первым из них пользоваться легче, чем вторым. Часто по условию бывает не так-то легко понять, какое именно множество оно определяет. В таких случаях приходится искать способ так преобразовать условие, чтобы получилось эквивалентное, но более удобное. В этой брошюре мы занимаемся условиями, записанными с помощью равенств и неравенств, эти условия обычно относятся к числам или наборам из нескольких чисел. Собственно говоря, решить уравнение (неравенство, систему) — это и означает: от условия, задающего “множество решений” каким-то сложным образом, перейти к эквивалентному простому условию ($x \in \{0; 1\}$; $-1 \leq x \leq 2$; $(x, y) = \{(1, 2); (1, -2)\}$ или что-то в этом роде).

3.3 Составные условия

Существуют и, наверное, известны Вам операции над условиями, соответствующие операциям над множествами.

Пусть X и Y — два условия, тогда мы можем составить из них новые условия. Первое называется *системой* X и Y и состоит в том, что должно быть выполнено каждое из этих условий (“и X , и Y ”); второе, которое иногда называется *совокупностью* X и Y , состоит в том, что должно быть выполнено хотя бы одно из этих условий (“ X или Y ”). Ясно, что системе X и Y соответствует пересечение множеств, определяемых X и Y , а совокупности условий — объединение этих множеств.

Чтобы запомнить термины “система” и “совокупность”, достаточно понимать, что в системе все входящие в нее условия рассматриваются как *взаимосвязанные*, а в совокупности условия сложены в кучу.

Для записи составных условий принято следующее соглашение: все

условия записываются одно под другим, при этом условия, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой, а условия, входящие в совокупность, объединяются квадратной скобкой (впрочем, последнее обозначение не общепринято; вместо него можно использовать слово “или”).

Упражнение 3.4. а) Обозначим условие “ a — четное натуральное число” через X . Найдите не менее трех разных условий Y таких, что система X и Y задает множество $\{2, 6\}$.

б) Предложите три разных пары условий X и Y , для которых совокупность

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

задает множество всех океанов на Земле.

связь	операции над множествами	название составного условия	обозначение составного условия
или	объединение	совокупность	$\{$
и	пересечение	система	$\{$

Пример. Условие $x^2 + 2 = 3x$ задает множество $\{1; 2\}$; условие $x + \frac{1}{x} = 2\frac{1}{2}$ задает множество $\{1/2; 2\}$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 + 2 = 3x \\ x + 1/x = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

задает множество $\{2\}$, а

$$\begin{bmatrix} x^2 + 2 = 3x \\ x + 1/x = 2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

задает множество $\{1/2; 1; 2\}$.

3.4 Подмножества и следствия

Еще одна важная связь между множествами и условиями, с которой, пожалуй, следовало бы познакомиться в первую очередь: подмножество — следствие. Пусть мы знаем, что условие X задает множество A , условие Y задает множество B , причем $A \subseteq B$. Это означает, что условие Y выполнено для любого x , для которого выполнено условие X . В таких

случаях говорят, что условие Y *следует* из условия X (или еще говорят, что условие Y является *следствием* условия X).

Пример. Рассмотрим несколько условий, относящихся к многоугольникам. Обозначим через X условие " x — квадрат", через Y — условие " x — ромб", через Z — условие " x — прямоугольник". Как известно, условия Y и Z являются следствиями условия X , к тому же условие X равносильно системе условий Y и Z .

Упражнение 3.5. Докажите, что:

а) система

$$\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$$

эквивалентна одному условию X в том и только в том случае, когда Y следует из X .

б) совокупность

$$\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$$

эквивалентна условию X в том и только в том случае, когда X следует из Y .

Упражнение 3.6. Пусть условия X и Y таковы, что всегда выполнено хотя бы одно из них. Докажите, что любое условие Z эквивалентно какой совокупности систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} Z \\ X \end{cases} \\ \begin{cases} Z \\ Y \end{cases} \end{cases}$$

Утверждения, которые сформулированы в виде упражнений 3.5.а) и 3.6, легко использовать для замены условий на эквивалентные: первое означает, что если мы добавим к какому-нибудь условию его следствие, то получим систему, равносильную исходному условию, второе дает возможность "разбирать случаи". Например, пусть Z — условие $x^2 = 1$, X — условие $x \leq 0$, Y — условие $x \geq 0$, тогда Z равносильно совокупности условий

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Именно так обычно решают уравнения и неравенства, содержащие выражения "с модулем" (абсолютной величиной). Например, уравнение $x^2 - 4 = |x + 2|$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x^2 - 4 = |x + 2| \\ x \geq -2 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2 - 4 = |x + 2| \\ x < -2 \end{cases}$$

Заметьте, кстати, что условия X и Y не обязаны быть взаимоисключающими: если во второй системе взять $x \leq -2$, то мы не приобретем лишних корней исходного уравнения, просто корень $x = -2$ будет найден дважды.

4 Кое-что о неравенствах

4.1 Свойства числовых неравенств

Для начала напомним Вам основные свойства неравенств. Большинство из них аналогичны соответствующим свойствам равенств, за важным исключением свойства 4 (на положительное число умножать обе части неравенства можно безболезненно, а при умножении на отрицательное число знак неравенства "переворачивается").

1. Для любых чисел a и b верно одно и только одно из утверждений $a < b$, $a = b$, $a > b$.

2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

3. Если $a < b$, то $a + d < b + d$ для любого d .

4. а) Если $a < b$ и λ — положительное число, то $\lambda a < \lambda b$.

б) Если $a < b$ и λ — отрицательное число, то $\lambda a > \lambda b$.

5. Если $a < b$, $c < d$, то $a + c < b + d$.

6. Если a , b , c и d — положительные числа, $a < b$, $c < d$, то $ac < bd$.

7. В пунктах 3, 4 из неравенства $a < b$ получается новое, равносильное исходному.

В пунктах 2, 5 и 6 из двух неравенств получается новое, не равносильное исходным.

8. Утверждения, записанные в пунктах 2, 3, 4а, 5, 6 остаются верными, если вместо $<$ подставить любой из знаков $\leq, =, \geq, >$.

9. Утверждение, записанное в пункте 4б, остается верным, если вместо $<$ подставить любой другой знак неравенства, а вместо $>$ — “противоположный” ему знак. Например, если $a \geq b$, $\lambda < 0$, то $\lambda a \leq \lambda b$.

Мы будем также предполагать, что Вы умеете решать “квадратные неравенства” наподобие $6x^2 - 7x + 1 \leq 0$ или $x^2 - x + 1 > 0$. Если вы чувствуете себя в этом неуверенно, повторите этот материал по своему школьному учебнику.

4.2 Что значит решить неравенство?

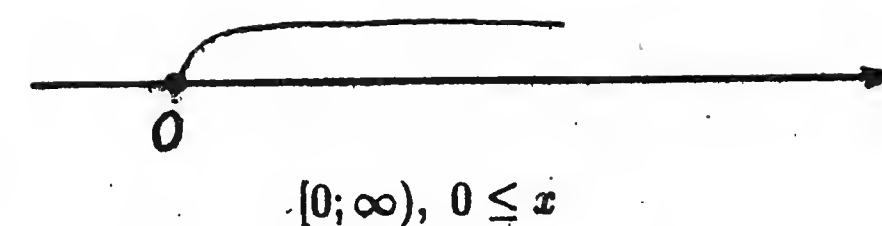
Решая неравенство с одной переменной, например, $x^2 \geq x$ или $x + \frac{1}{x} < 2$, мы стремимся “расшифровать” его — описать множество тех чисел, которые удовлетворяют данному неравенству. Обычно список элементов искомого множества составить нельзя — оно оказывается бесконечным. Например, условию $x^2 \geq x$ удовлетворяют все натуральные числа (и не только они). Чтобы описывать бесконечные числовые множества, поступим следующим образом: будем собирать их из “кирпичиков” — числовых множеств, задающихся простейшими неравенствами. Сначала приведем примеры “кирпичиков” вместе с их названиями, общепринятыми обозначениями и с неравенствами, задающими эти подмножества числовой прямой.

А. Подмножество, состоящее из одной точки 1:

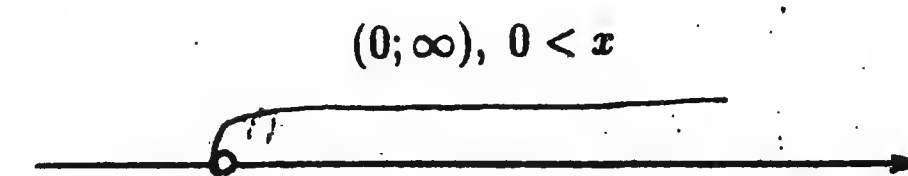
$$\{1\}, 1 \leq x \leq 1$$



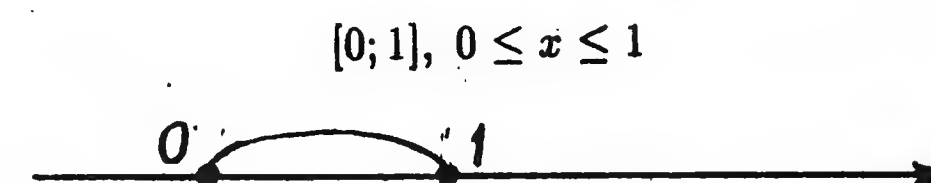
Б. Направленный вправо луч с началом в точке 0, включая эту точку:



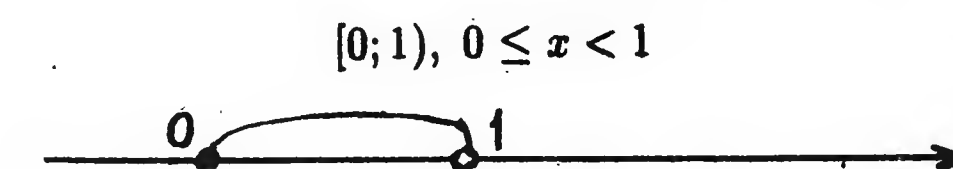
В. Направленный вправо луч с началом в точке 0, за исключением этой точки:



Г. Отрезок с концами 0 и 1, включая оба конца:



Д. Отрезок с концами 0 и 1, за исключением правого конца:



Е. Отрезок с концами 0 и 1, за исключением левого конца:

$$(0; 1], 0 < x \leq 1$$



Ж. Отрезок с концами 0 и 1, за исключением обоих концов:

$$(0; 1), 0 < x < 1$$



Нетрудно понять принцип обозначения: в скобках записывают сначала левый конец множества, а потом, через точку с запятой, правый, причем возле принадлежащего данному множеству конца ставится квадратная скобка, а возле конца, не принадлежащего данному множеству — круглая. У направленных влево лучей левым концом считается «минус бесконечность» $-\infty$, у направленных вправо — правым концом считается «плюс бесконечность» ∞ . Кстати, множества вида $(a; b]$ и $[a; b)$ называют *полуинтервалами*, а множества вида $(a; b)$ — *интервалами*; слово *отрезок* всегда обозначает множество вида $[a; b]$. Точку тоже можно считать отрезком, например, точка 1 является отрезком $[1; 1]$, но так обозначать точки не принято, потому что запись $\{1\}$ короче. Мы будем называть *промежутком* любое подмножество числовой прямой, если оно — точка, отрезок, интервал, полуинтервал или луч (неважно, с концом или без). Оказывается, что практически любое естественное подмножество числовой прямой можно представить в виде объединения конечного числа непересекающихся промежутков (подробно этот вопрос обсуждается в дополнении в конце брошюры). Примем следующее соглашение: записывать подмножества прямой в виде объединения непересекающихся промежутков. В тех редких в школьной практике случаях, когда это невозможно, будем использовать просто любое удобное описание подмножества. Итак

Решением неравенства (или системы неравенств) с одним неизвестным называется запись определяемого им числового множества в виде объединения непересекающихся промежутков.

Как решать задачи, связанные с неравенствами?

При решении неравенств часто помогают те же идеи разложения на множители и подстановки, которые полезны при решении уравнений.

4.3 Разложение на множители

Запишем неравенство

$$x^4 + 3x^2 - 4x < x^2 \sin x + 3x \cdot \sin x - 4 \sin x$$

в виде $(\sin x - x)(x^3 + 3x - 4) > 0$. Это означает, что либо оба сомножителя отрицательны, либо оба сомножителя положительны, поэтому решение неравенства сводится к решению совокупности двух систем неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x - x < 0 \\ x^3 + 3x - 4 < 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin x - x > 0 \\ x^3 + 3x - 4 > 0 \end{array} \right.$$

При большом числе сомножителей выписывать все системы неравенств (при трех сомножителях систем будет уже четыре, а при четырех — восемь), решать их, а потом собирать вместе решения всех систем бывает неудобно. Здесь может помочь так называемый *метод интервалов*.

4.4 Метод интервалов

Решим неравенство

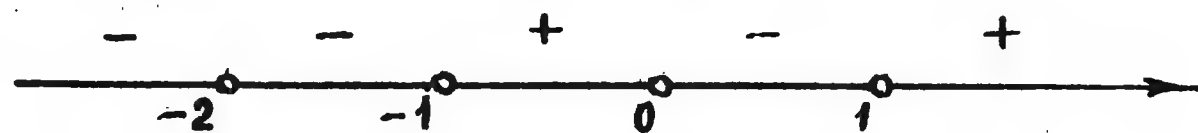
$$\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+1)} < 0.$$

Отметим на числовой оси все те точки, где обращается в нуль какой-нибудь сомножитель числителя или знаменателя. Эти точки — $\{1; 0; -1; -2\}$ — разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых функция

$$\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+1)}$$

не меняет своего знака.

Теперь можно без труда определить знак исследуемой функции на каждом из этих промежутков. На луче $(1, +\infty)$ все множители положительны, значит, положительно и произведение. Поставим над этим лучом знак "плюс" и перейдем к его соседу — интервалу $(0, 1)$: знак у $(x - 1)$ сменился на противоположный, а остальные множители (те, которые не обращаются в нуль в точке $x = 1$) остались положительными. Значит, на $(0, 1)$ исследуемая функция отрицательна, ставим над этим интервалом "минус". При переходе от $(0, 1)$ к $(-1, 0)$ и от $(-1, 0)$ к $(-2, -1)$ знак снова будет меняться, а вот переход от $(-2, -1)$ к $(-\infty, -2)$ не приносит изменения знака: в точке $x = -2$ обращается в нуль множитель $(x + 2)^2$, который положителен и справа и слева от этой точки. В результате мы получили такую картинку:



Остается выписать ответ:

$$(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; 1).$$

При решении нестрогого неравенства необходимо еще отдельно перебрать концы интервалов и включить в ответ все те, в которых функция определена и равна нулю. Например, ответом к неравенству

$$\frac{x(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+1)} \geq 0$$

будет $\{-2\} \cup (-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

4.5 Подстановка

Подстановка используется точно так же, как и для уравнений: если неравенство удастся записать в виде $f(h(x)) > g(h(x))$, то оно сводится к условию $h(x) \in M$, где M — множество решений неравенства $f(x) > g(x)$. Например, неравенство $x^2 + 2|x| - 3 > 0$ подстановкой $y = |x|$ сводится к неравенству $y^2 + 2y - 3 > 0$, которое дает $y < -3$ или $y > 1$.

Условие $|x| < -3$ определяет пустое множество, условие $|x| > 1$ дает $x < -1$ или $x > 1$.

4.6 Преобразования неравенств

Главное, что необходимо уметь делать при решении любых задач, связанных с неравенствами, это переходить от одних неравенств к другим, как правило, равносильным. Иначе говоря, надо не только разобраться в том, как из неравенств получать следствия, но и выяснить, возможно ли из этих следствий получить исходные неравенства. Основой всех рассуждений служат при этом свойства числовых неравенств. Правда, путь последовательного преобразования неравенств "от самого начала до конца" может оказаться очень длинным и трудным. Дело значительно упрощается, если иметь, как гроссмейстер, "домашние заготовки" — запас заранее доказанных утверждений о неравенствах. Чаще всего используются два типа таких заготовок. К первому типу заготовок относятся функции, "в которые можно подставлять неравенства". Точнее говоря, функция f называется возрастающей, если из неравенства $a > b$ следует неравенство $f(a) > f(b)$. Такие функции постоянно используются не только при решении неравенств, но также и при доказательстве неравенств, при поиске наибольших и наименьших значений и даже при решении уравнений. Возрастающим функциям посвящен следующий параграф.

Второй тип заготовок — тождественные неравенства. Неравенство называют тождественным, если оно выполнено при любых допустимых значениях входящих в него букв. Именно о тождественных неравенствах идет речь в задачах, где требуется доказать неравенство.

Докажем неравенство $|a+b| \leq |a|+|b|$. Сложив неравенства $-|a| \leq a \leq |a|$ и $-|b| \leq b \leq |b|$, получим $-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$, откуда следует требуемое. (Вообще, из неравенства $-x \leq y \leq x$ следует $-x \leq -y \leq x$, а так как $|y|$ равен одному из чисел y и $-y$, то и $|y| \leq x$).

Докажем неравенство $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Запишем неравенства $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ и $|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a|$, откуда $-|a - b| \leq |b| - |a| \leq |a - b|$ и $||b| - |a|| \leq |a - b|$.

Упражнение 4.1. Определите, при каких a и b неравенство $|a+b| \leq |a|+|b|$ превращается в равенство.

Упражнение 4.2. Определите, при каких a и b неравенство $||a| - |b|| \leq |a - b|$

$|b| \leq |a - b|$ становится строгим (т.е. остается верным, если \leq заменить на $<$).

Упражнение 4.3. Функция r двух переменных a и b такова, что $r(a, b) = r(b, a)$ и $r(a, b) + r(b, c) \geq r(a, c)$ для любых чисел a, b, c . Докажите, что $r(a, b) \geq |r(a, c) - r(b, c)|$ для любых a, b, c .

Упражнение 4.4. Докажите неравенства:

а) $|a + b - c| \leq |a + b + c|$;

б) $|x^2 - \frac{1}{x}| \leq |x^2 - 1| + |\frac{1}{x} - 1|$.

Если a_1, \dots, a_n — неотрицательные числа, то их *средним арифметическим* называется число

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

— их сумма, деленная на количество, а *средним геометрическим* называется

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

— корень n -ой степени из произведения этих чисел. Оказывается, что всегда выполнено неравенство

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = \dots = a_n$. Мы не будем доказывать это неравенство для любого n , но докажем его для случаев $n = 2$, $n = 4$ и $n = 3$, которых обычно достаточно для школьных потребностей. По поводу доказательства для любого n см. ниже упражнение 4.7.

Для двух чисел $x \geq 0$, $y \geq 0$ нам надо доказать неравенство $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Так как

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2,$$

то требуемое неравенство равносильно очевидному $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, равенство в котором достигается тогда и только тогда, когда $\sqrt{x} = \sqrt{y}$. Для четырех чисел $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $t \geq 0$ поступим так:

$$\sqrt[4]{xyzt} = \sqrt{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{zt}} \leq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{zt}}{2} \leq \frac{\frac{x+y}{2} + \frac{z+t}{2}}{2} = \frac{x+y+z+t}{4}$$

А вот теперь легко будет доказать неравенство для трех чисел $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$: воспользуемся уже доказанным неравенством для четырех чисел, а числа возьмем такие: $x, y, z, \sqrt[3]{xyz}$. Получим

$$\sqrt[4]{xyz \cdot \sqrt[3]{xyz}} \leq \frac{x + y + z + \sqrt[3]{xyz}}{4}.$$

Так как

$$\sqrt[4]{xyz \cdot \sqrt[3]{xyz}} = \sqrt[4]{(xyz)^{4/3}} = \sqrt[3]{xyz},$$

мы получили неравенство

$$4\sqrt[3]{xyz} \leq x + y + z + \sqrt[3]{xyz},$$

что равносильно требуемому

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Упражнение 4.5. Докажите, что :

а) если произведение трех неотрицательных чисел равно единице, то их сумма не меньше трех;

б) если $x > 0$, то

$$\sqrt{x^3} \leq \frac{1 + 3x}{4}.$$

Упражнение 4.6. Докажите, что если $0 < x < y$, то

$$x < \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

Упражнение 4.7. а) Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 8$.

Указание. Посмотрите, как мы вывели неравенство для $n = 4$ из неравенства для $n = 2$.

Если у Вас получилось это упражнение, то Вы поймете, как доказать неравенство и для $n = 16, 32, 64, \dots$

б) Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для $n = 7$.

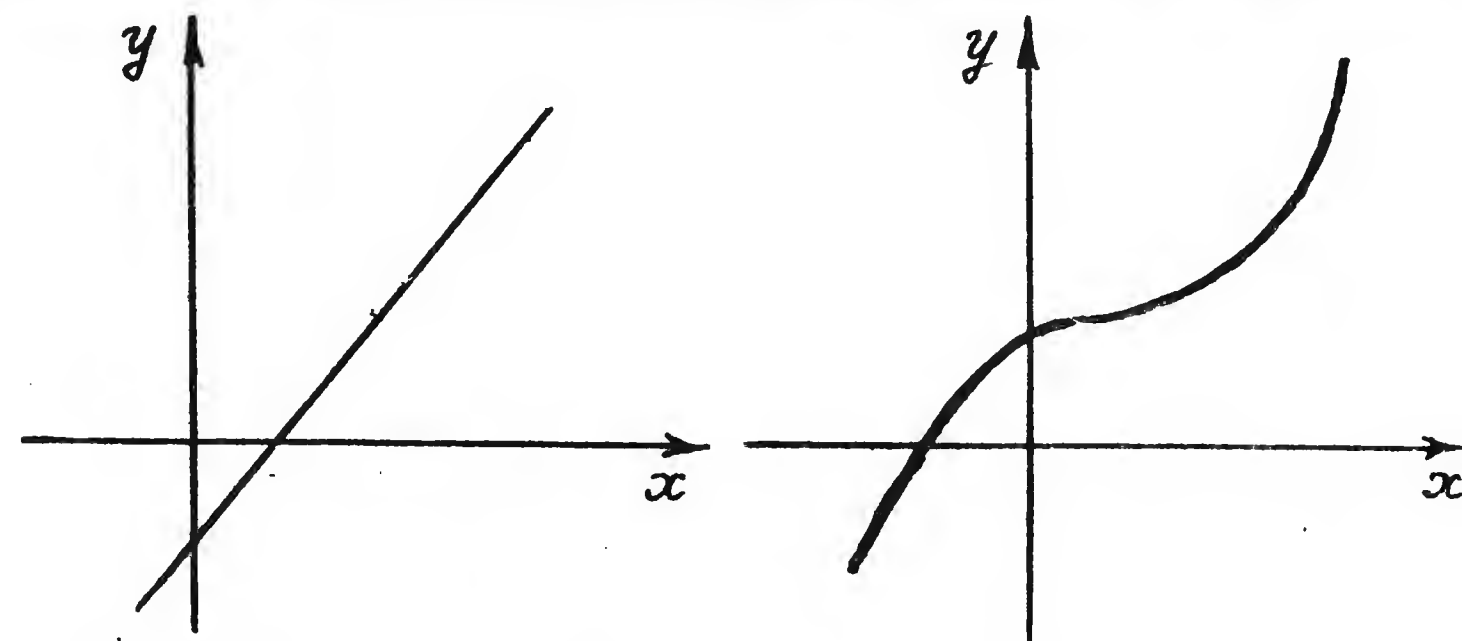
Указание. Посмотрите, как мы вывели неравенство для $n = 3$ из неравенства для $n = 4$.

Комбинируя методы из пунктов а) и б), можно доказать неравенство для любого n .

Упражнение 4.8. Какой наибольший объем может иметь ящик, имеющий форму параллелепипеда, у которого длина втрое больше ширины, а сумма высоты, длины и ширины равна 16?

5 Возрастающие функции и их свойства

Возрастающими называются такие функции, значение которых увеличивается при увеличении значения аргумента. Точнее говоря, функция f называется возрастающей, если из неравенства $a < b$ следует⁶ $f(a) < f(b)$. Ясно, что график возрастающей функции имеет очень специальный вид: если идти по нему слева направо, то придется все время подниматься вверх. Вот два примера графиков возрастающих функций:



Упражнение 5.1. Какие из перечисленных функций являются возрастающими: а) $f(x) = 1$, б) $f(x) = x$, в) $f(x) = 1 - x$, г) $f(x) = x + 2$, д) $f(x) = 1/(x + 3)$, е) $f(x) = |x|$, ж) $f(x) = x - 2$, з) $f(x) = 2x + |x|$?

Решение пунктов б) и е) упражнения 5.1.

б) Функция $f(x) = x$ — возрастающая: для $f(x) = x$ неравенства $a < b$ и $f(a) < f(b)$ есть просто одно и то же неравенство.

⁶Конечно, числа a и b должны входить в область определения функции f .

е) Функция $f(x) = |x|$ не является возрастающей, потому что $f(-1) = f(1)$, а у возрастающей функции должно быть $f(-1) < f(1)$.

Замечание. Представьте себе, что мы хотим узнать, является ли данная функция f возрастающей. Для этого мы берем одну за другой все возможные пары чисел a и b , для которых $a < b$, и сравниваем $f(a)$ с $f(b)$. Как только обнаружится пара, для которой $f(a) \geq f(b)$, то проверка закончится — функция f не является возрастающей. Если же такая пара пока не обнаружилась, но еще не все возможные пары проверены, это вовсе не значит, что функция возрастающая. Количество возможных пар неравных чисел a и b из области определения функции f , как правило, бесконечно, вот почему для доказательства предположения, что f возрастающая, необходимо использовать какие-нибудь общие рассуждения, а для опровержения этого предположения достаточно одного примера. Именно поэтому решения пунктов б) и е) совершенно разные.

5.1 Свойства возрастающих функций

Перейдем к обещанным замечательным свойствам возрастающих функций. Мы приводим только примеры “работы” этих свойств, а строгие математические формулировки и доказательства этих свойств (в виде теорем), которые вообще-то необходимы, чтоб ими обоснованно пользоваться, обдумайте сами (доказательства очевидны и легко следуют из свойств числовых неравенств).

Свойство первое, которое незаменимо при решении неравенств, очень похоже на определение. Если f — возрастающая функция, то неравенства $a < b$ и $f(a) < f(b)$ равносильны⁷. Действительно, если известно, что f — возрастающая функция и $f(a) < f(b)$, то не может быть ни $a = b$ (иначе было бы $f(a) = f(b)$), ни $a > b$ (было бы $f(a) > f(b)$). Остается $a < b$.

Пример. Поверим пока, что функция $f(x) = x^{17} + x$ возрастающая и решим неравенство $x^{17} + x > 2$. Его можно записать в виде $f(x) > f(1)$, так как $f(1) = 1 + 1 = 2$, значит, неравенство $f(x) > f(1)$ равносильно условию $x > 1$.

Упражнение 5.2. Докажите, что для возрастающей функции f неравенства $a \leq b$ и $f(a) \leq f(b)$ равносильны.

⁷Конечно, для a и b из области определения функции f .

Свойство второе. Чтобы найти все решения уравнения $f(x) = c$, в котором функция f — возрастающая, достаточно узнать любым способом (хоть угадать) один корень — уравнение $f(x) = c$ не может иметь больше одного решения. Это позволяет иногда решать такие уравнения, для которых нет никакого общего способа решения.

Пример. Уравнение $x^{17} + x = 2$ имеет корень $x = 1$. Вообще говоря, у уравнения 17-ой степени может быть даже 17 корней, поэтому от знания одного корня обычно еще далеко до полного решения уравнения. Однако уравнение $x^{17} + x = 2$ имеет не более одного корня, а один корень уже найден.

Свойство третье. Наибольшее и наименьшее значения возрастающей функции, заданной на отрезке, достигаются в концах отрезка (наибольшее — в правом конце, наименьшее — в левом). Чтобы их найти, достаточно вычислить значения функции в этих концах.

Известно, что искать максимум функции непросто — он может существовать, а может и не существовать; если он существует, то может достигаться в одной точке, может в нескольких, а может в бесконечном числе точек — примеры Вы без труда постройте сами. Но с возрастающей функцией, заданной на промежутке, эти неприятности невозможны.

Пример. Пусть $A = [0, 1]$, $B = (0, 1]$, $C = (0, 1)$. На множестве A наибольшее значение функции $f(x) = 2x$ достигается при $x = 1$, а наименьшее при $x = 0$, на B — наибольшее значение при $x = 1$, а наименьшего нет, потому что нет наименьшего аргумента, на C нет ни наименьшего, ни наибольшего значения аргумента, значит нет ни наибольшего, ни наименьшего значения функции.

Давайте пополним наши запасы возрастающих функций. Легче всего делать новые возрастающие функции из уже известных, но сначала надо набрать хоть небольшое количество исходных возрастающих функций. Пока нам достоверно известна только одна возрастающая функция $f(x) = x$.

Рассмотрим выражение x^n , где x — положительное число, а n — целое.

Упражнение 5.3. Доказать, что если $n > 0$, $0 < a < b$, то $a^n < b^n$.

Упражнение 5.4. Доказать, что если $n < 0$, $0 < a < b$, то $a^n > b^n$.

Упражнение 5.5. Доказать, что если $0 < c < 1$, $k < 1$, k — целое, то $c^k > c^1$.

Решение упражнения 5.3. Неравенства с положительными числами

можно почленно перемножать, возьмем n штук неравенств $a < b$ и перемножим, получим требуемое⁸.

Решение упражнения 5.5. Воспользуемся только что доказанным неравенством $a^n < b^n$, подставив вместо b единицу. Получим верное для любого натурального n и любого a , меньшего 1, неравенство $a^n < 1^n = 1$, в частности, при $a = c$, $n = 1 - k$ ($1 > k$, значит $n > 0$ — натуральное число) имеем $c^{1-k} < 1$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число c и получим требуемое $c^1 < c^k$.

Теперь у нас есть два набора возрастающих функций: 1) $f(x) = x^n$ с натуральными n и 2) $f(n) = a^n$ с $1 < a$. Функции из первого набора определены на множестве положительных чисел, функции из второго — на множестве целых чисел.

Рассмотрим теперь x^n с натуральным n как функцию на всей числовой прямой.

Упражнение 5.6. Доказать, что для нечетного натурального n функция $f(x) = x^n$ возрастающая.

Упражнение 5.7. Доказать, что для четного натурального n функция $f(x) = x^n$ не является возрастающей.

Решение упражнения 5.6. Надо доказать, что при нечетном n для любых a и b из условия $a < b$ следует $a^n < b^n$. Поскольку n — нечетное число, то a^n имеет тот же знак, что и a , b^n — тот же знак, что и b . Из этого ясно, что если a и b разных знаков, или одно из них ноль, то требуемое неравенство выполнено. Осталось рассмотреть два случая — 1) a и b положительны, 2) a и b отрицательны. Первый случай уже разобран — это упражнение 5.3. Второй случай: если a и b отрицательны, то $-a$ и $-b$ положительные числа, причем $-a > -b$, значит $(-a)^n > (-b)^n$. Так как n — нечетное число, то $(-a)^n = -a^n$, $(-b)^n = -b^n$, а неравенство $-a^n > -b^n$ равносильно требуемому.

5.2 Изготовление возрастающих функций

Теперь перечислим несколько способов размножения возрастающих функций. Сначала напомним, как вообще можно изготовить из функций новые функции. Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции, а c — число, то функции

⁸Для совсем аккуратного доказательства надо пользоваться методом математической индукции.

$f + c$, $f + g$, cf , $f \cdot g$, $f(g)$ определяются так: $(f + c)(x) = f(x) + c$; $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$; $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$; $(f(g))(x) = f(g(x))$.

Пусть, например, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$, $c = 5$, тогда $f + c = 2x + 5$, $f + g = x^2 + 2x$, $cf = 10x$, $f \cdot g = 2x^3$, $f(g(x)) = 2x^2$, $g(f(x)) = 4x^2$.

Способ 1. Если f — возрастающая функция, то для любого числа c функция $f + c$ — тоже возрастающая.

Способ 2. Если f — возрастающая функция, а λ — положительное число, то и λf — возрастающая функция.

Способ 3. Если f и g — возрастающие функции, то и функция $f + g$ возрастающая.

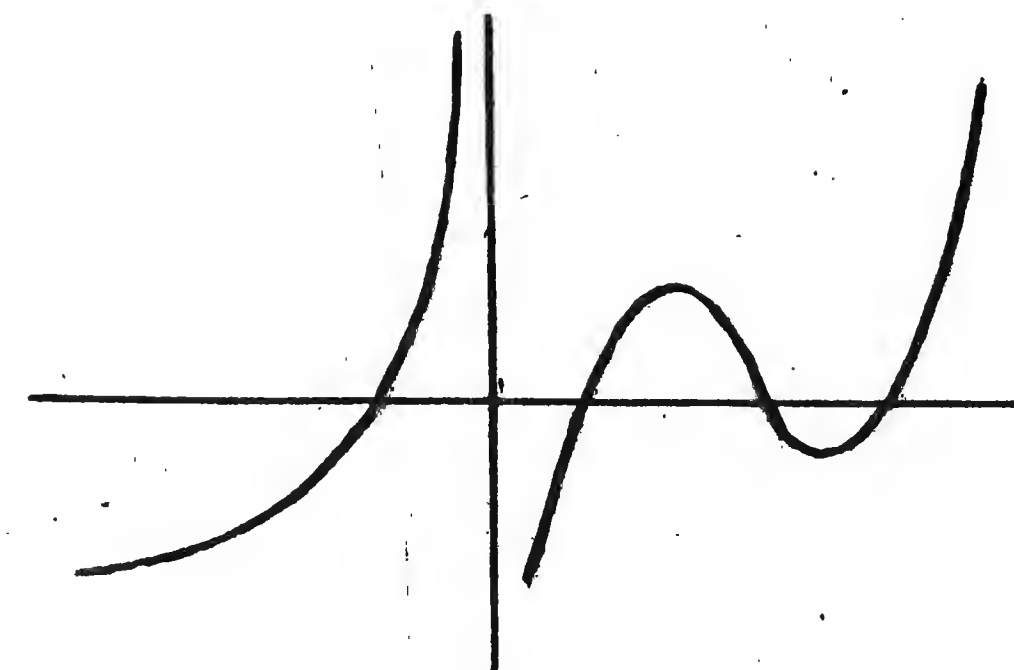
Способ 4. Если f и g — возрастающие функции, то и функция h , определенная формулой $h(x) = f(g(x))$, возрастающая.

На самом деле способ 4 дает множество отдельных рецептов изготовления новых возрастающих функций, которые получатся, если вместо f и g выбирать конкретные функции. Например, мы знаем, что $f(x) = x^3$ — возрастающая функция, значит из любой возрастающей функции g получаем возрастающие функции $f(g(x)) = g^3(x)$ и $g(f(x)) = g(x^3)$.

У возрастающих функций есть близкие родственники — убывающие функции. Их свойства легко вывести из следующего факта (если хотите, его можно считать определением): функция f является убывающей тогда и только тогда, когда $-f$ является возрастающей.

Естественно спросить, зачем тратить столько времени на возрастающие функции, если большинство функций не возрастает и не убывает,

а ведет себя вот так — график идет то вверх, то вниз. Дело в том, что



почти любая функция на достаточно маленьком отрезке является или возрастающей, или убывающей. Поэтому все, что мы узнали про возрастающие и убывающие функции, очень пригодится для исследования любых функций, как Вы увидите в последующих параграфах.

Удобный способ выяснять, является ли функция возрастающей, Вы получите, когда познакомитесь с понятием “производная”.

Упражнение 5.8. Решите уравнения:

- $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+15} + \sqrt{x-1} = 12$;
- $\sqrt[3]{x+8} = \sqrt{100-x}$.

6 Угадывание решений и некоторые хитрости.

Если не удастся решить уравнение каким-нибудь общим способом, то приходится искать иные пути. В частности, можно просто предъявить список корней уравнения и доказать, что, во-первых, данные числа являются корнями уравнения и, во-вторых, других корней нет.

Пример. Уравнение $x^3 + 2^x = 1$ имеет корень $x = 0$, а других быть не может, потому что $y = x^3 + 2^x$ — возрастающая функция.

6.1 Гадаем на графиках

Пусть задано уравнение $f(x) = g(x)$. Спрашивается, как можно подобрать корни и убедиться, что других нет. Угадать корни, конечно, как правило, нельзя (иначе большая часть науки об уравнениях никогда бы не появилась из-за ненадобности), но, приложив достаточные усилия, удастся определить количество корней и даже вычислить их приближенные значения с любой точностью. Прежде всего полезно представить себе, а лучше — достаточно аккуратно нарисовать на одном чертеже графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Их точки пересечения соответствуют корням уравнения.

Действительно, если точка (a, b) лежит и на графике $y = f(x)$, и на графике $y = g(x)$, то $f(a) = b$ и $g(a) = b$, то есть абсцисса точки пересечения графиков является корнем уравнения $f(x) = g(x)$. И наоборот, если u — корень уравнения $f(u) = g(u)$, то точка $(u, f(u))$ совпадает с точкой $(u, g(u))$ и лежит на пересечении графиков $y = f(x)$ и $y = g(x)$. В частности, если $g(x)$ — это нулевая функция, то ее график — ось абсцисс, и корни уравнения $f(x) = 0$ — это в точности абсциссы пересечений графика $f(x)$ с осью абсцисс.

Так как графики нельзя нарисовать абсолютно точно, то их точки пересечения также можно определить только приближенно. Больше того, если мы захотим воспользоваться каким-нибудь фактом о взаимном расположении графиков, например, тем, что парабола $y = x^2$ лежит над прямой $y = 2x - 3$, то этот факт все равно придется доказывать, а сами графики смогут послужить лишь в качестве иллюстрации.

Поэтому, поняв с помощью графика, сколько у уравнения корней и где примерно они расположены, мы должны будем точно сформулировать и доказать соответствующие утверждения. Это значит, что, ориентируясь по графику, мы разобьем числовую прямую на промежутки, и про каждый надо будет или доказать, что на нем есть корень, или доказать, что на нем нет корней.

6.2 Как сделать из догадки доказанное утверждение

Для доказательства существования корней обычно пользуются так называемой непрерывностью входящих в уравнение функций и теоремой

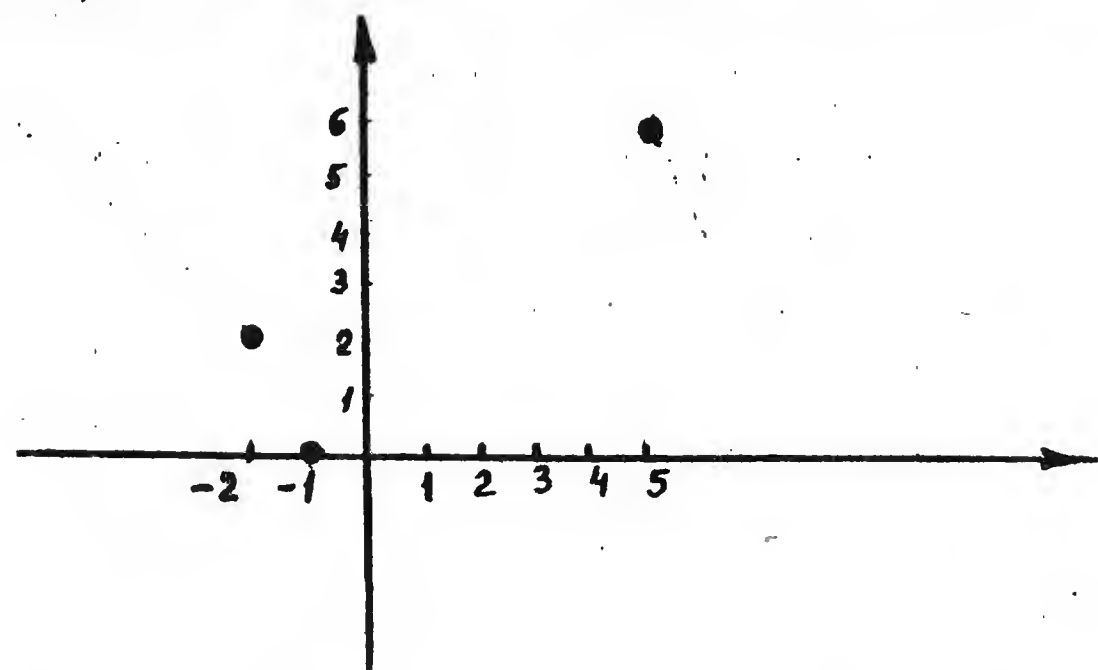
о промежуточном значении, которая утверждает, что если непрерывная на отрезке функция на одном конце отрезка принимает отрицательное значение, а на другом — положительное, то в какой-нибудь точке отрезка эта функция равна нулю. Доказательство этой теоремы (как и точное определение понятия непрерывной функции) выходит за рамки нашей темы, поэтому мы просто примем, что она верна для всех многочленов. Иначе говоря, в пределах этой брошюры считается (и этим можно пользоваться при решении задач), что если $P(x)$ — многочлен, причем $P(a) < 0$, $P(b) > 0$, то на отрезке с концами a и b уравнение $P(x) = 0$ имеет хотя бы один корень.

Кстати, если для функции $f(x)$ верна теорема о промежуточном значении, то неравенства $f(x) > 0$ можно решать методом интервалов. Действительно, между соседними корнями уравнения $f(x) = 0$ все значения функции $f(x)$ одного знака — иначе были бы еще корни. Поэтому остается решить уравнение $f(x) = 0$ и определить знак $f(x)$ на каждом из получившихся промежутков.

Чаше всего удастся убедиться в отсутствии корней уравнения $f(x) = g(x)$ на данном промежутке, доказав или неравенство $f(x) < g(x)$, или неравенство $f(x) > g(x)$. Например, уравнение $|x^4 - x^2| = x^2 + x^4 + 1$ можно решать обычным способом — избавиться от знака модуля и решать получающиеся уравнения, но это совершенно излишне: из неравенства $|a + b| \leq |a| + |b|$ следует, что $|x^4 - x^2| \leq x^2 + x^4 < x^2 + x^4 + 1$, поэтому уравнение решений не имеет.

Упражнение 6.1. От графика многочлена $y = P(x)$, нарисованного когда-то карандашом, осталось всего несколько точек: $(-2, 2)$, $(-1, 0)$, $(5, 6)$, а остальные стерлись. Какое наименьшее количество корней мо-

жет быть: а) у уравнения $P(x) = 1$? б) у уравнения $P(x) = 6$?



Доказав, что корень существует, мы еще не узнали, сколько же на данном промежутке корней у нашего уравнения $f(x) = g(x)$. Утверждать, что корень ровно один, можно, например, в том случае, когда известно, что корни существуют, а функция $f(x) - g(x)$ на всем данном промежутке возрастает или, наоборот, на всем данном промежутке убывает — в этом случае она может принимать значение 0 только один раз.

6.3 Пример: кубические уравнения

Выясним в качестве примера, сколько корней у кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Вы знакомы с графиками таких функций по теме «Функции и графики». У любого кубического уравнения есть хотя бы один корень. Это объясняется тем, что при достаточно больших положительных x число x^3 больше значения любого квадратного трехчлена. Поэтому при больших положительных значениях x функция $x^3 + ax^2 + bx + c$ положительна, а при больших по абсолютной величине отрицательных x эта функция отрицательна.

Чтобы точно определить число корней кубического уравнения, потребуются дополнительные усилия. Разберем типичный случай — найдем количество корней уравнения $x^3 - 3x + b = 0$, где b — произвольное число. Запишем уравнение как $P(x) = -b$, где $P(x) = x^3 - 3x$, тогда корни этого уравнения определяются точками пересечения графика

функции $y = P(x)$ с горизонтальной прямой $y = -b$. По графику функции $y = x^3 - 3x$ легко увидеть, что он как бы составлен из трех кусков: $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, \infty)$. На первом кусочке — на множестве всех чисел, не превосходящих -1 — эта функция возрастает, на втором — при x от -1 до 1 — убывает, а потом — снова возрастает. Чтобы обосновать это наблюдение, запишем разность

$$P(u) - P(v) = u^3 - v^3 - 3(u - v) = (u - v)(u^2 + uv + v^2 - 3).$$

Пусть $u < v$, тогда первый сомножитель всегда отрицательный. Если $u < -1$ и $v \leq -1$, то $u^2 > 1$, $uv > 1$ и $v^2 \geq 1$, тогда второй сомножитель положителен и $P(u) - P(v) < 0$. Значит, на множестве чисел, не превосходящих -1 , функция $P(x)$ — возрастающая. Точно так же можно убедиться, что $P(x)$ — возрастающая на множестве чисел, не меньших единицы, и убывающая на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Таким образом, уравнение $P(x) = -b$ может иметь на каждом из множеств $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 1$ и $1 \leq x$ не более, чем по одному корню.

Теперь ясно, что наибольшее и наименьшее значения функции $P(x)$ на отрезке между ее корнями принимаются соответственно в точках $x = -1$, $P(-1) = 2$ и $x = 1$, $P(1) = -2$. Поэтому прямая $y = d$ пересекает график функции $y = P(x)$ в одной точке при $d > 2$ или $d < -2$, а при $-2 < d < 2$ — в трех точках. При $d = 2$ эта прямая касается графика в точке с координатами $(-1, 2)$ и пересекает его в точке с координатами $(2, 2)$, а при $d = -2$ касается в точке $(1, -2)$ и пересекает в точке $(-2, -2)$. Итак, уравнение $x^3 - 3x = -b$ имеет одно решение при $|b| > 2$, два — при $|b| = 2$ и три — при $b < 2$. Заметьте, что при изменении знака b количество корней не меняется. Это и не удивительно — график $P(x)$ симметричен относительно начала координат, так как $P(-x) = -P(x)$.

Упражнение 6.2. Докажите, что любое кубическое уравнение $ax^3 + px^2 + qx + r = 0$ заменой $x = ky + l$, где k и l — числа, $k \neq 0$, может быть сведено к одному из трех типов уравнений:

$$y^3 - 3y + b = 0;$$

$$y^3 + b = 0;$$

$$y^3 + 3y + b = 0.$$

Упражнение 6.3. Сколько корней может иметь уравнение $x^3 + 3x + b = 0$?

6.4 Ищем приближенные значения корней

Когда мы знаем “небольшой” (по каким-либо меркам) отрезок, на котором лежит корень решаемого уравнения, то любая точка этого отрезка может считаться приближенным значением корня. Корень находится где-то на отрезке, поэтому ошибка такого приближения не больше длины отрезка, какую бы точку мы ни взяли. Если взять в качестве приближенного значения корня середину отрезка, на котором он лежит, то ошибка не будет превосходить половины длины отрезка. Если нас не устраивает точность приближения, то ее легко улучшить: поделим отрезок пополам и выясним, в какую половину попал корень. При необходимости деление отрезка можно повторять еще и еще.

Исследуем, например, уравнение $x^5 + x = 3$. Функция $P(x) = x^5 + x$ возрастающая, поэтому уравнение имеет не более одного корня. Так как $P(1) = 2$ и $P(2) = 34$, то корень существует и находится на отрезке $[1, 2]$. Тогда остается считать значения $P(x)$: $P(1,5) = 9,09375$; $P(1,3) = 5,01293$; $P(1,1) = 2,71051$. Отсюда ясно, что корень находится на отрезке $[1, 1; 1, 3]$, то есть он приблизительно равен 1,2 с ошибкой не более, чем 0,1.

В заключение напомним, что для квадратного уравнения теорема Виета позволяет сразу определить знаки корней: так как для уравнения $x^2 + px + q = 0$ произведение $x_1 x_2$ равно q , то при отрицательных q , очевидно, один корень положительный, один отрицательный, а при положительных q корни (если они, конечно, существуют) одного знака — противоположного знаку p .

Упражнение 6.4. При каких значениях параметра один корень уравнения $x^2 - 2(a+1)x - 2a + 1 = 0$ отрицателен, а другой — положителен?

Упражнение 6.5. При каких a один из корней уравнения $x^2 - 2x + 7 = a(1-x)$ больше единицы, а другой — меньше единицы?

Указание. Сделайте замену переменной $y = x - 1$.

7 О неприятностях

Иногда при решении уравнений случаются неприятности: появляются “лишние” корни, теряются “нужные”, а иногда непонятно, что делать

дальше, потому что неизвестное исчезло, а осталось “уравнение” $1 = 2$ или $1 = 1$. Чтобы справляться с такими неприятностями, надо хорошо понимать, что такое уравнение, и что мы делаем с ним в процессе решения.

7.1 Что такое уравнение?

Вот одно из возможных математических определений уравнения. Уравнением называется запись $f = g$, где f и g — две функции, заданные на одном и том же множестве A .

Множество A называется областью определения уравнения (Вы, наверно, ее знаете под именем области допустимых значений — ОДЗ).

Элемент $a \in A$ называется решением (или корнем) уравнения $f = g$, если $f(a)$ и $g(a)$ — одно и то же число.

Уравнение $f = g$ задает подмножество множества A , состоящее из всех корней уравнения. (Можно представить себе, что мы проверяем каждый элемент A и пропускаем только такие $x \in A$, для которых действительно $f(x) = g(x)$). Например, определим на множестве всех табуреток функцию H , сопоставив каждой табуретке число ее ножек, тогда уравнение $H(x) = 4$ задает множество всех табуреток с четырьмя ножками.

Таким образом, чтобы задать уравнение, мало написать $f = g$, еще надо указать A — его область определения.

Обычно область определения уравнения не упоминается — Вам говорят “решите уравнение $x^2 + 2 = 4x$ ” и Вы сразу понимаете (не задумываясь об этом), что область определения уравнения — числовая прямая. Дело в том, что принято правило: если область определения уравнения не указана, то берется так называемая *естественная область определения*. Вы уже встречались с похожим понятием естественной области определения функции, когда изучали тему “Функции и графики”. Если написано $f = g$, где f и g — некоторые выражения⁹, то каждой букве сопоставляется переменная, и естественной областью определения уравнения считается множество всех таких наборов значений переменных, для которых имеет смысл и f , и g . Например, естественной областью

⁹Выражение — это осмысленная комбинация из букв, чисел, знаков арифметических операций, скобок и обозначений функций. Слово “осмысленная” мы сейчас уточнять не будем.

определения уравнения $x + a = 2$ является множество всех пар чисел (x, a) , а уравнения $a/d = \sqrt{z}$ — множество троек чисел (a, d, z) , в которых $d \neq 0$ и $z \geq 0$.

Надо добавить, что обычно (со времен Виета) принято считать, что неизвестные величины обозначаются латинскими буквами из конца алфавита — x, y, z, u, v, w, t , а латинские буквы из начала алфавита — a, b, c, \dots обозначают не “обыкновенные” неизвестные, а параметры. Разница между неизвестными и параметрами довольно условная и сводится к тому, что обычно требуется определить значение неизвестных, выразив их через значения параметров. При этом считается, что параметры — это некоторые конкретные числа, значение которых нам не задано. Таким образом, в задачах “с параметрами” ответ зависит от значений параметров и исследование этой зависимости представляет собой самую сложную и интересную часть решения таких задач. Мы уже исследовали уравнение $x^3 - 3x + b = 0$ и видели, что при различных значениях параметра b число корней этого уравнения может быть 1, 2 или 3.

Пример. Решим уравнение $x^2 + 2x + a = 0$. Дискриминант равен $4(1 - a)$, поэтому уравнение не имеет корней при $a > 1$, имеет один корень при $a = 1$ и два — при $a < 1$. При $a = 1$ исследуемое уравнение принимает вид $x^2 + 2x + 1 = 0$, поэтому (единственный) корень равен -1 . При $a < 1$ имеем $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - a}$.

Ответ. При $a < 1$ $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - a}$; при $a = 1$ $x = -1$; при $a > 1$ уравнение решений не имеет.

Упражнение 7.1. Параметр обозначен буквой d .

а) Решите уравнение $dx^2 + 2x + 1 = 0$.

б) Решите неравенство $dx + 1 < 0$.

в) При каких значениях параметра d уравнение

$$(a - 1)x^2 + (a + 4)x - (a + 3) = 0$$

имеет два различных корня?

Упражнение 7.2. Придумайте уравнение, для которого естественной областью определения является:

а) отрезок $[0, 1]$;

б) точки 1 и -1 на числовой прямой;

в) плоскость с координатами (x, y) за исключением окружности радиуса 3 с центром в начале координат.

Бывает, и довольно часто, что уравнения и неравенства появляются не сами по себе — от учителя, из учебника и т.п., а в качестве промежуточного этапа при решении какой-нибудь задачи, например, текстовой. В этом случае уравнение (или неравенство, или система) обычно “принесит с собой” свою область определения, связанную с исходной задачей. В текстовых задачах неизвестные часто должны быть положительными или натуральными числами (ответы типа “два землекопа и две трети” обычно считаются неверными). Другой пример: если в тригонометрическом уравнении $\sin^3 x - \sin^2 x - 4 \sin x + 4 = 0$ сделать подстановку $\sin x = t$, то получится кубическое уравнение $t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$, которое требуется решить на отрезке $-1 \leq t \leq 1$.

В любом случае необходимо помнить, что в тот самый момент, когда Вы начали решать уравнение, у него уже имеется область определения. Как бы Вы ни преобразовывали задачу, какие бы вспомогательные приемы ни использовали, в конце концов у Вас должно получиться решение исходной задачи: уравнения на его исходной области определения.

Мы еще несколько раз вернемся к тому, как следить за областью определения. Некоторые примеры разобраны в последнем параграфе брошюры.

7.2 Как мы решаем уравнения?

Давайте “разберем на составные части” процесс решения уравнения, чтобы точно знать, откуда берутся ошибки, и какие меры предосторожности надо принимать.

Пусть дано уравнение

$$\frac{x}{1-x} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1-x} - 1.$$

Упростив его левую и правую части по отдельности, получим

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x}.$$

Разделим числитель и знаменатель левой части на x^2 , а правой на x , сделаем подстановку $u = 1/x$. Получим уравнение

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{u - 1}.$$

откуда $u^2 - 1 = u - 1$. Отсюда $u = 0$ или $u = 1$. Так как $u = 1/x$, то $x = 1$.

Казалось бы, уравнение решено. Если, однако, попытаться подставить в исходное уравнение $x = 1$, то мы убедимся, что это — не корень (на нуль делить нельзя!). С другой стороны, легко проверить, что $x = 0$ — корень уравнения, который мы почему-то не нашли. Где же мы ошиблись?

В уравнении

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{x}{1-x}$$

мы делили числители и знаменатели дробей на x , что можно делать только при $x \neq 0$; стало быть, если 0 является корнем, то при этой операции мы его потеряем. В таких случаях проще всего сразу подставить $x = 0$ в уравнение и посмотреть, корень ли это. Убедившись, что в данном случае это — корень, и запомнив это, пойдем дальше. После подстановки $u = 1/x$ получается уравнение

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{u - 1},$$

из которого действительно следует, что $u^2 - 1 = u - 1$; но уравнение $u^2 - 1 = u - 1$ не обязано быть равносильным предыдущему: оно определено при всех u , а уравнение

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{1}{u - 1}$$

не определено при тех x , при которых хоть один из знаменателей обращается в нуль. Поэтому найденные значения $u = 0$ и $u = 1$ надо еще проверить подстановкой в исходное уравнение, чего мы не сделали.

Наше исправленное решение уравнения

$$\frac{x}{1-x} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1-x} - 1$$

верно, но весьма вычурно. Удобнее всего было бы перенести все в левую часть и привести к общему знаменателю:

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 0.$$

Решение этого уравнения очевидно (дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю).

Разберем теперь несколько примеров, показывающих, откуда часто берутся лишние корни и как избегать их появления.

Пример 1.

$$\sqrt{x+2} = x. \quad (1)$$

Решение. Возводя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение

$$x+2 = x^2. \quad (2)$$

Все решения исходного уравнения (1) являются решениями уравнения (2) (если числа равны, то и их квадраты равны). Иными словами, уравнение $x+2 = x^2$ является следствием уравнения $\sqrt{x+2} = x$. Однако среди решений уравнения (2) могут быть не только нужные нам числа: ведь уравнение $\sqrt{x+2} = -x$ после возведения в квадрат даст то же самое уравнение (2), а значит, все корни этого «постороннего» уравнения, если таковые есть, также будут корнями (2). Поэтому, решив уравнение (2), надо еще отобрать среди найденных корней те, которые удовлетворяют нашему уравнению (1). В нашем случае это сделать совсем просто: решая (2) находим $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; подстановкой в (1) убеждаемся, что x_1 подходит, а x_2 — нет (ведь $\sqrt{1} = 1$, а не -1). Отсюда

Ответ: $x = 1$.

Мы уже обсуждали понятия равносильности и следствия, когда говорили об условиях в параграфе 3. Для уравнений (так как они являются условиями специального вида) эти понятия можно определить так:

Уравнение Б является следствием уравнения А, если все корни уравнения А являются корнями уравнения Б.

Уравнения А и Б равносильны, если множества их корней совпадают.

Например, уравнение $x^2 - x - 2 = 0$ — следствие уравнения $\sqrt{x+2} = x$, но эти уравнения не равносильны. Уравнения $(x-1)^2 = 0$ и $x + \frac{1}{x} = 2$ равносильны, а из уравнений $x^2 - 4x + 3 = 0$ и $x^2 - 3x + 2 = 0$ ни одно не является следствием другого.

Обычно мы переходим от исходного уравнения к его следствию, потом еще к одному следствию и так далее, пока не получится задача, в которой легко разобраться. Решив эту задачу, мы можем вернуться к исходной: все решения исходной задачи содержатся среди найденных

Российская Академия Образования
Открытый лицей
“ВСЕРОССИЙСКАЯ ЗАОЧНАЯ МНОГОПРЕДМЕТНАЯ ШКОЛА”
при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ
ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Пособие для учащихся математического отделения ОЛ ВЗМШ

Москва, 2001

Площади многоугольников: Пособие для учащихся ОЛ «ВЗМШ» при МГУ (Н. Б. Васильев – М.:ОЛ ВЗМШ, 40 с.).

Разработки предназначены учащимся Открытого Лицея «Все-российская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)», работающего при Московском университете им. М. В. Ломоносова.

Они содержат изложение темы «Площади многоугольников», начиная с определений и кончая довольно трудными задачами. В тексте, помимо необходимой теории, разобрано довольно много типичных задач. Составлена контрольная работа и предложено большое количество разнообразных упражнений и задач для самостоятельного решения.

Рецензент – к.ф.-м.н. В.Н. Дубровский.

Введение

Измерение площадей – одна из первых математических задач, возникших в глубокой древности. Среди самых старых древневавилонских клинописных табличек, смысл которых удалось расшифровать, – а их возраст составляет более четырех тысяч лет, – нашлись таблички с расчетами количества зерна, которое требуется для посева в зависимости от площади поля (при заданных расстояниях между рядами и зернами в ряду). Такие расчеты тогда не казались простыми из-за громоздкого способа обозначений больших чисел, в котором особую роль играли числа 6, 10, 60 (от этой «шестидесятеричной» системы до наших дней сохранился обычай делить окружность на 360 частей и измерять углы в градусах).

Долгое время, начиная с формирования математики как науки в Древней Греции, геометрия («землемерие») была основным языком математики. Операции над числами – длинами отрезков – выражались геометрическими образами, в частности, произведение двух отрезков a и b – площадью прямоугольника, $a \times b$; произведение числа на самого себя с тех пор так и называется: «квадрат». Следуя этой древнегреческой традиции, автор знаменитых учебников по арифметике и алгебре Мухаммед Аль-Хорезми («из Хорезма») пояснял методы решения квадратных уравнений рисунками, в которых все члены уравнения рассматривались как площади. Например, на рисунке, объясняющем решение уравнения $x^2 + 10x = 39$ методом «добавления до полного квадрата» (рис. 1), к квадрату $x \times x$ и двум прямоугольникам $5 \times x$ (здесь 5 – половина от 10) добавляется квадрат 5×5 – получается квадрат площади $39 + 25 = 64$; его сторона равна 8, поэтому $x = 3$. (Кстати, как раз по учебникам Аль-Хорезми, написанным в Багдаде в начале IX века, европейские математики познакомились с индийской десятичной системой записи чисел и многими забытыми в Европе математическими правилами.)

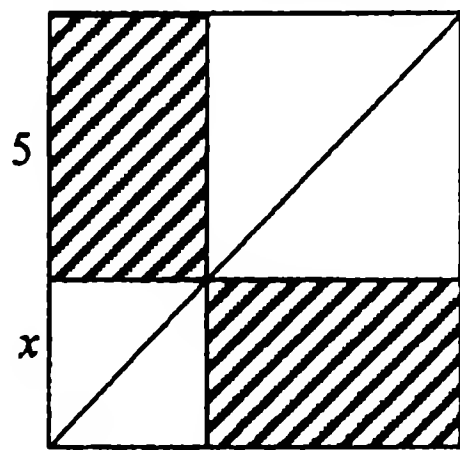


Рис. 1.

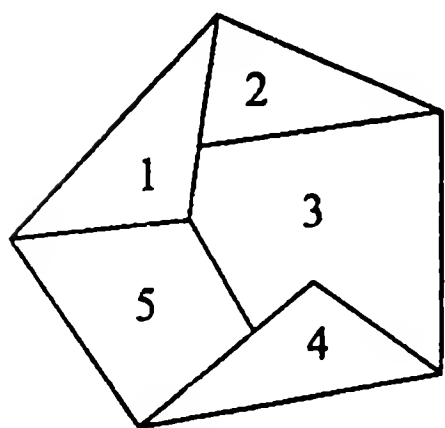
С задачами подсчета площадей криволинейных фигур произвольной формы связано развитие одного из основных понятий математического анализа – понятия интеграла.

В этой книге мы займемся только самыми простыми фигурами – многоугольниками, и будем в основном говорить о геометрических приемах рассуждений: разберем ряд характерных задач на подсчет и сравнение площадей, а также на использование площади как инструмента в геометрических доказательствах. Среди упражнений и за-

дач, особенно в последнем разделе, немало трудных, требующих длительных размышлений; некоторые интересные факты и формулы, которые в них требуется доказать, открыты сравнительно недавно — в этом веке или в конце прошлого. (Если решение придумать никак не удастся, можно посмотреть в конец книги, где к задачам последнего раздела даны указания.)

Но вначале, не обсуждая тонкости, связанные с определением самого понятия «площадь фигуры», перечислим его основные свойства и некоторые полезные формулы.

1. Основные свойства площади



$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

В геометрии и физике мы встречаемся с разными характеристиками, выражающими величину предметов; для них выполняется такое общее свойство: при разбиении на части величина целого равна сумме величин частей. Это свойство называют аддитивностью (от латинского *additio* — «складываю»). Примеры аддитивных величин: длина отрезка, длина дуги, величина угла, объем, масса, заряд, энергия; свойством аддитивности обладает и площадь

фигуры на плоскости. Любую из этих величин можно измерить, т.е. выразить (неотрицательным) числом при условии, что задан «эталон» — единица измерения.

Все формулы и способы подсчета площадей можно вывести из небольшого числа основных свойств.

Перечислим эти основные свойства площади. Дальше речь идет только о площадях многоугольников, и мы формулируем эти свойства лишь для многоугольников — фигур, ограниченных ломаными линиями.

А-0. Площадь каждого многоугольника — положительное число.

А-1. Площади равных многоугольников равны.

А-2. Если многоугольник разрезать (отрезками или ломаными) на несколько частей, то его площадь будет равна сумме площадей этих частей. (Свойство аддитивности площади.)

А-3. Площадь квадрата со стороной длины 1 равна 1.

Площадь многоугольника M обозначается обычно через S_M или $S(M)$. В частности, площадь треугольника ABC мы будем обозначать S_{ABC} и т. п.

Из основных свойств А-0 – А-3 выводится формула для площади прямоугольника со сторонами a и b :

$$(1) \quad S_{\square} = ab.$$

– основа для получения всех других формул. Прежде всего из (1) с помощью свойства А-2 (аддитивности) – путем «разрезания» и «складывания» – выводятся формулы для площади параллелограмма и, затем, треугольника (рис. 2).

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту:

$$(2) \quad S_{\square} = ah.$$

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту:

$$(3) \quad S_{\Delta} = ah/2.$$

По поводу последнего правила заметим следующее. Поскольку любую сторону треугольника можно принять за основание, то его площадь можно вычислить тремя способами (рис. 3):

$$S_{\Delta} = ah_a/2 = bh_b/2 = ch_c/2$$

(где h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на стороны a, b, c). Таким образом, из рассмотрения площадей мы получим равенства $ah_a = bh_b = ch_c$, в которых площадь уже не участвует. К

этому приему – использованию площади как вспомогательного инструмента для доказательства геометрических соотношений – мы вернемся в разделе 4.

Используя определение синуса угла, соотношения (2) и (3) можно записать в виде формул, выражающих площадь параллелограмма

$$(2') \quad S_{\square} = ab \sin \gamma,$$

и площадь треугольника

$$(3') \quad S_{\Delta} = \frac{ab}{2} \sin \gamma.$$

Любой многоугольник можно (и причем разными способами) разрезать на треугольники, поэтому правила вычисления площади треугольника дают возможность найти площадь любого многоугольника. Приведем еще три удобные формулы.

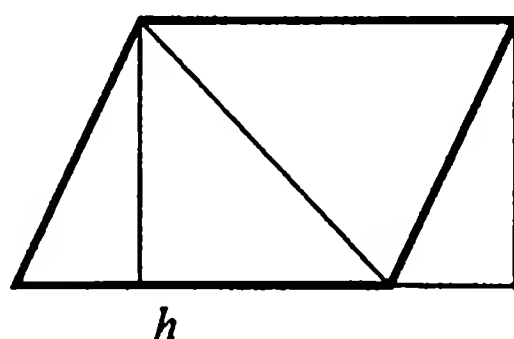
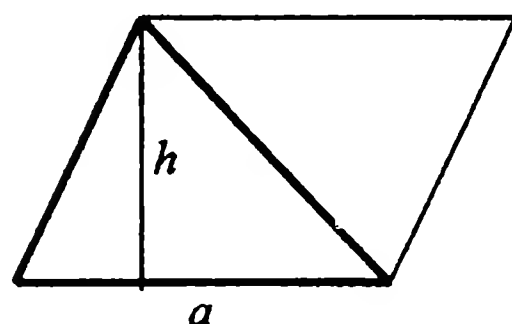
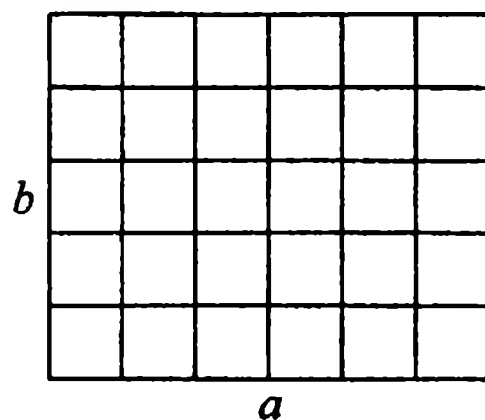


Рис. 2.

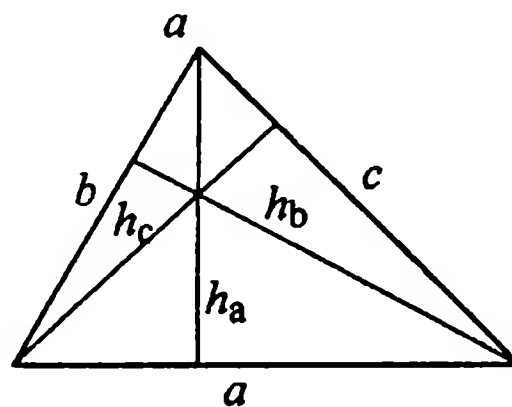


Рис. 3.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований a и b (то есть ее средней линии $\frac{a+b}{2}$) на высоту h .

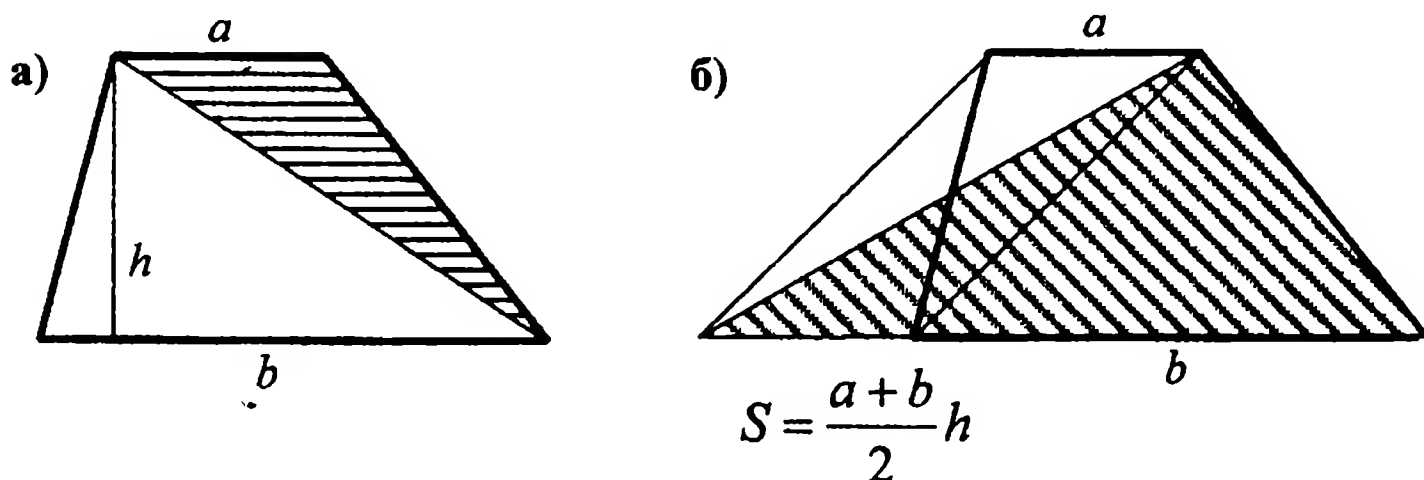


Рис. 4.

(4)

Два простых доказательства можно восстановить по рисункам 4а) и 4б) (на втором заштрихованный треугольник равновелик трапеции).

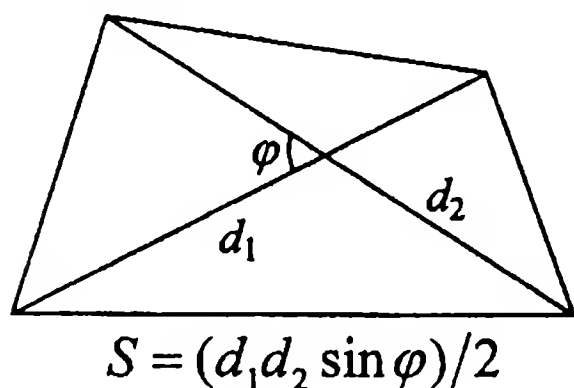


Рис. 5.

Площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей d_1 , d_2 на синус угла φ между ними.

Для доказательства достаточно заметить, что $\sin \varphi = \sin(180^\circ - \varphi)$, и сложить площади четырех треугольников, на которые четырехугольник разрезается диагоналями — рис. 5.

Площадь многоугольника, описанного около окружности радиуса r , равна половине произведения радиуса окружности на периметр P :

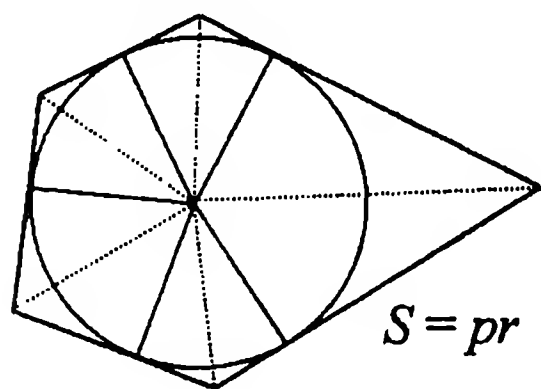


Рис. 6.

$$S = Pr/2. \quad (6)$$

Часто, особенно для треугольника, периметр обозначают как $2p$; тогда формула записывается так:

$$S = pr, \quad \text{где } p \text{ — полупериметр.} \quad (6')$$

Для доказательства достаточно разрезать многоугольник на треугольники с общей вершиной в центре вписанной окружности, как показано на рисунке 6.

Упражнения. 1-1. Докажите, что если K и L — середины сторон AB и BC треугольника ABC , M — любая точка стороны BC , то площадь четырехугольника $KBLM$ равна половине площади треугольника ABC .

1-2. Найдите площадь: а) равностороннего треугольника со стороной a ; б) равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углами 30° при основании; в) четырехугольника, вписанного в круг диаметра d , углы которого (по порядку) равны $90^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$.

1-3. Докажите равенство $1/h_1 + 1/h_2 + 1/h_3 = 1/r$, где h_1, h_2, h_3 – высоты треугольника, r – радиус вписанной в него окружности.

2. Разрезание и складывание

Начнем с задач, которые можно решить без вычислений, проводя простые геометрические построения и используя только простейшие свойства площади (А-1 и А-2).

Так, например, если удастся разбить два многоугольника на одинаковые части, то отсюда вытекает, что их площади равны (то есть эти многоугольники *равновелики*); иногда проще дополнить фигуры некоторыми одинаковыми кусками, чтобы убедиться, что они равновелики. Например, рисунок 7 показывает, каким образом каждый из двух треугольников, на которые разбивает треугольник его медиана, можно составить из двух соответственно равных черной и белой частей. (Конечно, тот факт, что медиана делит площадь пополам, ясен и из формулы (3) для площади треугольника).

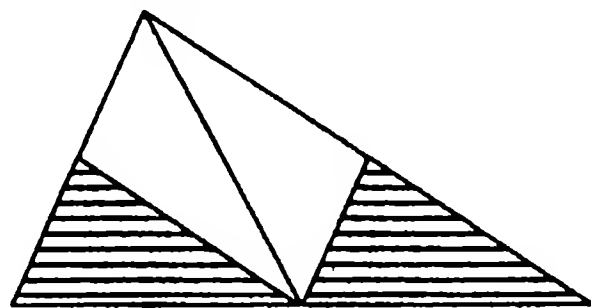


Рис. 7.

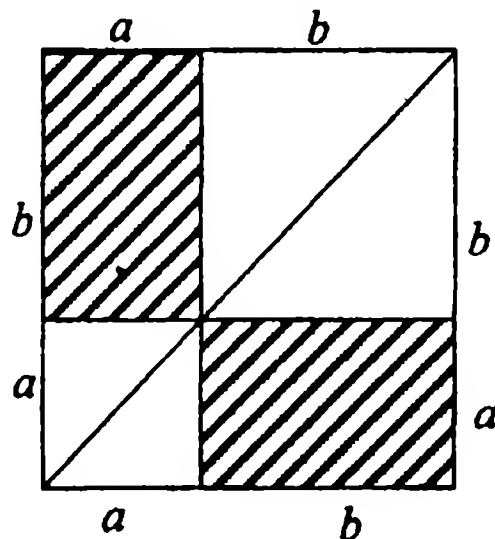


Рис. 8а.

На практике поиск изящного, простого разрезания (или дополнения) требует определенной изобретательности. Задачи «на разрезание», в том числе и очень трудные, часто встречаются в сборниках головоломок. Мы разберем здесь лишь несколько примеров. В первом из них можно узнать «косоугольный» вариант рисунка, с помощью которого древние иллюстрировали формулу

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ (рис. 8а).}$$

Задача 1. Через точку, взятую на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам. Данный параллелограмм делит

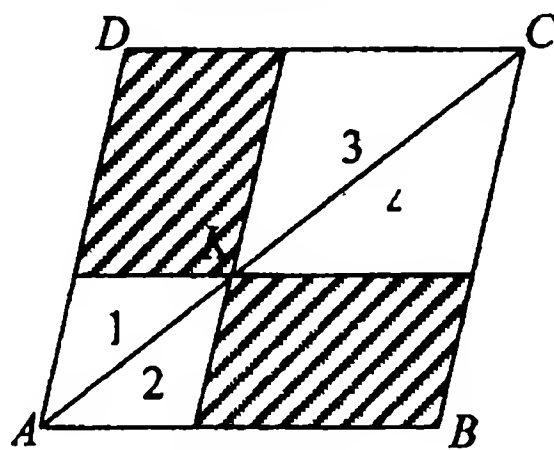


Рис. 8б.

ся ими на четыре параллелограмма. Два из них пересекаются диагональю AC . Докажите, что два других равновелики.

Решение. Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника. Поэтому (рис. 86):

$$S_{ABC} = S_{ADC}, \quad S_1 = S_2, \quad S_3 = S_4$$

(каждый из отрезков AC , AK и KC – диагональ параллелограмма, делящая его на две равные части). Вычитая почленно из первого равенства два других, получаем, что площади заштрихованных параллелограммов равны.

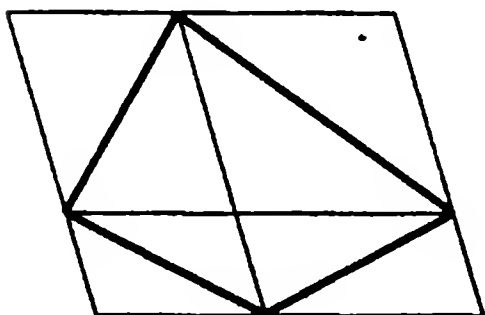


Рис. 9.

Задача 2. Через каждую вершину выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная его диагонали. Докажите, что полученный параллелограмм по площади вдвое больше четырехугольника (рис. 9).

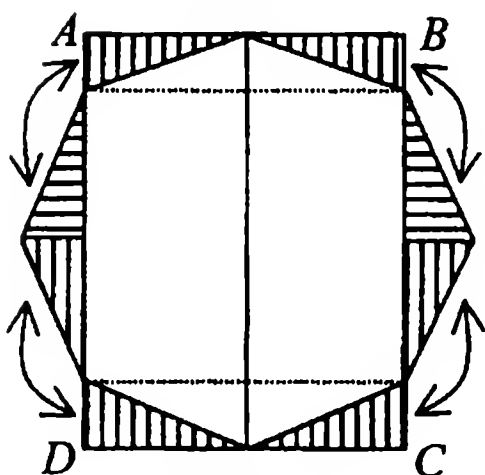


Рис. 10.

Задача 3. Докажите, что площадь правильного восьмиугольника равна произведению наибольшей и наименьшей из его диагоналей.

Указание. Прямоугольник $ABCD$ и восьмиугольник, изображенные на рисунке 10, равновелики, так как заштрихованные на нем прямоугольные треугольники равны.

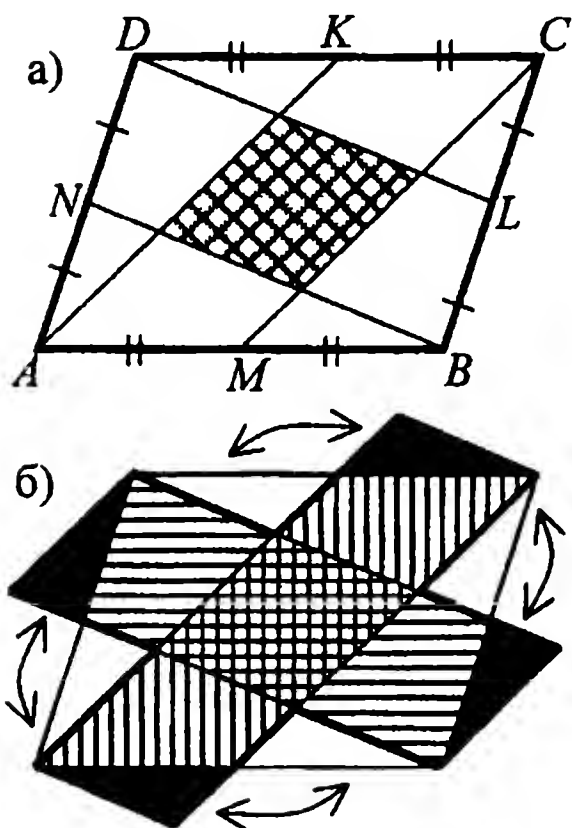


Рис. 11.

Задача 4. В параллелограмме $ABCD$ проведены четыре отрезка: вершина A соединена с серединой стороны BC , вершина B – с серединой стороны CD , вершины C и D – с серединами сторон DA и AB . Докажите, что четырехугольник, образуемый этими четырьмя отрезками, – параллелограмм, и что его площадь в пять раз меньше площади данного параллелограмма.

Указание. Прямые BN и DL параллельны, так как $BLDN$ – параллелограмм (стороны DN и LB равны и параллельны). Аналогично доказывается параллельность прямых AK и CM . Поэтому

четырехугольник, заштрихованный на рисунке 11а – параллелограмм. Проведя дополнительное построение, получим «крест», вы-

деленный на рисунке б, он состоит из пяти равных параллелограммов. Треугольники, соединенные стрелками, симметричны относительно середин сторон параллелограмма. Поэтому площадь «креста» и исходного параллелограмма одинаковы.

Можно доказать, что метод «разрезания и складывания» в принципе годится для любых равных по площади многоугольников: всегда можно разрезать один из них на части так, что после перекладывания получится другой. (Интересно, что для многогранников равного объема – даже таких простых, как тетраэдр и куб, – аналогичное утверждение, вообще говоря, неверно. Доказать это предлагалось в одной из «проблем Гильберта», поставленных великим немецким ученым на математическом конгрессе на рубеже XIX и XX веков. Впрочем, эта проблема, в отличие от многих других, оказалась сравнительно несложной и была почти сразу решена – см. статью в журнале «Квант» №12, 1990.)

Но, конечно, для доказательства равенства площадей метод «разрезания» далеко не всегда удобен. В следующих пунктах мы рассмотрим другие способы сравнения площадей.

Упражнения. 2-1. На каждой стороне правильного:

а) 6-угольника;

б) 8-угольника

вне его, как на основании, построен равнобедренный треугольник, образованный продолжениями соседних сторон этого правильного многоугольника. Во сколько раз площадь полученной «снежинки» больше площади исходного многоугольника?

2-2. а) Пусть K и L – середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Во сколько раз площадь четырехугольника, являющегося пересечением треугольников ALB и CKD , меньше площади исходного параллелограмма? б) Изменится ли ответ, если K и L – такие точки на сторонах AB и CD , что $AK/KB = DL/LC$?

2-3. а) Отрезки, соединяющие центр окружности с вершинами произвольного описанного шестиугольника, делят его на 6 треугольников, раскрашенных попеременно в черный и белый цвет. Докажите, что суммы площадей черных и белых треугольников равны.

б) Отрезки, соединяющие центр окружности с вершинами описанного пятиугольника и точками касания, делят его на 10 треугольников, раскрашенных попеременно в черный и белый цвет. Докажите, что суммы площадей черных и белых треугольников равны.

3. Отношения площадей треугольников.

Во многих задачах используется формула (3) площади треугольника $S = ah/2$ и ее простые следствия. Перечислим некоторые из них.

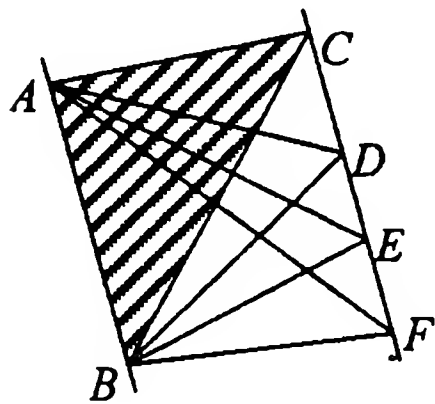


Рис. 12.

С-1. Если вершину треугольника передвигать по прямой, параллельной основанию, то его площадь при этом не меняется.

(На рисунке 12 треугольники ABC , ABD , ABE , ABF имеют общее основание AB и равные высоты, опущенные на это основание.)

Именно это обстоятельство использовано в классическом доказательстве **теоремы Пифагора** в «Началах» Евклида. Приведем его.

Пусть в треугольнике ABC угол C – прямой. Докажем, что $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

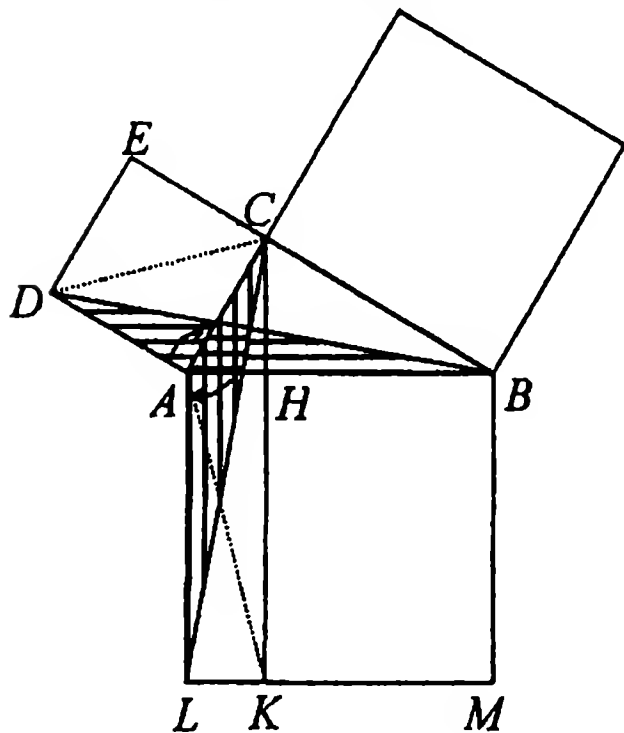


Рис. 13.

Разобьем квадрат $ABML$, построенный на гипотенузе AB , продолжением высоты CH на два прямоугольника, $AHKL$ и $BHKM$.

Докажем, что площадь первого из них равна площади квадрата $ACED$, построенного на катете AC , то есть $AH \cdot AL = AC^2$.

Применяя С-1 к треугольникам ADC и ADB , получаем, что $\triangle ADB$ равновелик половине квадрата $ACED$; точно так же, применяя С-1 к треугольникам ACL и AHL , получаем, что $\triangle ACL$ равновелик половине прямоугольника $AHKL$. Но два заштрихованные треугольника равны (ACL получается из ADB поворотом на 90°). Отсюда следует, что квадрат $ACED$ и прямоугольник $AHKL$ равновелики.

Точно так же можно доказать, что площадь второго прямоугольника, $BHKM$, равна площади квадрата, построенного на катете BC . Отсюда и следует теорема Пифагора: квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Заметим, что теорему Пифагора можно доказать, используя лишь разрезание и складывание, например, так (см. рис. 14).

Пусть дан квадрат со стороной $a + b$. Разрезав его сначала так, как показано на рисунке 14а, мы получим два квадрата со сторонами a и b и четыре треугольника с катетами a , b и гипотенузой c .

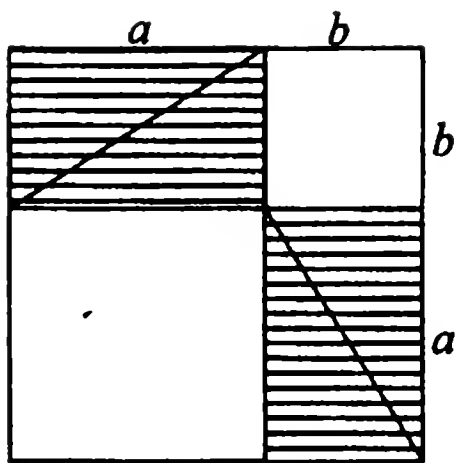


Рис. 14а.

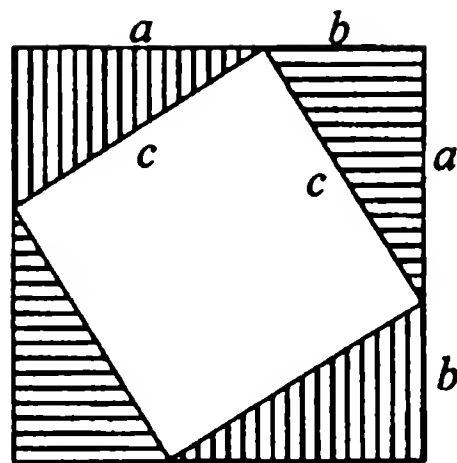


Рис. 14б.

Затем, разрезав тот же квадрат так, как показано на рисунке 14б, мы получим те же четыре треугольника и квадрат со стороной c (доказать, что это действительно квадрат, можно, повернув рисунок на 90° !).

Поскольку площади незаштрихованных частей на рис. 14а и на рис. 14б равны, получаем:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Почему же Евклид предпочел более хитрое доказательство (использующее «передвигание вершин» С-1)? Возможно, потому, что из него заодно получается полезный промежуточный результат: в обозначениях рис. 13 доказано, что $AC^2 = AB \cdot AN$ (катет есть «среднее геометрическое» между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу; это дает простой способ построения отрезка $b = \sqrt{cd}$ по данным отрезкам c и d с помощью циркуля и линейки, рис. 15). Но не исключено, что просто это доказательство казалось Евклиду более поучительным: прием, который в нем употреблен, используется и в других случаях.

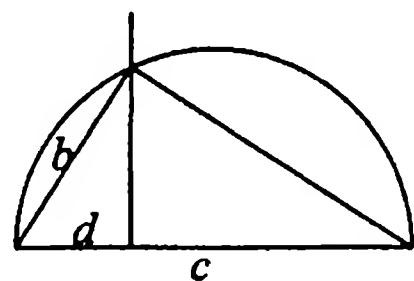


Рис. 15.

Задача 5. а) Докажите методом Евклида, что для любого треугольника со сторонами a, b, c (у которого оба угла, прилежащие к стороне a , острые) площадь квадрата $a \times a$ равна сумме площадей двух прямоугольников, $b \times a_b$ и $c \times a_c$, где a_b и a_c — проекции стороны a на прямые, содержащие b и c соответственно (рис. 16).

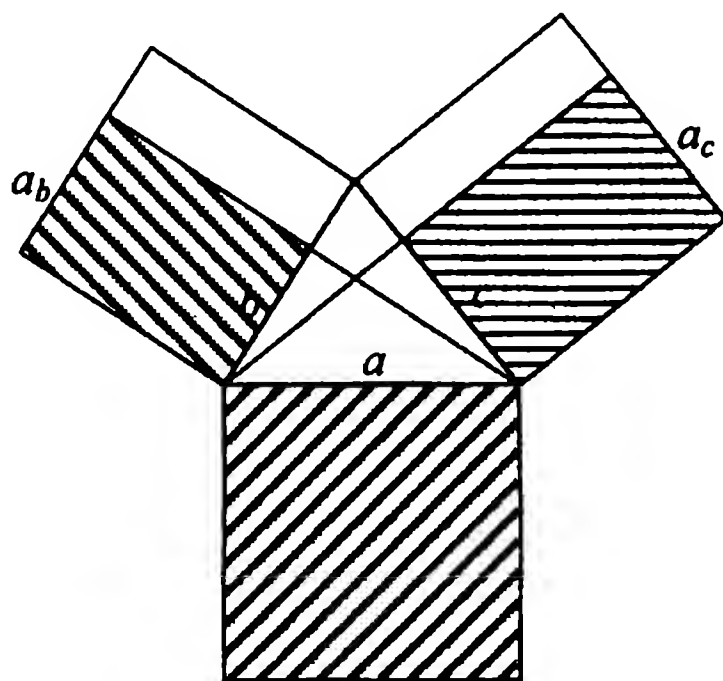


Рис. 16.

б) Выведите отсюда формулу

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

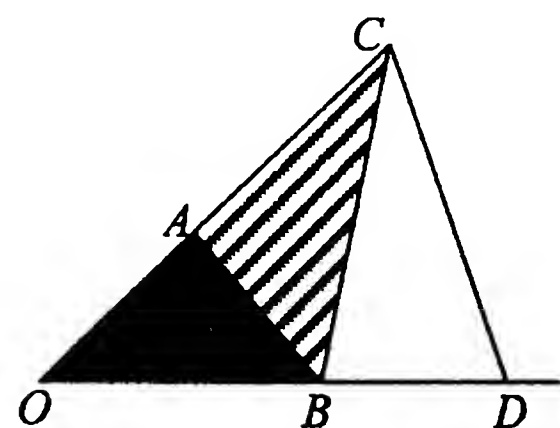
где α — угол между b и c («теореме косинусов»).

в) Как нужно изменить формулировку пункта а) в случае, когда один из углов, прилежащих к стороне a , тупой?

Вернемся к формуле (3) площади треугольника. Если зафиксировать в формуле $S = ah/2$ одну из величин, a или h , то его площадь будет пропорциональна другой величине. Отсюда получаем такие утверждения.

С-2. Если треугольники имеют равные основания, то отношение их площадей равно отношению высот, опущенных на эти основания.

С-3. Если треугольники имеют одинаковые высоты, то отношение их площадей равно отношению оснований (сторон, на которые опущены эти высоты).



$$\frac{S_{OAB}}{S_{OBC}} = \frac{OA}{OC}, \quad \frac{S_{OBC}}{S_{OCD}} = \frac{OB}{OD},$$

$$\frac{S_{OAB}}{S_{OCD}} = \frac{OA \cdot OB}{OC \cdot OD}$$

Рис. 17.

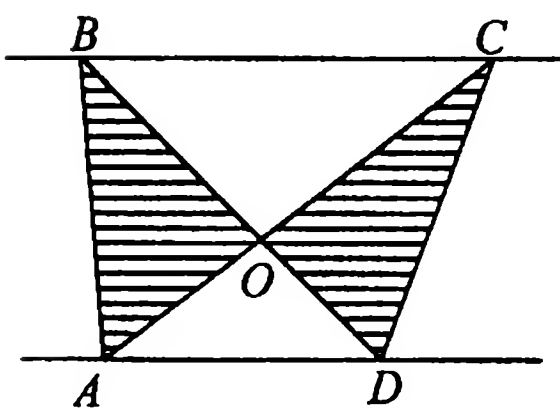


Рис. 18.

Из С-3 можно вывести более общее соотношение:

С-4. Если два треугольника имеют общий угол, то их площади относятся как произведения сторон, заключающих этот угол (рис. 17).

Конечно, утверждение С-4 сразу следует также из формулы $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ для площади треугольника со сторонами a, b и углом γ между ними.

Задача 6. Пусть O – точка пересечения отрезков AC и BD (см. рис. 18). Докажите, что для того, чтобы площади треугольников ABO и CDO были равны, необходимо и достаточно, чтобы прямые BC и AD были параллельны.

Решение. Требуется доказать два утверждения.

I (достаточность). Если $S_{ABO} = S_{CDO}$, то $BC \parallel AD$.

II (необходимость). Если $BC \parallel AD$, то

$$S_{ABO} = S_{CDO}.$$

Докажем утверждение II. В силу С-1 имеем $S_{ABD} = S_{ACD}$. Отнимая от каждой из этих площадей S_{AOD} , получаем $S_{ABO} = S_{CDO}$, что и требовалось.

Докажем утверждение I. Если $S_{ABO} = S_{CDO}$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства S_{AOD} , получим $S_{ABD} = S_{ACD}$, тогда в силу С-2 прямые BC и AD параллельны.

Задача 7. Пусть диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4 . Докажите, что $S_1 S_3 = S_2 S_4$.

Решение. Согласно свойству С-3, имеем (рис.19):

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC} = \frac{S_4}{S_3}, \quad \text{откуда} \quad S_1 S_3 = S_2 S_4.$$

Этот результат часто используется при решении различных геометрических задач.

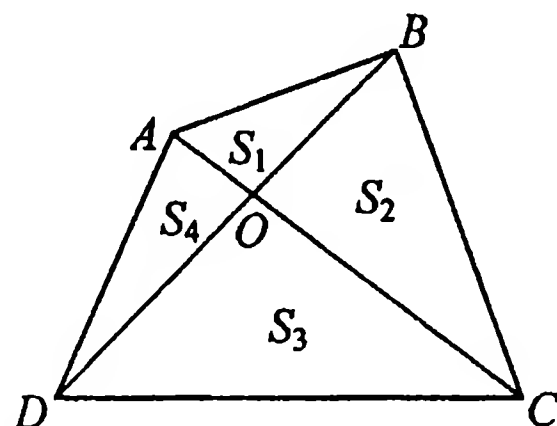


Рис. 19.

Задача 8. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны S_1 и S_2 . Найдите площадь трапеции.

Ответ: $2\sqrt{S_1 S_2} + S_1 + S_2 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Решение. Из задачи 6 следует, что $S_{ABO} = S_{CDO}$; обозначим эту площадь через S (рис. 20). Из задачи 7 следует:

$$S^2 = S_1 S_2, \quad \text{откуда} \quad S = \sqrt{S_1 S_2}.$$

Поэтому $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$.

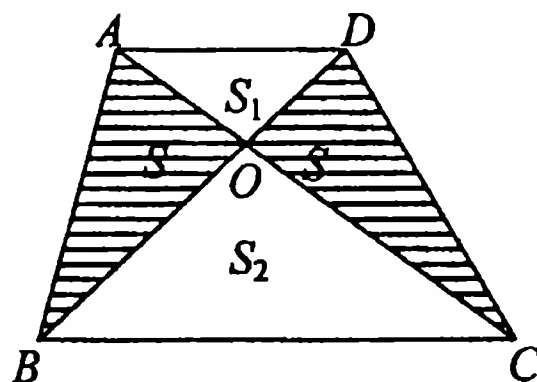


Рис. 20.

Задача 9. Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные его сторонам. Эти прямые делят треугольник на 6 частей, три из которых – треугольники с площадями S_1, S_2, S_3 . Найдите площадь исходного треугольника.

Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Решение. Задача сводится к нахождению площадей T_1, T_2 и T_3 заштрихованных параллелограммов (на рисунке 21а).

Найдем T_3 . Для этого рассмотрим часть искомого треугольника, изображенную на рис. 21б). Достроим эту часть – треугольник – до параллелограмма (рис.21в). Этот параллелограмм разбит на четыре параллелограмма, из которых два заштрихованных равновелики (вспомним задачу 1). Очевидно (рассуждаем как в задаче 7),

$$(*) \quad \frac{2S_1}{T_3} = \frac{AE}{EB} = \frac{AO}{OC} = \frac{BF}{FC} = \frac{T_3}{2S_2},$$

откуда $T_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}$. Аналогично получаем:

$$T_1 = 2\sqrt{S_2 S_3}, \quad T_2 = 2\sqrt{S_1 S_3}.$$

Теперь находим площадь исходного треугольника:

$$S_1 + S_2 + S_3 + 2\sqrt{S_1 S_2} + 2\sqrt{S_2 S_3} + 2\sqrt{S_1 S_3}.$$

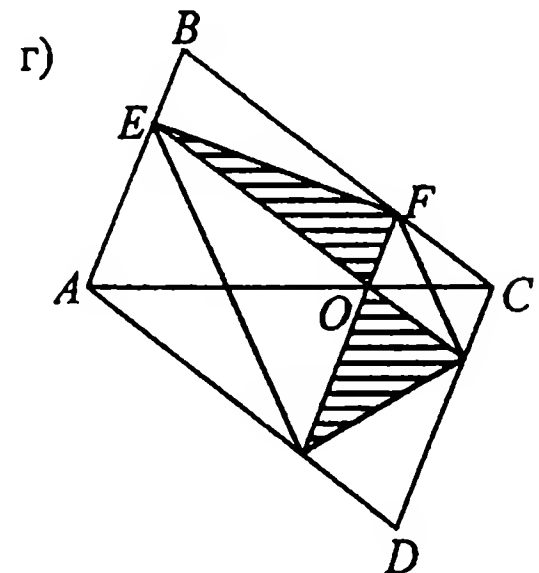
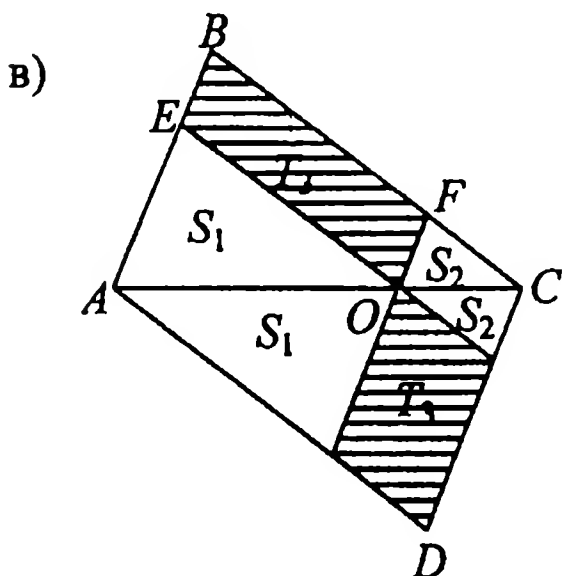
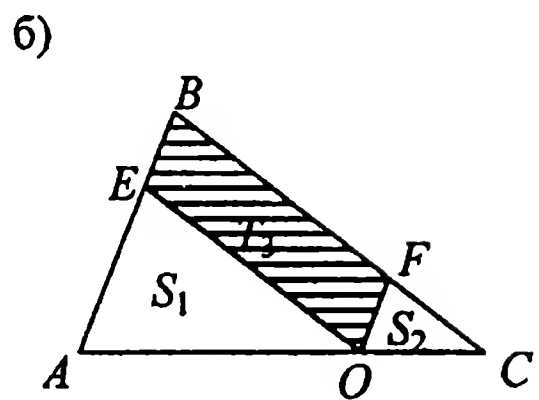
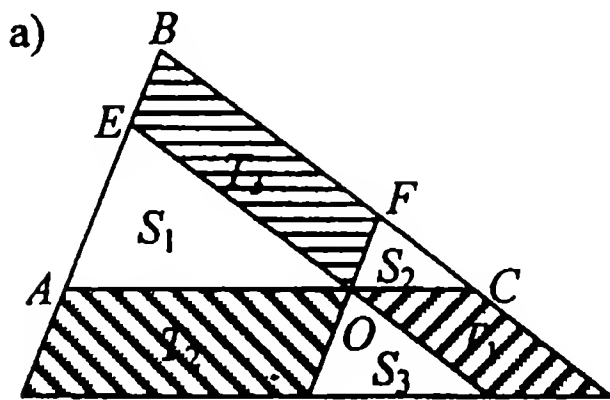


Рис. 21.

Интересно, что если мы проведем в незаштрихованном параллелограмме диагонали, как показано на рис. 21г), то эти диагонали образуют трапецию (согласно задаче б) и вместо выкладок (*) можно использовать задачу 8.

Упражнения. 3-1. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые делит гипотенузу точка касания вписанной окружности.

3-2. Решите упражнение 2-2, в формулировке которого считайте, что $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и CD .

3-3. Прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 9$ и $BC = 3$ согнули по прямой так, что точка A совпала с C . Найдите площадь получившегося пятиугольника.

3-4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O . Найдите его площадь, если $S_{AOB} = 2$, $S_{ABC} = 5$, $S_{ABD} = 6$.

3-4. На сторонах треугольника ABC построены (вне него) квадраты $ABKL$, $BCMN$, $AC PQ$. На отрезках LQ и MP тоже построены квадраты. Докажите, что разность площадей этих двух квадратов втрое больше чем разность площадей $ABKL$ и $BCMN$.

Указание. Можно использовать теорему косинусов (см. задачу 5а).

4. Площади подобных фигур

Если разделить стороны треугольника пополам и провести средние линии, то площадь каждого из получившихся меньших треугольников в 4 раза меньше, чем исходного (рис. 22а). Вообще, если на лучах AB и AC отложить отрезки $AB_1 = kAB$ и $AC_1 = kAC$, то площадь треугольника AB_1C_1 , согласно свойству С-4, будет в k^2 раз больше площади треугольника ABC . Заметим, что треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом k : отношения соответствующих друг другу сторон этих треугольников равно k (и углы равны). Итак,

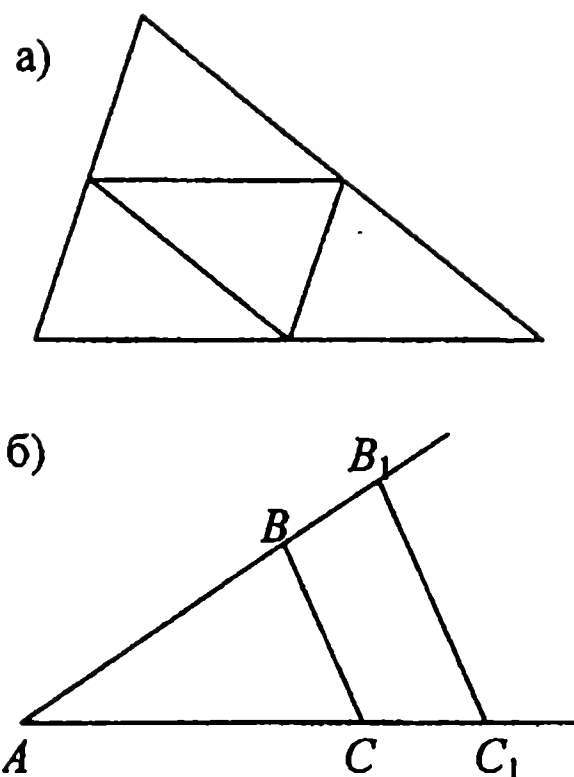


Рис. 22.

отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Такая же теорема верна и для подобных многоугольников. (Напомним, что два многоугольника и вообще две фигуры называются подобными, если каждой точке первого можно поставить в соответствие точку второго так, что расстояние между любыми двумя точками второго отличается в k раз от расстояния между точками первого, которым они соответствуют; k — коэффициент подобия.) В самом деле, подобные многоугольники можно одинаковым образом разрезать на треугольники, причем соответствующие треугольники будут подобны в том же коэффициенте подобия k . Пользуясь аддитивностью площади, представим площадь каждого многоугольника как сумму площадей составляющих его треугольников (рис. 23): если площадь первого равна $S_1 + S_2 + \dots = S$, то площадь подобного ему (с коэффициентом k) равна $k^2 S_1 + k^2 S_2 + \dots = k^2 S$.

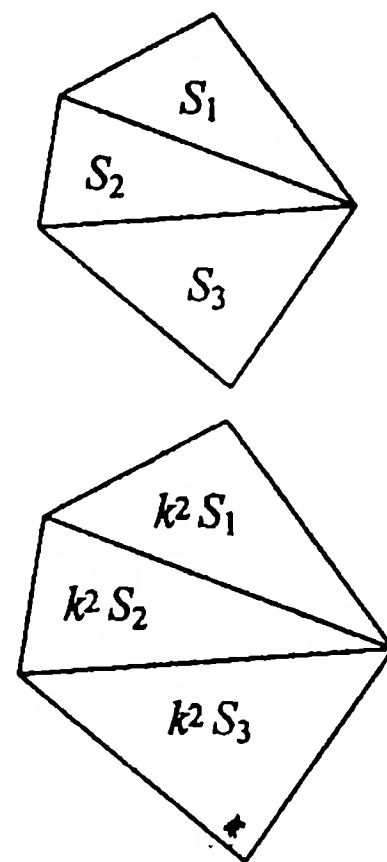
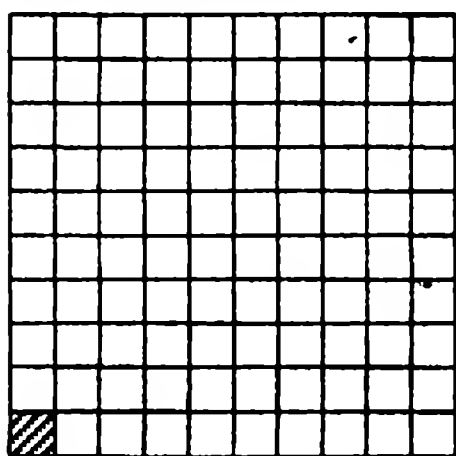


Рис. 23.

Теорему о площадях подобных фигур можно сформулировать в таком виде:

площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров.

При этом найти «отношение линейных размеров» (коэффициент подобия) можно, взяв любые отрезки двух фигур, соответствующие друг другу: стороны или (для треугольника) высоты, радиусы описанных кругов и т.п.



1 ар («сотка») = 100 м²,
1 гектар = 100 ар,
1 км² = 100 гектар

Рис. 24.

Соображениями подобия объясняется, почему при изменении единицы масштаба — эталона длины — в k раз численное значение площади изменяется в k^2 раз: в одном квадратном километре $(1000)^2$, т.е. миллион квадратных метров, в квадратном метре — 10000 квадратных сантиметров и т.п. (рис. 24).

Те же соображения подобия (или «соображения размерности») позволяют контролировать формулы для площади: выражение для площади всегда является «однородной функцией степени 2» от линейных размеров фигуры: если все линейные размеры умножить на k , то площадь должна умножиться на k^2 . Например, «формулы» для площади треугольника $S = p(p-a)(p-b)(p-c)$, $S = abc/R^2$ (где a, b, c — стороны, p — половина периметра, R — радиус описанного круга) явно неверны: в первой справа стоит выражение четвертой степени, во второй — первой степени. Правильные формулы:

а) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона), (7)

б) $S = abc/4R$.

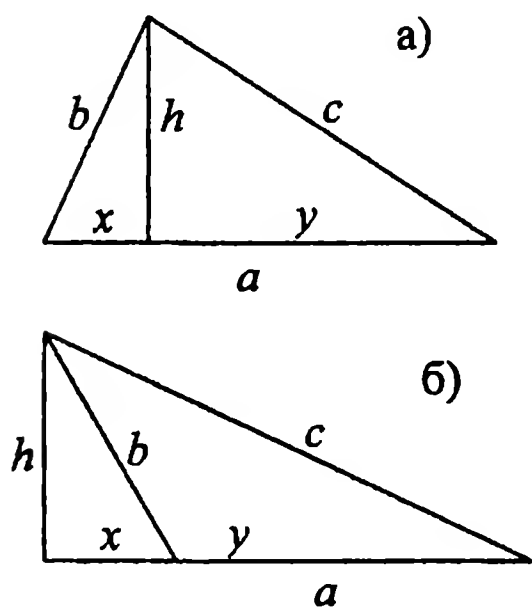


Рис. 25.

Задача 10. Докажите эти формулы.

Указания. а) Можно, опустив высоту h на сторону a , найти x , y и h из соотношений $x^2 + h^2 = b^2$, $y^2 + h^2 = c^2$ (теорема Пифагора) и $(x+y) = a$ (рис. 25а). Для тупоугольного треугольника последнее равенство надо заменить на $y - x = a$ (рис. 25б).

б) При данном R длина c хорды связана с величиной вписанного угла γ , который опирается на хорду c , формулой $c = 2R \sin \gamma$.

Вернемся к задаче 9 — последней из разобранных в предыдущем разделе — и покажем, как ее можно решить с помощью соображений подобия (рис. 21а).

Здесь все три треугольника с площадями S_1, S_2, S_3 подобны исходному треугольнику площади S .

Рассмотрим параллельные (скажем, горизонтальные) стороны всех треугольников. Мы видим, что из трех сторон меньших треугольников можно сложить сторону большего, значит, сумма коэффициентов подобия этих треугольников большему равна 1. Коэффициенты подобия равны $\sqrt{S_1/S}$, $\sqrt{S_2/S}$, $\sqrt{S_3/S}$, поэтому $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$, откуда получаем ответ.

А вот самое простое доказательство теоремы Пифагора, использующее подобие. Треугольники, на которые разрезается прямоугольный треугольник высотой, опущенной на гипотенузу, подобны исходному (рис. 26). Если a , b и c – катеты и гипотенузы исходного треугольника, то коэффициенты подобия меньших треугольников по отношению к большему равны a/c и b/c (это – отношения их гипотенуз); тем самым, отношения их площадей к площади большего равны соответственно $(a/c)^2$ и $(b/c)^2$. Поэтому $a^2/c^2 + b^2/c^2 = 1$, откуда $a^2 + b^2 = c^2$.

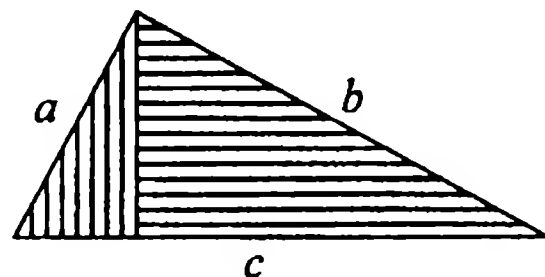


Рис. 26.

Сопоставляя разные способы подсчета площадей, можно получать (геометрически!) алгебраические тождества. Вот примеры красивых формул суммирования, связанных с теоремой об отношении площадей подобных фигур.

Разобьем треугольник прямыми, параллельными сторонам, на равные треугольники так, что стороны разбиты на n равных частей (рис. 27). Подсчитаем общее число полученных треугольников двумя способами. Поскольку площадь большого треугольника в n^2 раз больше площади каждого из маленьких ($1/n$ – коэффициент подобия), то это число равно n^2 . С другой стороны, треугольники расположены рядами, причем в верхнем ряду их один, в каждом следующем – на два больше, а в нижнем их $2n - 1$. Итак:

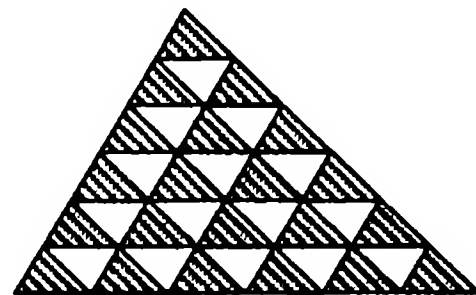


Рис. 27.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Более известную формулу

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$$

нетрудно объяснить с помощью рисунка 24.

На следующем рисунке 28 к четырем квадратикам 1×1 приложена каемка из квадратиков 2×2 ; к полученному квадрату со стороной $3 \cdot 2$ – каемка из $4 \cdot 3 = 12$ квадратиков 3×3 ; к полученному квадрату со стороной $4 \cdot 3$ (разбив его сторону на три части по 4

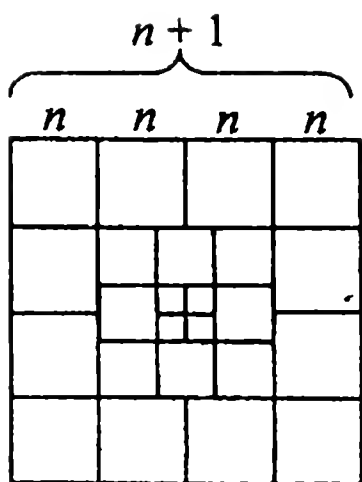


Рис. 28.

единицы) можно приложить каемку из $4 \cdot 4 = 16$ квадратиков 4×4 , к нему каемку из $4 \cdot 5$ квадратиков 5×5 и т.д., вплоть до каемки из $4n$ квадратов $n \times n$. В результате получается квадрат со стороной $n(n+1)$. Подсчитаем его площадь, суммируя площади квадратов:

$$4 + 4 \cdot 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 3^2 + \dots 4n \cdot n^2 = n^2(n+1)^2.$$

Отсюда получим:

$$1^3 + 2^3 + \dots n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Упражнения. 4-1. В треугольнике ABC с углом $\angle A = 60^\circ$ проведены высоты BK и CL . Во сколько раз площадь S_{AKL} меньше S_{ABC} ?

4-2. От каждой вершины квадрата со стороной 1 отрезается уголок — равнобедренный треугольник с катетом x . Найдите площадь $S(x)$ оставшейся части и нарисуйте график функции $y = S(x)$. При каком значении x оставшаяся часть будет правильным восьмиугольником? (Не забудьте рассмотреть также значения $1/2 \leq x < 1$, когда остается квадрат.)

4-3. Трапеция разбита на n частей прямыми, параллельными основаниям, так что:

- а) высоты полученных трапеций одинаковы;
- б) полученные n трапеций подобны друг другу.

Какую прогрессию составляют площади трапеций в каждом из случаев а), б)? Найдите первый и последний члены прогрессии, если основания трапеции a и b , высота — h .

5. Подсчеты с помощью площадей

Мы видели выше, как с помощью площадей можно найти суммы и даже доказать теорему Пифагора. Рассмотрим еще несколько примеров, где площадь используется как вспомогательное средство для доказательства геометрических фактов. В этих примерах основную роль играют формула площади треугольника и ее следствия С-1 — С-4.

Выразив двумя способами площадь треугольника со сторонами a, b, c и углами α, β (против сторон a, b) по формуле (3') получаем:

$$\frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}bc \sin \alpha,$$

или $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$

Это — хорошо известная теорема синусов. (Конечно, она сразу следует и из формулы, приведенной в указаниях к задаче 10б.) А вот замечательное доказательство теоремы Птолемея:

во всяком вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство. Пусть a, b, c, d — стороны вписанного четырехугольника $ABCD$; $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ — стягиваемыми ими дуги окружности; $m = AC$ и $n = BD$ — диагонали четырехугольника (рис. 29). Угол φ между диагоналями равен полусумме двух дуг, заключен-

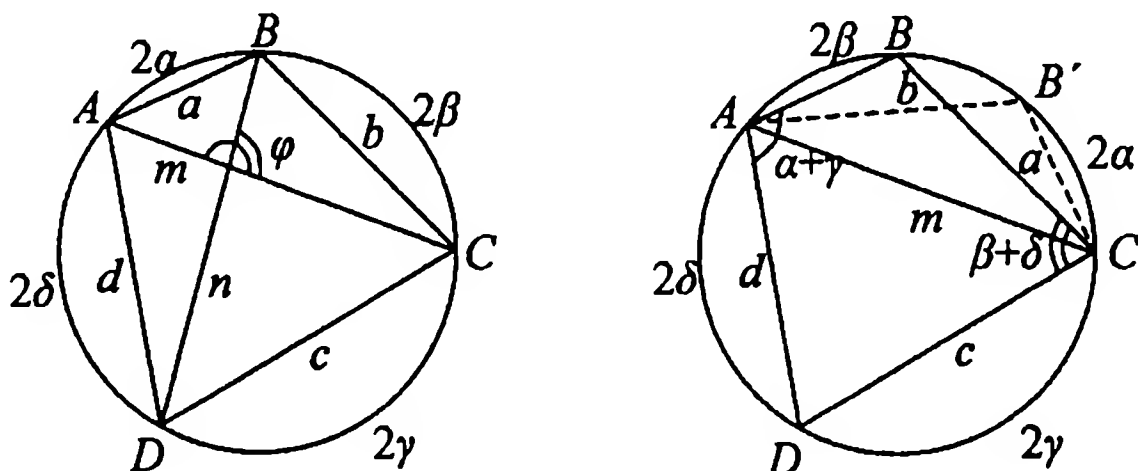


Рис. 29.

ных между его сторонами. Для дальнейшего неважно, какой из двух смежных углов между диагоналями AC и BD мы назовем φ — пусть, скажем, $\varphi = \beta + \delta$, тогда $180^\circ - \varphi = \alpha + \gamma$; важно лишь, что $\sin \varphi = \sin(180^\circ - \varphi)$.

Заменим треугольник ABC симметричным ему $CB'A$ относительно диаметра, перпендикулярного хорде AC . Площади четырехугольников $ABCD$ и $AB'CD$ равны. По формулам (5) и (3') получаем:

$$\frac{1}{2}mn \sin \varphi = S_{AB'D} + S_{CB'D} = \frac{1}{2}bd \sin \varphi + \frac{1}{2}ac \sin \varphi,$$

откуда $mn = ac + bd$ (ведь $\sin \varphi$ не равен 0).

Теперь — пара более простых задач.

Задача 11. Докажите, что в равнобедренном треугольнике сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равна высоте треугольника, опущенной на его боковую сторону.

Решение. Пусть боковая сторона данного треугольника равна b , высота, опущенная на нее — h , расстояния от некоторой точки M на основании до боковых сторон — h_1 и h_2 (рис. 30а).

Соединим точку M с вершиной треугольника. При этом он разобьется на два треугольника, площади которых равны $bh_1/2$ и $bh_2/2$. Но в сумме эти площади составляют площадь всего исходного треугольника, равную $bh/2$, то есть $bh_1 + bh_2 = bh$, откуда $h_1 + h_2 = h$.

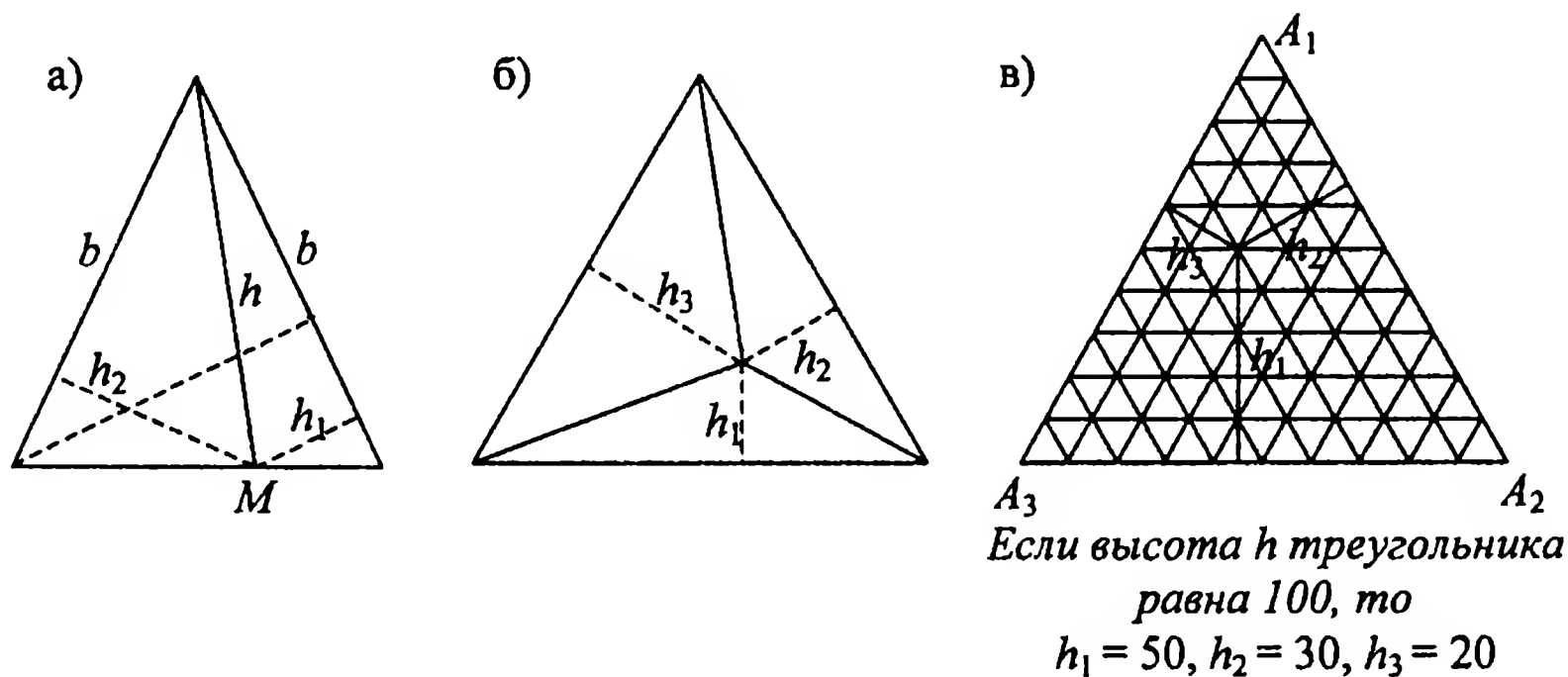


Рис. 30.

Задача 12. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, лежащей внутри правильного треугольника или на его границе, до его сторон равна высоте треугольника.

Эта задача решается аналогично предыдущей (рис. 30б).

С ней связана система координат, которой удобно пользоваться для изображения троек неотрицательных чисел h_1, h_2, h_3 с постоянной суммой (скажем, $h_1 + h_2 + h_3 = 1$): каждой тройке сопоставляется точка внутри равностороннего треугольника, расположенная на расстояниях h_1, h_2, h_3 от сторон A_2A_3, A_1A_3, A_1A_2 правильного треугольника $A_1A_2A_3$. Удобно разграфить треугольник треугольной сеткой, линии которой параллельны сторонам, на мелкие треугольники — при этом на каждой линии одна из координат h_1, h_2, h_3 принимает постоянное значение (на рисунке 30в линии сетки разбивают стороны треугольника $A_1A_2A_3$ на равные части, причем $h_1 : h_2 : h_3 = 5 : 3 : 2$). Такой системой координат пользуются, например, химики для составления «тройных диаграмм» (величины h_1, h_2, h_3 выражают относительное содержание каждого компонента в смеси трех веществ).

Очень просто доказывается с помощью площадей и теорема о том, что

биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Пусть BL – биссектриса треугольника ABC (рис. 31). Поскольку расстояния от точки L до сторон AB и AC – высоты $\triangle ABL$ и $\triangle CBL$ – равны, то

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1/2 AB \cdot BL \cdot \sin \angle ABL}{1/2 BC \cdot BL \cdot \sin \angle CBL} = \frac{S_{ABL}}{S_{CBL}} = \frac{AL}{LC}.$$

Последнее равенство, а также свойство С-2 можно обобщить следующим образом.

Лемма. Пусть точка L лежит на стороне AC треугольника ABC , M – произвольная точка отрезка BL (см. рис. 32). Тогда

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{AL}{LC}.$$

Доказательство. Согласно свойству С-2, имеем

$$\frac{S_{ABL}}{S_{CBL}} = \frac{AL}{LC} \quad \text{и} \quad \frac{S_{AML}}{S_{CML}} = \frac{AL}{LC}.$$

По известному свойству пропорций отсюда

получаем: $\frac{S_{ABL}}{S_{CBL}} = \frac{S_{ABL} - S_{AML}}{S_{CBL} - S_{CML}} = \frac{AL}{LC}$, что

и требовалось доказать.

Можно, конечно, доказывать это утверждение непосредственно: опустить высоты треугольников ABM и CBM на общую сторону BM и вывести (из подобия), что их отношение равно AL/LC (рис. 33).

С помощью этой леммы сразу получается такая важная

Теорема Чевы. Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC , точка B_1 – на стороне AC , точка C_1 – на стороне AB . Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (8)$$

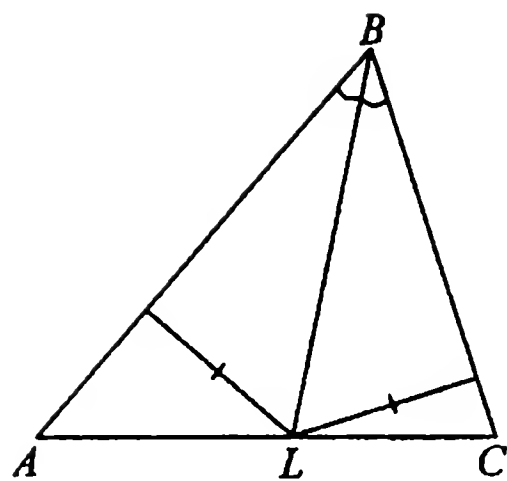
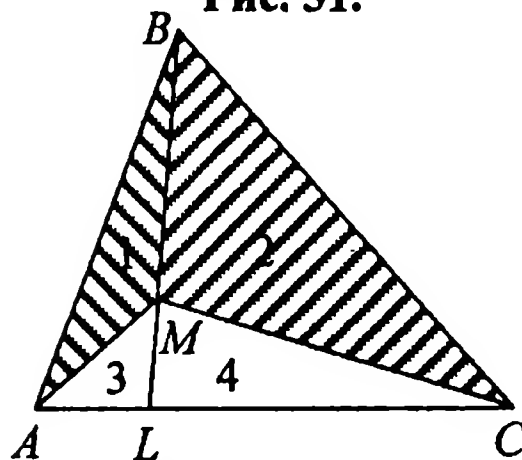


Рис. 31.



Если $\frac{S_1}{S_2} = k$ и $\frac{S_3}{S_4} = k$,

то $\frac{S_1 - S_3}{S_2 - S_4} = k$

Рис. 32.

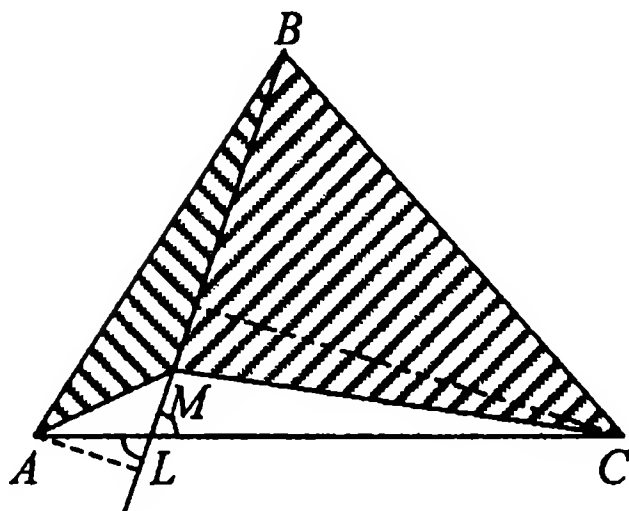


Рис. 33.

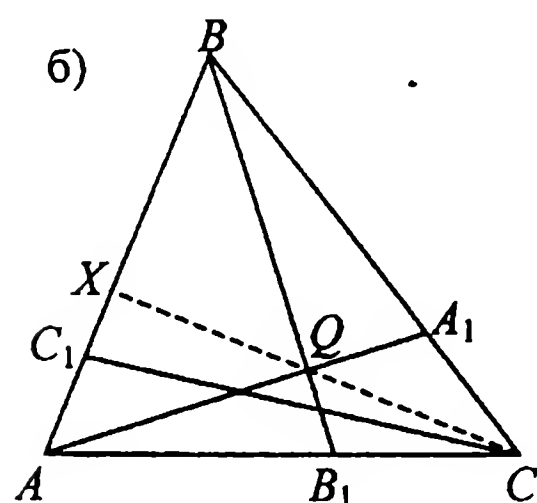
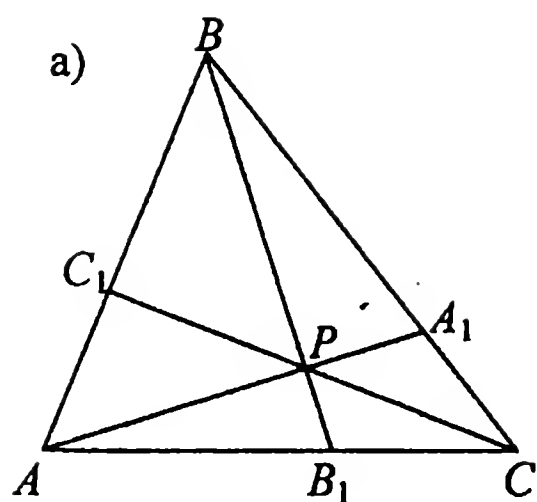


Рис. 34.

Доказательство. I. Пусть отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P (см. рис. 34а). Согласно лемме,

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BCP}}{S_{ABP}}.$$

Перемножив эти равенства, получим

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{ACP} \cdot S_{ABP} \cdot S_{BCP}}{S_{BCP} \cdot S_{ACP} \cdot S_{ABP}}.$$

После сокращения в правой части равенства получаем 1, что и требовалось.

II. Пусть, обратно, точки A_1 , B_1 и C_1 таковы, что равенство выполнено. Докажем, что отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Предположим, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке Q (а отрезок CC_1 через точку Q , быть может, и не проходит). Тогда, согласно I, выполняется равенство, аналогичное (8), где C_1 заменено на X – точку пересечения луча CQ со стороной AB . Но из этого равенства отношение $AX : XB$ находится однозначно, поэтому X совпадает с C_1 .

проходит). Тогда, согласно I, выполняется равенство, аналогичное (8), где C_1 заменено на X – точку пересечения луча CQ со стороной AB . Но из этого равенства отношение $AX : XB$ находится однозначно, поэтому X совпадает с C_1 .

Упражнения. 5-1. Стороны «пифагорова» треугольника ABC равны $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. На каком расстоянии от точек A и C находятся точки пересечения прямой AC с биссектрисой внутреннего и внешнего угла при вершине B ?

5-2. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , проведенные из вершин треугольника ABC к точкам на противоположных сторонах, пересекаются в точке P внутри треугольника. (Такие три отрезка называют иногда *чевианами* этого треугольника.)

а) Известно, что $AC_1/C_1B = 2$, $CA_1/A_1B = 1/3$. Найдите AB_1/B_1C .

б) Известно, что $PA_1/AA_1 = 1/2$, $PB_1/BB_1 = 1/5$. Найдите PC_1/CC_1 .

в) Известно, что $BA_1/A_1C = 2/3$, $PB_1/BB_1 = 1/4$. Найдите PC_1/CC_1 .

5-3. Расстояния от точки D окружности, описанной около правильного треугольника ABC , до вершин A и B равны 2 и 3. Чему может равняться DC ? (Можно использовать теорему Птолемея!)

5-4. Где внутри правильного треугольника ABC расположены точки, расстояние от каждой из которых до одной из сторон равно сумме расстояний до двух других?

6. Сравнение площадей

Существует множество геометрических задач о площадях многоугольников, связанных с оценками и неравенствами. Очевидное свойство площади, которое при этом используется, можно назвать «монотонностью»:

Если фигура площади S_1 содержится в фигуре площади S_2 , то $S_1 \leq S_2$.

(Это свойство можно вывести из «аксиом» А-1 и А-2.)

Рассмотрим две характерные задачи.

Задача 13. Проведите через данную точку K внутри данного угла прямую, отсекающую от него треугольник наименьшей площади (рис. 35).

Решение. Докажем, что искомая прямая пересекает стороны угла в таких точках M и N , что $MK = KN$. (Заметим, что такая прямая существует и притом одна: чтобы найти нужную точку M на стороне m угла, достаточно провести прямую n' , симметричную другой стороне n относительно K (рис. 36а.).

Пусть M_1N_1 — некоторый отличный от MN отрезок с концами на сторонах угла, проходящий через точку K . Отражая треугольник KNN_1 симметрично относительно точки K и сравнивая его площадь

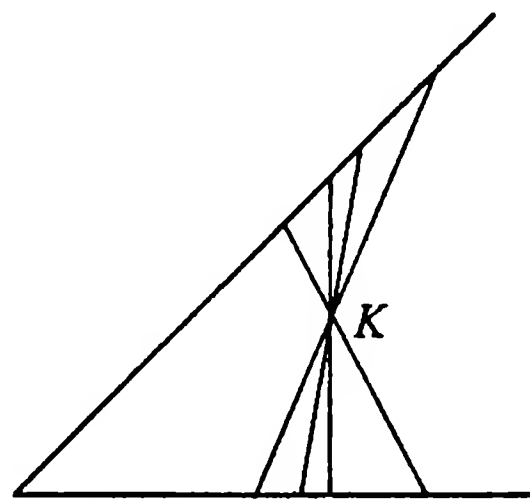


Рис. 35.

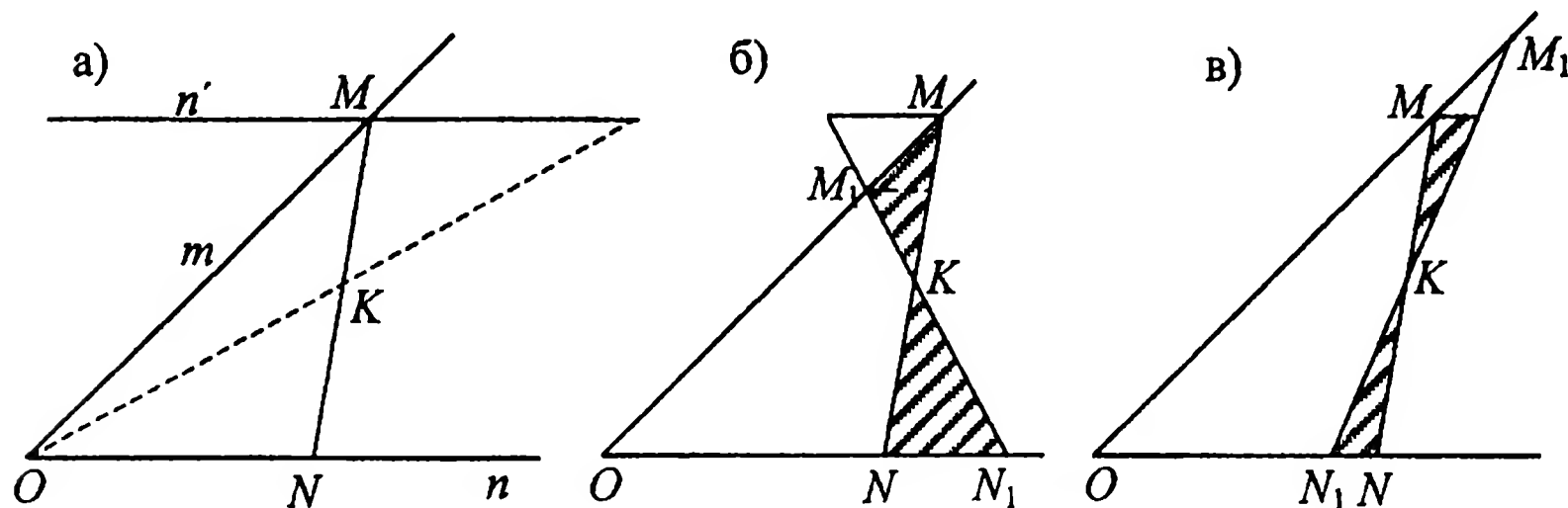


Рис. 36.

с площадью треугольника KMM_1 , мы видим, что разность $S_{OM_1N_1} - S_{OMN}$ в обоих случаях, показанных на рисунках б) и в), положительна: в первом случае $S_{KMM_1} < S_{KNN_1}$, а во втором $S_{KMM_1} > S_{KNN_1}$.

Задача 14. Докажите, что внутри любого выпуклого многоугольника площади S и периметра P можно поместить круг радиуса S/P .

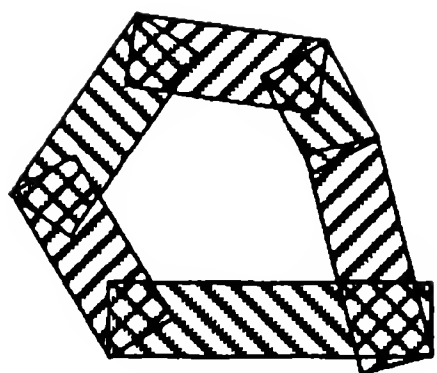


Рис. 37.

Решение. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n – стороны многоугольника и $r = S/P$. Построим на каждой стороне как на основании «внутри многоугольника» прямоугольник высоты r (рис.37). Сумма площадей этих прямоугольников равна

$$a_1 r + a_2 r + \dots + a_n r = Pr = S.$$

Но любые два соседних прямоугольника заведомо пересекаются. Поэтому все они вместе покрывают площадь, меньшую S , то есть не могут закрыть весь многоугольник. Значит, внутри него найдется непокрытая ими точка O , удаленная от каждой стороны на расстояние, большее r . Тем самым, круг радиуса $r = S/P$ с центром O целиком лежит внутри многоугольника. (При заданном числе сторон n можно получить и более точные оценки.)

Упражнения. 6-1. Где на стороне AC треугольника ABC нужно выбрать точку M , чтобы площадь параллелограмма $BKML$ (K – на BA , L – на BC) была наибольшей?

6-2. а) Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до его сторон заключена между наибольшей и наименьшей из его высот.

б) Найдите в разностороннем треугольнике ABC ($AB > BC > AC$) или на его границе точку, сумма расстояний от которой до прямых AB , BC и AC наименьшая.

6-3. Квадрат со стороной 1 и квадрат со стороной x имеют общий центр; их пересечение – восьмиугольник с равными углами (то есть один квадрат повернут относительно другого на 45 градусов). При каком значении x суммарная площадь восьми треугольников, примыкающих к углам квадратов, будет наименьшей?

Указание. Проследите, каково приращение суммарной площади треугольников при небольшом изменении x .

6-4. На участке $20\text{м} \times 20\text{м}$ растет 25 тонких сосен. Докажите, что на нем найдется место для избушки $4\text{м} \times 4\text{м}$.

Указание. Сосны будем считать точками. Для каждой из них нарисуем квадрат $4\text{м} \times 4\text{м}$ с центром в этой точке (стороны которого параллельны границам участка). Достаточно доказать, что эти квадраты не покрывают все точки участка, удаленные от краев участка не менее чем на 2м – любую не покрытую ими точку можно будет принять за центр избушки.

7. Площади и координаты

Хорошо известна формула, выражающая расстояние между двумя точками, $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ на плоскости Oxy :

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

А вот формула для площади треугольника с вершинами $O(0; 0)$, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ почему-то менее известна, хотя она ничуть не сложнее:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|. \quad (9)$$

Доказательство. Если одна из координат x_1, y_1, x_2, y_2 равна 0, то формула (9) очевидна — она превращается в формулу $S = \frac{1}{2} ah$, где a — основание, а h — соответствующая высота треугольника (на рисунке 38а точка B имеет координаты $(0; y_2)$, и $S_{OAB} = \frac{1}{2} |x_1 y_2|$).

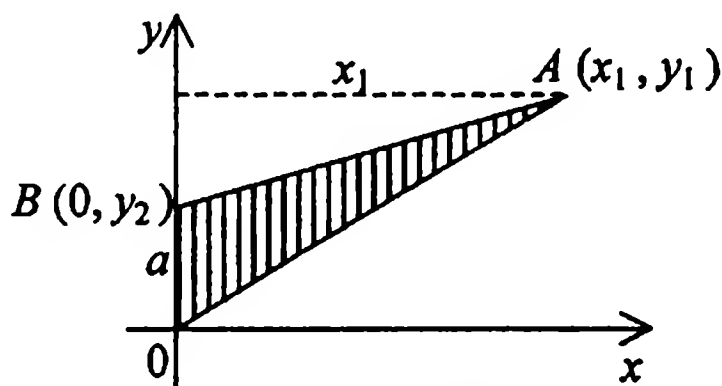


Рис. 38а.

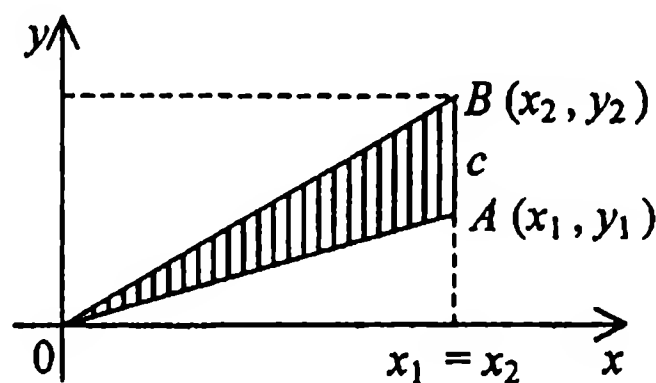


Рис. 38б.

Точно так же происходит, если две одноименные координаты равны между собой: если $x_1 = x_2$, то $|y_1 - y_2| = c$ — это длина стороны AB , а $|x_1| = |x_2|$ — опущенная на нее высота (рис 38б; знаки модуля позволяют охватить все случаи с любыми знаками координат).

Общий случай легко сводится к этому. Пусть $A(x_1; y_1)$, $B^*(x_2^*; y_2^*)$ — любые точки с $x_1 \neq 0$, $x_2^* \neq 0$ и B — точка на прямой OB^* с абсциссой $x_2 = x_1$ (рис. 38в). Тогда если $x_2^* = kx_1$, то $y_2^* = ky_2$, где y_2 — ордината точки B ;

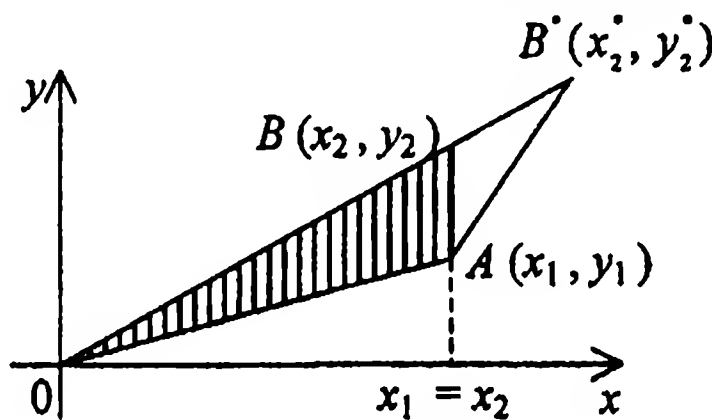


Рис. 38в.

при этом $OB^* = |k|OB$, и выполнено равенство $S_{OAB^*} = |k|S_{OAB}$ (вспомним свойство С-3: если вершина B треугольника OAB двигается по прямой OB , то площадь меняется пропорционально расстоянию OB). Но формула (9) обладает тем же

свойством, — если x_2 и y_2 умножить на k , то правая часть (9) также умножится на $|k|$:

$$2S_{OAB^*} = |k| |x_1 y_2 - x_2 y_1| = |x_1 \cdot k y_2 - k x_2 \cdot x_1| = |x_1 y_2^* - x_2^* y_1|.$$

Тем самым, поскольку формула (9) верна для треугольника OAB , она верна и для треугольника OAB^* .

Заметим, что не менее интересна формула, аналогичная (9), но без знака модуля. Она выражает «ориентированную площадь» треугольника OAB — знак зависит от того, обходится ли треугольник OAB по или против часовой стрелки. Будем, как принято, считать положительным направлением обход против часовой стрелки (ось Ox , как всегда смотрит вправо, а Oy — вверх). Тогда можно проверить, взяв $A_0 = (1; 0)$ и $B_0 = (0; 1)$, что произведение $[\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}] = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 1/2 > 0$. Значит, эта величина будет положительна и для любой пары векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ с «положительной ориентацией» (такую пару векторов $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ можно получить из пары $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}$ непрерывным движением, в процессе которого вектора не попадают на одну прямую, то есть $x_1 y_2 - x_2 y_1$ не обращается в 0).

Величину

$$[u, v] = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad (*)$$

называют иногда *кососимметрическим*, или *псевдоскалярным* произведением векторов $u = \overrightarrow{OA} = (x_1; y_1)$ и $v = \overrightarrow{OB} = (x_2; y_2)$. Геометрически — это площадь параллелограмма $OACB$, взятая со знаком «+» или «-», в зависимости от того, против часовой стрелки или по ней направлен угол поворота от \overrightarrow{OA} до \overrightarrow{OB} (меньший 180°). Произведение (*) обозначают также $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

Нетрудно проверить, что величина (*) — *линейная* функция от \overrightarrow{OA} и от \overrightarrow{OB} : если обе координаты одного из векторов умножить на число λ , то и величина (*) умножится на λ ; если один из векторов разложить в сумму двух векторов $x_1 = x'_1 + x''_1$, $y_1 = y'_1 + y''_1$, то и произведение будет суммой соответствующих произведений $x_1 y_2 - x_2 y_1 = (x'_1 y_2 - x_2 y'_1) + (x''_1 y_2 - x_2 y''_1)$.

Но, в отличие от обычного скалярного произведения,

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

произведение $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]$, как говорят, *антикоммумутативно* или *кососимметрично* — при перемене местами векторов оно меняет знак. Пользуясь всеми этими свойствами:

$[u, v] = -[v, u]; [\lambda u, v] = \lambda[u, v]; [u_1 + u_2, v] = [u_1, v] + [u_2, v], (**)$
 псевдоскалярное произведение удобно использовать в некоторых случаях и для подсчета площадей, и для доказательства теорем. Отметим еще, пожалуй, самое важное свойство: $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = 0$ в том и только в том случае, когда точки O, A, B лежат на одной прямой (его можно вывести из свойств $(**)$ – «аксиом», задающих операцию $[u, v]$). Отсюда следует, что $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = 0$ в том и только в том случае, когда отрезки BA, CD параллельны или лежат на одной прямой.

Поскольку наша книжка посвящена геометрии, мы не будем здесь углубляться в эту тему – тем более, что читать решения, в которых наглядная геометрия заменена алгеброй – вычислениями с векторами и координатами, – довольно утомительно. Заметим только, что операция $[u, v]$ естественно возникает в разных отделах физики, прежде всего в механике. Например, когда рассматриваются силы, приложенные к твердой пластине, важно не только направление и величина силы, задаваемые «свободным» вектором \overrightarrow{F} , но и точка приложения силы. Моментом силы F , приложенной в точке P , относительно точки O называют «произведение силы на плечо» – величину $[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{F}]$. Условие равновесия пластины под действием нескольких сил $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2, \dots, \overrightarrow{F}_n$, приложенных в разных точках, состоит в том, что должна быть равна нулю не только вектор-сумма этих сил, но и сумма их моментов относительно некоторой (а тогда и любой) точки O .

На самом деле, в физике обозначение $[u, v]$ обычно используется для *векторного* произведения двух векторов в трехмерном пространстве: $[u, v]$ – это *вектор*, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах u, v , перпендикулярный плоскости этого параллелограмма и направленный так, что если смотреть из его конца, поворот от u к v происходит против часовой стрелки. (Мы считаем, что векторы отложены от одной точки O .) Для векторного произведения также выполнены равенства $(**)$. Если мы рассматриваем векторы, лежащие в горизонтальной плоскости Oxy , то все их векторные произведения направлены вертикально – задаются лишь одной координатой z ; ее величина и есть псевдоскалярное произведение $(*)$, о котором мы говорили выше.

Итак, мы доказали формулу (9) для площади треугольника и выяснили, что ее можно записать также в векторном виде, используя обозначение $(*)$:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \left| [\overline{OA}, \overline{OB}] \right|. \quad (9')$$

В заключение приведем формулу, выражающую площадь n -угольника через координаты его вершин $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$:

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \dots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n) \right|. \quad (10)$$

Запомнить ее очень легко: каждой стороне соответствует скобка $(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)$, аналогичная формуле (9) для треугольника (для чего и расставлены скобки). Доказать эту формулу, по крайней мере для выпуклого n -угольника $A_1 \dots A_n$, тоже не составляет труда: достаточно взять точку O внутри него и рассмотреть сумму площадей (одинаково ориентированных!) треугольников $OA_1 A_2, OA_2 A_3, \dots, OA_{n-1} A_n, OA_n A_1$. (Другое доказательство можно получить, опустив из точек A_1, \dots, A_n перпендикуляры на ось Ox и представив площадь S как разность двух сумм площадей возникших трапеций – заодно получится еще одно доказательство первой формулы (*).) Несколько сложнее обстоит дело с невыпуклым многоугольником. Здесь можно (используя аддитивность площади) действовать так. Условимся обходить многоугольник против часовой стрелки – при этом знак модуля в формуле можно не писать. Тогда почти очевидно, что при разбиении многоугольника M диагональю (или ломаной) на две части, M' и M'' , формулы для этих двух частей в сумме дают как раз формулу для M : скобки, соответствующие общим сторонам, сокращаются, поскольку контур M' и M'' проходит по ним в противоположных направлениях. Значит, если формула верна для M' и M'' , она верна и для их объединения M . Но любой многоугольник можно разбить (несколькими диагоналями) на выпуклые многоугольники (даже на треугольники). Тем самым, – методом индукции – можно доказать формулу для любого n -угольника.

Формула (10) без знака модуля также выражает очень полезную величину. Это – *ориентированная* площадь, ограниченная замкнутой (быть может, даже самопересекающейся) ломаной, состоящей из n звеньев, с вершинами $(x_1; y_1), \dots, (x_n; y_n)$, то есть сумма площадей кусочков, ограниченных этой ломаной, каждый из которых входит в сумму с (положительной или отрицательной) *кратностью*, показывающей, сколько раз ломаная обходит вокруг этого кусочка.¹

¹ Это понятие нередко используется в физике, – например, при определении магнитного потока, проходящего через проводочный контур, витки которого лежат на плоскости.

В начале книжки мы, не давая определения, просто перечислили свойства А-0 – А-3, которым должна удовлетворять площадь многоугольника. Один из способов доказать, что этим свойствам действительно удовлетворяет некоторая функция от многоугольника $S = S(M)$ – это предъявить способ вычисления площади: формулу (10), выражающую ее через координаты. То, что эта величина аддитивна и положительна, мы уже обсудили (это связано с ориентацией). Легко проверить, что $S(M)$ не меняется при параллельном переносе M – прибавлении ко всем x_i или ко всем y_i одновременно одного и того же числа. Чуть труднее проверить, что она не меняется при повороте фигуры вокруг некоторой точки O – скажем, начала координат. Формулы преобразования координат при этом имеют вид $x' = px - qy$, $y' = qx + py$, где $p^2 + q^2 = 1$ (p и q – синус и косинус угла поворота), и мы оставляем читателю удовольствие проверить, что $x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k$ действительно переходит в $x'_k y'_{k+1} - x'_{k+1} y'_k$!

Упражнения. 7-1. Найдите площадь треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(25; 13)$, $(77; 40)$.

7-2. а) Найдите длины высот треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$.

б) Найдите расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by = 0$.

Указание. б) Одна из точек этой прямой: $(-b; a)$.

7-3. Пусть M – точка внутри треугольника ABC . Докажите равенство

$$S_{BCM} \cdot \overline{MA} + S_{ACM} \cdot \overline{MB} + S_{ABM} \cdot \overline{MC} = 0. \quad (11)$$

Указание. Докажите, что проекция суммы трех векторов на прямую, перпендикулярную вектору MA (и аналогично – каждому из двух других) равна 0. Здесь можно рассуждать так же, как в доказательстве леммы из §5.

Можно доказать равенство (11) и с помощью «псевдоскалярного произведения». Оно вытекает из следующего тождества, справедливого для любых трех векторов u , v , w на плоскости:

$$[u, v]w + [v, w]u + [w, u]v = 0, \quad (12)$$

(Для его доказательства достаточно вспомнить, что – поскольку вектора лежат на плоскости – один из них можно представить в виде линейной комбинации двух других: $w = \lambda u + \mu v$.)

Последнее тождество (12) очень похоже на замечательное *тождество Якоби*

$$[u, v]w + [v, w]u + [w, u]v = 0, \quad (***)$$

которое выполняется для векторного произведения (любых трех векторов) в пространстве. Оно выполняется и для многих других математических объек-

тов. Множество векторов с такой операцией произведения, которая обладает свойствами (**) и (***), имеет даже специальное название: *алгебра Ли*.

8. Разные задачи

Любите ли вы геометрию? Или – что почти эквивалентно – любите ли вы решать геометрические задачи?

Больше всего радости, конечно, доставляет задача, которую удалось решить самостоятельно. Но даже когда – с подсказкой или без нее – задача решена, любитель математики на этом не остановится. Нередко появляется желание выяснить, нельзя ли обобщить задачу, усилить ее результат, получить необходимые и достаточные условия. Скажем, верно ли утверждение задачи 15 только для трапеции, или задачи 28 – только для параллелограмма? Не существует ли какого-то аналога формулы Мебиуса из задачи 48 для шестиугольника? Подобные вопросы в некоторых задачах сформулированы явно, в других – нет, но если задача интересная, почти всегда найдется, над чем поразмышлять. Поэтому обязательно попробуйте порешать эти задачи – надеемся, что среди них найдется хотя бы несколько таких, которые вам понравятся.

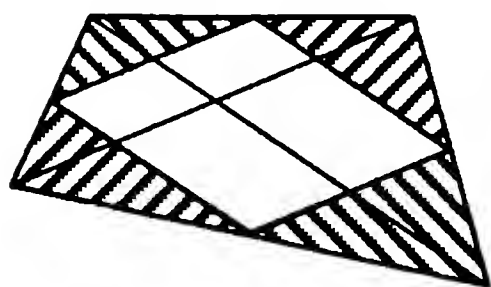


Рис. 39.

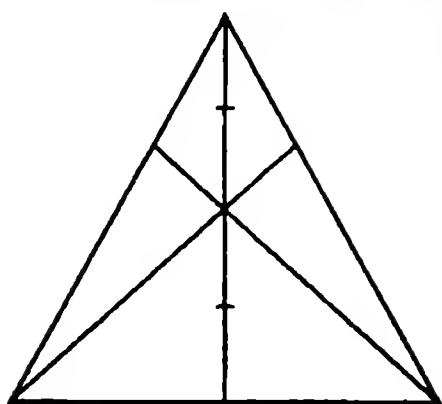


Рис. 40.

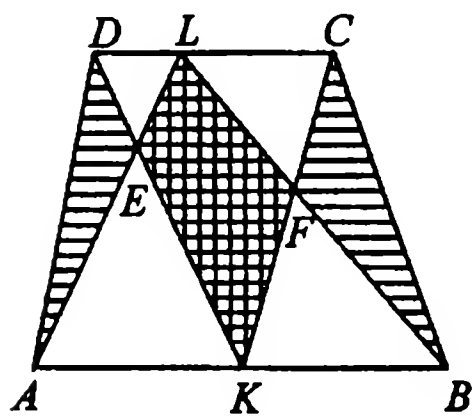


Рис. 41.

15. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на длину перпендикуляра, опущенного на нее из середины другой боковой стороны.

16. Докажите, что: а) середины сторон четырехугольника – вершины параллелограмма; б) площадь выпуклого четырехугольника вдвое больше площади параллелограмма с вершинами в серединах его сторон (см. рис. 39.)

17. а) Через середину высоты равнобедренного треугольника проведены две прямые, соединяющие ее с вершинами основания (см. рис. 40). Какую часть площади треугольника составляет каждая из шести частей, на которые эти прямые разрезают треугольник?

б) Каким словом нужно заменить слово «высота» в этой задаче, чтобы результат был верен для любого, не только равнобедренного, треугольника?

18. На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ взяты точки K и L . Пусть E – точка пе-

ресечения отрезков AL и DK ; F – точка пересечения отрезков BL и CK . Докажите равенство $S_{AED} + S_{BFC} = S_{KELF}$ (см. рис. 41.)

19. Через точку внутри треугольника проведены три прямые, параллельные сторонам; они делят треугольник на шесть частей, из которых три – параллелограммы. Площади этих параллелограммов T_1, T_2, T_3 . Найдите площадь треугольника.

20. На сторонах AB и CD треугольника ABC взяты точки K и L соответственно; O – точка пересечения отрезков AL и CK (рис.42). Найдите площадь треугольника ABC , если известны площади S_1, S_2, S_3 треугольников AKO, CLO, ACO .

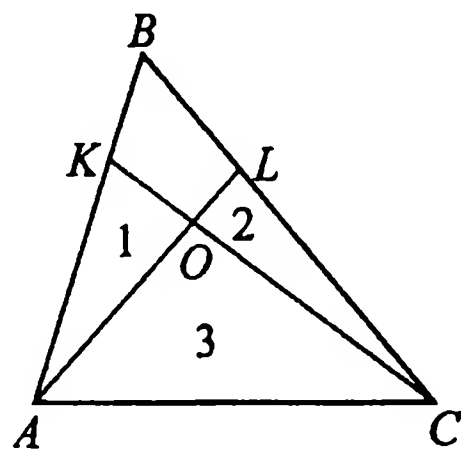


Рис. 42.

21. Точки P, Q, R – расположены соответственно на сторонах AB, BC, CA треугольника ABC площади S так, что $AP = AB/3, BQ = BC/3, CR = CA/3$. Найдите площадь треугольника MNK , ограниченного прямыми AQ, BR, CP (рис. 43).

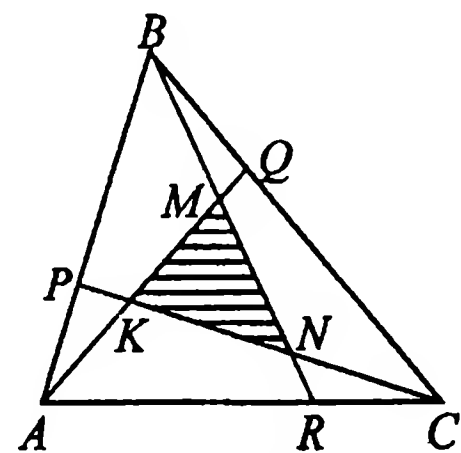


Рис. 43.

22. а) Дан треугольник KMN . Продолжим его сторону MK за вершину K отрезком KA таким, что $KA = MK$, сторону NM – за вершину M отрезком MB таким, что $MB = NM$, сторону KN – за вершину N отрезком NC таким, что $NC = KN$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника KMN ?

б) Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $a = BC, b = AC, c = AB$ и площадью S . Пусть точки K, L, M движутся равномерно по прямым AB, BC, CA , причем в момент времени $t = 0$ совпадают с A, B, C , а в момент $t = 1$ – с B, C, A соответственно. Найдите площадь треугольника KLM как функцию t .

в) Сформулируйте и решите аналогичные задачи для выпуклого четырехугольника.

23. а) На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки K, L, M, N так, что:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{3}{5}, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CM}{MD} = \frac{4}{5}, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{1}{8}.$$

Найдите отношение площади шестиугольника $KBLMDN$ к площади четырехугольника $ABCD$.

б) При любых ли отношениях $AK : KB, BL : LC$ и т.д. можно решить эту задачу?

24. а) В каком отношении прямая, параллельная основанию треугольника и делящая его площадь пополам, делит его высоту?

б) Как построить эту прямую циркулем и линейкой?

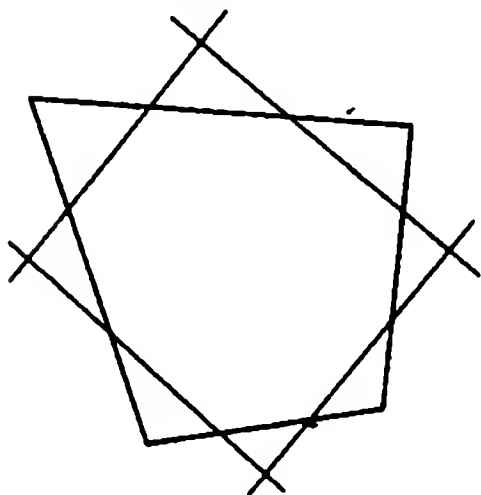


Рис. 44.

25. Каждая сторона выпуклого четырехугольника разбита двумя точками в отношении $1:\sqrt{2}:1$. Через две соседние с каждой вершиной точки проводится прямая (рис. 44). Докажите, что площадь четырехугольника, образуемого этими прямыми, равна площади исходного четырехугольника.

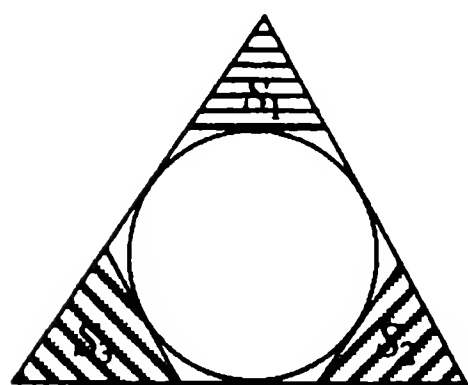
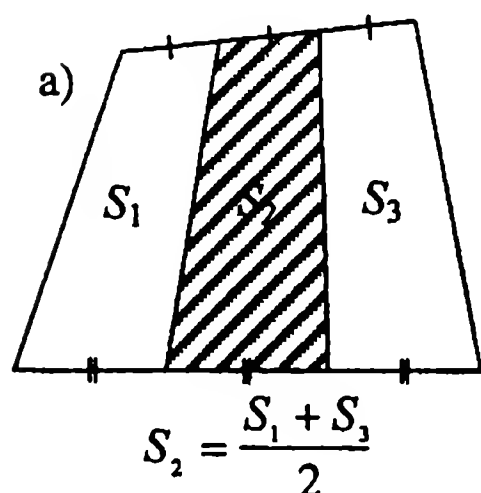


Рис. 45.

26. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если известны радиусы r_1 и r_2 окружностей, вписанных в два треугольника, на которые высота, проведенная из вершины прямого угла, делит этот треугольник.

27. Касательные к вписанной в треугольник окружности, параллельные его сторонам, отсекают три меньших треугольника, площади которых S_1 , S_2 , S_3 . Найдите площадь треугольника (рис. 45).



28. Докажите для любой точки M внутри параллелограмма $ABCD$ равенство

$$S_{AMB} + S_{CMD} = S_{BMC} + S_{DMA}.$$

29. а) Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена $1/3$ часть площади четырехугольника (рис. 46а).

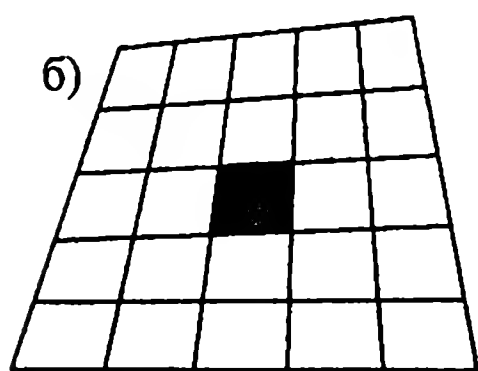


Рис. 46.

б) Докажите более общее утверждение. Пусть $n-1$ прямых делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника на n равных частей. Тогда они

разбивают данный четырехугольник на n четырехугольников, площади которых образуют геометрическую прогрессию.

в)* Разобьем все стороны выпуклого четырехугольника на n равных частей и соединим соответствующие точки на противоположных сторонах так, что четырехугольник разрежется на n^2 клеток. Пусть n нечетно. Докажите, что площадь центральной клетки равна $1/n^2$ части площади четырехугольника (рис. 46б).

30. Пусть прямая, параллельная диагонали AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ и проходящая через середину его диагонали BD , пересекает сторону AD в точке E . Докажите, что прямая EC делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

31. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой его диагонали. Точка пересечения этих прямых соединена отрезками с серединами сторон четырехугольника. Докажите, что эти четыре отрезка делят четырехугольник на четыре равновеликие части.

32. Докажите, что если одна из сторон треугольника равна сумме двух других, то радиус его вписанной окружности равен $1/3$ одной из высот.

33. Докажите для радиуса r_a внеписанной окружности треугольника, касающейся стороны a и продолжений двух других сторон (рис. 47), формулу $r_a = S/(p - a)$. (Здесь S – площадь треугольника, p – полупериметр).

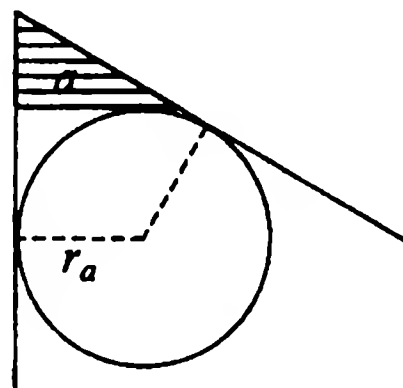


Рис. 47.

34. а) Докажите, что площадь вписанного в окружность четырехугольника выражается через его стороны a, b, c, d по формуле

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где p – полупериметр.

б) Докажите, что если четырехугольник одновременно вписанный и описанный, то $S = \sqrt{abcd}$.

в) Докажите, что для любого выпуклого четырехугольника

$$S^2 = \frac{m^2 n^2}{4} - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2 - d^2}{4} \right)^2,$$

где m и n – диагонали четырехугольника.

35. Внутри угла с вершиной O взята точка K . Через нее проводится произвольная прямая l , пересекающая стороны угла в точках M и N .

а) Докажите, что величина

$$\frac{1}{S_{OKM}} + \frac{1}{S_{OKN}}$$

постоянна (не зависит от прямой l).

б) Докажите, что если точка K лежит на биссектрисе угла, то величина

$$\frac{1}{MO} + \frac{1}{NO} \text{ постоянна.}$$

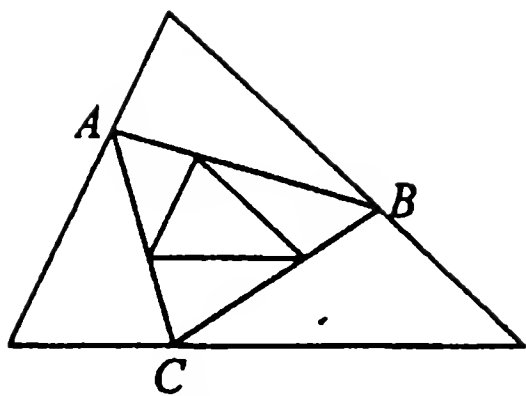


Рис. 48.

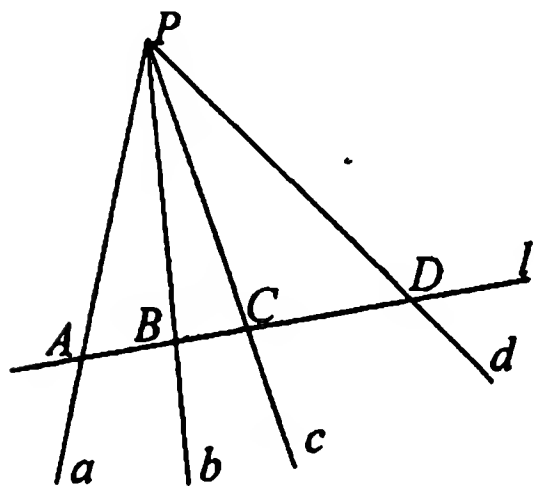


Рис. 49.

36. В треугольник ABC площади S вписан треугольник площади S_1 и около него описан треугольник площади S_2 , причем стороны последних двух треугольников соответственно параллельны (рис. 48). Докажите, что $S^2 = S_1 S_2$.

37.² Из точки P выходит четыре луча: a, b, c, d (рис. 49). Они пересекают произвольную прямую l в точках A, B, C, D . Докажите, что величина «двойного отношения»

$$\frac{S_{PAB}}{S_{PBD}} \cdot \frac{S_{PAC}}{S_{PCD}} = \frac{S_{PAB} \cdot S_{PCD}}{S_{PAC} \cdot S_{PBD}}$$

не зависит от проведенной прямой l .

38. а) Пусть A', B', C', D', E', F' – середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника $ABCDEF$. Известна сумма площадей треугольников $ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

б) Пусть A'', B'', C'', D'', E'' – точки, делящие стороны AB, BC, CD, DE, EA произвольного выпуклого пятиугольника $ABCDE$ в отношении $1:2$ соответственно (то есть $AA'':AB = BB'':BC = \dots = DE'':EA = 1/2$). Известна сумма площадей треугольников $ABC'', BCD'', CDE'', DEA'', EAB''$. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

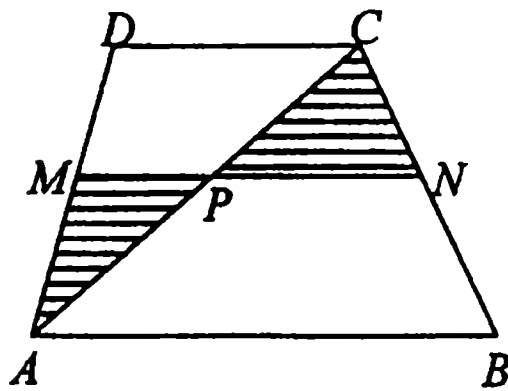


Рис. 50.

39. В трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) на диагонали AC взята точка P и через нее проведена прямая MN параллельно прямой AB (точка M лежит на прямой AD , точка N – на BC , рис. 50). Где на прямой AC надо взять точку P , чтобы сумма площадей треугольников APM и CPN была наименьшей?

40. Докажите, что площадь любого параллелограмма, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

² Этот факт связан с основными результатами «проективной геометрии» – раздела геометрии, изучающего свойства фигуры, не меняющейся при центральной проекции.

41. Отрезок AD делит треугольник ABC на два треугольника. Докажите, что радиус круга, вписанного в треугольник ABC , меньше суммы радиусов r_1 и r_2 кругов, вписанных соответственно в треугольники ADB и ADC (рис. 51).

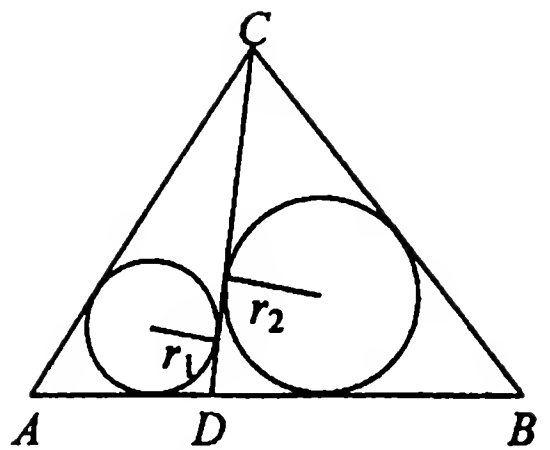


Рис. 51.

42. Пусть a, b, c, d – последовательные стороны выпуклого четырехугольника. Докажите неравенства:

а) $S \leq (ab + cd)/2$;

б) $S \leq (ac + bd)/2$;

в) В каких случаях неравенства и пунктов а) и б) превращаются в равенства?

43. Дан описанный около круга многоугольник. Докажите, что все прямые, делящие пополам одновременно и площадь и периметр этого многоугольника, проходят через одну точку.

44. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка K . Где на основании BC нужно взять точку M , чтобы площадь общей части треугольников AMD и BKC была наибольшей?

45. а) На плоскости даны два отрезка, AB и CD . Найдите множество точек M на плоскости таких, что сумма площадей треугольников AMB и CMD равна постоянной величине.

б) То же для разности площадей треугольников AMB и CMD .

в) Докажите, что прямая, соединяющая середины диагоналей описанного четырехугольника, проходит через центр вписанной в него окружности.

46. а) Докажите, что если каждая диагональ делит площадь четырехугольника пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

б)* Докажите, что если каждая из диагоналей AD, BC, CF делит площадь выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ пополам, то эти диагонали пересекаются в одной точке.

47. Пусть $A_1A_2 \dots A_n$ и $B_1B_2 \dots B_n$ – два выпуклых n -угольника с соответственно параллельными сторонами: $A_1A_2 \parallel B_1B_2, A_2A_3 \parallel B_2B_3, \dots$. Рассмотрим n -угольник $M_1M_2 \dots M_n$, вершины которого делят отрезки между соответствующими вершинами двух первых многоугольников в одном и том же отношении $t:(1-t)$, то есть $\overline{A_kM_k} = t\overline{A_kB_k}$; здесь t – некоторое число между 0 и 1. Докажите, что:

а) площадь $S(t)$ многоугольника $M_1M_2\dots M_n$ выражается квадратичной функцией от t : $S(t) = at^2 + bt + c$;

б)* дискриминант этого квадратного трехчлена $S(t)$ неотрицателен: $b^2 \geq 4ac$ («Неравенство Брунна-Минковского»).

48. а) Докажите «формулу Мебиуса»:

$$x^2 - sx + q = 0,$$

где x — площадь выпуклого пятиугольника, s — сумма площадей пяти треугольников, отсекаемых от него диагоналями, q — сумма пяти попарных произведений площадей соседних треугольников.

Найдите аналогичные формулы, связывающие площадь пятиугольника и

б) площади пяти четырехугольников, отсекаемых от него диагоналями;

в) площади пяти треугольников, каждый из которых образован стороной пятиугольника и двумя его диагоналями.

49. Три точки движутся по плоскости, каждая — по своей прямой и со своей постоянной скоростью. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз (либо в любой момент времени находятся на одной прямой.)

Попробуйте привести примеры, когда они оказываются на одной прямой два раза, один раз и вообще могут не оказаться на одной прямой.

50. Рассмотрим плоскость, разбитую сеткой прямых на одинаковые квадраты со стороной 1 (бесконечный лист клетчатой бумаги).

а)* Докажите, что площадь любого треугольника с вершинами в узлах сетки (в вершинах клеток), не содержащего ни внутри, ни на сторонах других узлов, равна $1/2$.

б)* Докажите, что площадь любого многоугольника с вершинами в узлах сетки равна $i + r/2 - 1$, где i — число узлов внутри многоугольника, а r — число узлов на его сторонах и в вершинах. («Формула Пика».)

51. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30, 60 и 90 градусам, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

52. Высота трапеции $ABCD$ равна 5, а основания BC и AD соответственно равны 3 и 5. Точка E находится на стороне BC , причем

$BE = 2$, F – середина стороны CD , а M – точка пересечения отрезков AE и BF . Найдите площадь четырехугольника $AMFD$.

53. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB , а точка E – на стороне AC , причем $AD = 2$, $AE = 3$. Найдите площадь треугольника ADE .

54. Найдите площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ y + 1 \geq 0 \\ 3y + 6 \geq 2|x| \end{cases}.$$

55. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Найдите ее длину, если $BC = CE$, площадь треугольника ADE равна площади треугольника CDE , площадь треугольника ABC равна площади треугольника BCD , а $3AC + 2BD = 5\sqrt{5}$.

56. В треугольнике ABC медиана AK пересекает медиану BD в точке L . Найти площадь треугольника ABC , если площадь четырехугольника $KCDL$ равна 5.

57. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . При этом оказалось, что $\angle BAC = \angle BDC$, а площадь круга, описанного около треугольника BDC , равна $25\pi/4$.

1) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

2) Зная, что $BC = 3$, $AC = 4$, $\angle BAD = 90^\circ$, найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

58. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Длины противоположащих сторон AB и CD равны соответственно 9 и 4, $AC = 7$, $BD = 8$. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

59. В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F . Величина угла LFA равна 60° .

1) Найдите величину угла ACB .

2) Вычислите площадь треугольника ABC , если $\angle CLD = 45^\circ$ и $AB = 2$.

60. Дан треугольник ABC , площадь которого равна двум. На медианах AK , BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P , Q и R так, что $AP : PK = 1$, $BQ : QL = 1 : 2$, $CR : RN = 5 : 4$. Найдите площадь треугольника PQR .

61. В окружности радиуса 4 с центром в точке O проведены два диаметра, AB и CD , так что $\angle AOC = \pi/9$. Из точки M , лежащей на

окружности и отличной от точек A , B , C и D , проведены к диаметрам AB и CD перпендикуляры MQ и MP соответственно (точка Q лежит на AB , а точка P на CD) так, что $\angle MPQ = 2\pi/9$. Найдите площадь треугольника MPQ .

62. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна l , в $\triangle ABL$ вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K , $BK = b$. На сторонах AB и BC в $\triangle ABC$ выбраны соответственно точки M и N так, что прямая MN проходит через центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, причем $MB + BN = c$. Найдите отношение площадей треугольников ABL и MBN .

63. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) равна 48, а площадь треугольника AOB , где O – точка пересечения диагоналей трапеции, равна 9. Найдите отношение оснований трапеции – $AD : BC$.

64. В треугольнике ABC точка D лежит на AC , причем $AD = 2DC$. Точка E лежит на BC . Площадь треугольника ABD равна 3, площадь треугольника AED равна 1. Отрезки AE и BD пересекаются в точке O . Найдите отношение площадей треугольников ABO и OED .

65. В треугольнике ABC сторона AC не длиннее 3, сторона BC не длиннее 4, а его площадь не меньше 6. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

66. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

67. В прямоугольном треугольнике ABC точки D и E лежат соответственно на катетах BC и AC так, что $CD = CE = 1$. Пусть O – точка пересечения отрезков AD и BE . Площадь треугольника BOD больше площади треугольника AOE на $1/2$. Кроме того, известно, что $AD = \sqrt{10}$. Найдите длину гипотенузы AB .

68. В треугольнике ABC : $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 8$. На отрезке AB взята точка K так, что $AK : KB = 2 : 3$, а на стороне BC – точка M так, что $BM : MC = 2 : 1$. На отрезке KM взята точка O так, что $KO : OM = 4 : 5$. Площадь какого из треугольников: ABO , BCO или ACO является наименьшей?

Ответы, указания к п. 8.

15. Легко доказать аналогичное утверждение для параллелограмма.

16. Проведите диагонали четырехугольника.

17. б) Это слово – медиана.

18. Соедините точки K и L и воспользуйтесь свойством С-1.

19. См. задачу 9 в тексте.

20. Легко найти S_{KOL} . Поскольку $S_{AKL} : S_{BKL} = S_{AKC} : S_{BKC} = AK : KB$, получаем линейное уравнение относительно S_{BKL} .

21. Найдите отношения, в которых один из проведенных отрезков делится другим. Для этого удобно через точки деления провести прямые, параллельные одному из делящих отрезков.

22. а) Соедините точки K , M и N соответственно с точками B , C и A ; BK – медиана $\triangle ABM$, KM – медиана $\triangle BKN$ и т.д.

23. Найдите отношение площади каждого из отрезаемых треугольников к площади соответствующего треугольника, отрезанного от четырехугольника диагональю.

25. Второй четырехугольник – параллелограмм, стороны которого соответственно параллельны диагоналям первого.

26. Все три треугольника подобны между собой.

27. Найдите сумму периметров отсеченных треугольников, воспользовавшись таким известным фактом: если из точки провести к окружности две касательные, то их отрезки от этой точки до точек касания равны.

29. б) Можно разрезать каждый из n четырехугольников диагональю на два треугольника так, что площади n треугольников с основаниями на одной стороне исходного четырехугольника будут составлять арифметическую прогрессию (для любой пары соседних треугольников разность их площадей одинакова).

30. Два отрезка, соединяющие середину одной из диагоналей четырехугольника с концами другой диагонали, тоже делят площадь четырехугольника пополам – эти отрезки являются медианами соответствующих треугольников. (Эта задача показывает, как с помощью циркуля и линейки провести через вершину четырехугольника прямую, делящую площадь пополам.)

31. Сравните с задачей 30.

32. Точка пересечения медиан отсекает треть от каждой из них.

33. Попробуйте выразить отрезки, на которые делится сторона треугольника точкой касания, используя факт из указания к задаче 27.

34. а) Можно использовать результат задачи 34в и теорему Птолемея (см. раздел 5).

в) Выразите стороны четырехугольника через отрезки его диагоналей и угол между ними.

35. Проведем через точку K отрезок, который делится в этой точке пополам и имеет концы на сторонах угла – P на стороне OM и Q – на стороне ON (см. решение задачи 13). Пусть $2s$, x , y и z – площади треугольников OPQ , OMK , ONK и OMN соответственно. Тогда из равенств

$$x + y = z \quad \text{и} \quad \frac{x}{s} = \frac{OM}{OP} = \frac{MN}{2KN} = \frac{z}{2y}$$

получаем, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} = \frac{2}{s}$$

(мы использовали, что OK – медиана в треугольнике OPQ).

36. Можно доказать, что больший и меньший треугольник гомотетичны, то есть большой получается из меньшего растяжением с некоторым центром O , и рассмотреть отношения площадей тех кусочков, на которые треугольники делятся отрезками, соединяющими точку O с вершинами большего треугольника.

37. Докажите, что рассматриваемая величина – «двойное отношение» площадей – равна такому же «двойному отношению» синусов углов между лучами, т.е. константе. (Заметим, кстати, что она равна также двойному отношению отрезков, высекаемых данными лучами на проведенной прямой.)

$$38. б) S_{ABC'} = \frac{2}{3} S_{ABC} + \frac{1}{3} S_{ABD}.$$

39. Несложное рассуждение показывает, что отрезок MN должен делиться диагональю AC пополам.

40. Параллелограмм, лежащий внутри треугольника, удобно превратить во «вписанный параллелограмм» (все вершины которого лежат на сторонах треугольника) преобразованиями, сохраняющими или увеличивающими его площадь – передвижением одной из его сторон параллельно другой или одновременным увеличением двух параллельных сторон.

41. Удобно воспользоваться формулой $S = pr$.

43. Эта точка – центр вписанного круга.

44. Искомая точка M такова, что $BM : MC = AK : KD$.

45. а) Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O , точка P лежит на прямой AB и $OP = AB$, точка Q лежит на прямой CD и $OQ = CD$. Пусть Π – параллелограмм с центром в точке O , две из вершин которого – точки P и Q . Тогда множество точек границы любого параллелограмма, гомотетичного Π с центром O , удовлетворяет условию.

46. б) Предположим, что диагонали не пересекаются в одной точке. Рассмотрим три пары треугольников, образуемых двумя диагоналями и соответствующей парой противоположных сторон шестиугольника. Из условия следует, что эти треугольники в каждой паре равновелики, поэтому произведения тех сторон треугольников, которые расположены на соответствующих диагоналях, равны. Получаются три равенства. Запишем их так, чтобы левые части содержали стороны треугольника, ограниченного диагоналями шестиугольника (тогда правые части этих равенств не будут содержать сторон указанного треугольника). Перемножив почленно три полученных равенства, придем к противоречию.

47. Удобно воспользоваться методом полной математической индукции. Для треугольников утверждение доказывается несложно, так как два треугольника с параллельными сторонами либо гомотетичны, либо получаются друг из друга параллельным переносом; в этом случае функция $S(t)$ – квадратный трехчлен вида $a(t - t_0)^2$ (или константа). При доказательстве того, что если утверждение верно для $(n - 1)$ -угольника, то оно справедливо и для n -угольника, удобно использовать такую теорему: в выпуклом n -угольнике ($n \geq 4$), отличном от параллелограмма, найдутся два соседних угла, сумма которых больше 180° .

48. Можно использовать векторы и формулу (9').

Пусть \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} – векторы, проведенные из вершины E к вершинам A , B , C , D пятиугольника $ABCDE$ (порядок вершин соответствует обходу против часовой стрелки). Используя тождество Якоби (формулу (12), приведенную в указании к упражнению 7-3 на странице 29), получим

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}][\mathbf{c}, \mathbf{d}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}][\mathbf{a}, \mathbf{d}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}][\mathbf{b}, \mathbf{d}] = 0.$$

Остается выразить все кососимметрические произведения через площади s_1, s_2, \dots, s_5 треугольников ABC , BCD , CDE , DEA , EAB и

площадь x пятиугольника: $[a, b] = 2s_1$, $[b, c] = 2(x - s_1 - s_4)$, $[c, a] = -2(x - s_2 - s_4), \dots$

49. Площадь треугольника с вершинами в данных движущихся точках – модуль квадратного трехчлена от времени t .

50. а) Можно дополнить данный «элементарный» треугольник до «элементарного» параллелограмма (симметрично отразив его относительно середины любой из сторон). Параллельными переносами этого параллелограмма, при которых одна из его вершин передвигается в произвольный узел сетки, вся плоскость покрывается в один слой. Теперь можно доказать, что площадь «элементарного» параллелограмма равна 1, например, рассмотрев «очень большой» квадрат $n \times n$, оценив, сколько построенных «элементарных» параллелограммов его покрывают (их число отличается от n^2 не более чем на величину порядка dn , где d – диагональ параллелограмма) и устремив n к бесконечности.

Другое доказательство можно получить, превратив любой «элементарный» треугольник в половинку единичного квадрата несколькими такими преобразованиями: одна из вершин треугольника симметрично отражается относительно другой – вершины тупого угла, – при этом наибольшая сторона треугольника уменьшается (подробнее см. «Квант» №12 за 1974 г.).

б) Любой многоугольник можно разрезать на «элементарные» треугольники. Их количество можно выразить через i и r , вычислив двумя способами сумму всех внутренних углов этих треугольников. Можно действовать несколько иначе: доказать аддитивность формулы Пика при разрезании многоугольника (не обязательно выпуклого) на два – разумеется, тоже с вершинами в узлах сетки.

51. С помощью теоремы о вписанных углах можно найти углы нового треугольника, затем использовать теорему синусов.

52. Пусть N – точка пересечения BF и AE . Тогда $S_{AMFD} = S_{AMN} - S_{DFN}$.

$$53. S_{ADE} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} S_{ABC}.$$

$$54. \text{ Ответ: } \frac{9}{2}\pi + \frac{9}{2}.$$

55. Докажите, что $AC \parallel DE$ и $BC \parallel AD$.

56. Пусть $S_{ABC} = S$. Тогда $S_{ABD} = S/2$, $S_{BLK} = S/6$ (докажите).

57. Ответ: 1) $5/2$; 2) $234/25$.

58. Положим $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle ABD = \angle ACD = \beta$. Тогда один из углов между диагоналями равен $\alpha + \beta$. Затем следует воспользоваться теоремой синусов и немного вспомнить тригонометрию.

59. Докажите, что около четырехугольника $CFDL$ можно описать окружность.

60. Точка O пересечения медиан делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Используя этот факт, докажите, что площадь каждого из треугольников OAB , OBC , OCA равна $2/3$.

61. Ответ: $4\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{\pi}{9}$.

62. Обозначим: O – центр вписанной в треугольник ABC окружности, $\angle ABO = \angle LBO = \beta$. Тогда можно доказать, что

$$\frac{1}{2} AB \cdot BL \sin 2\beta = \frac{1}{2} (AB + BL) \cdot BO \cdot \sin \beta \Rightarrow \frac{AB \cdot BL}{AB + BL} = \frac{BO}{2 \cos \beta}.$$

Аналогично из треугольника MNB : $\frac{MN \cdot BN}{MB + BN} = \frac{BO}{2 \cos \beta}$. Отсюда

можно найти $\frac{S_{ABL}}{S_{MBN}}$.

63. Воспользуйтесь подобием треугольников BOC и AOD и тем, что треугольники AOB и BOC имеют общую высоту.

64. Докажите параллельность прямых AB и DE .

65. В цепочке соотношений

$$6 \leq S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C \leq \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin \angle C = 6 \sin \angle C \leq 6$$

все неравенства обращаются в равенства.

66. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, у которой AD большее основание, а H – основание высоты, опущенной из точки B . Докажите, что $BH = HD$. Затем, если разрезать трапецию вдоль отрезка BH и совместить сторону AB полученного треугольника со стороной CD трапеции, получится квадрат, площадь которого легко найти.

67. $S_{BCE} = S_{ACD} + \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{2} CE \cdot BC = \frac{1}{2} CD \cdot AC + \frac{1}{2} \Rightarrow BC = AC + 1$. Все необходимые значения длин отрезков можно найти с помощью теоремы Пифагора.

68. Ответ: ACO .

Послесловие

Эта брошюра основана на опубликованных ранее текстах для ВЗМШ, в подготовке которых принимали участие П.Кантор, Ж.Раббот, В.Гутенмахер.

При переработке были добавлены два последних раздела, а также целый ряд новых задач, подобранных Е.Пушкарь. Существенно переработаны и первые разделы – при этом учтены предложения В.Гутенмахера, Ж.Раббота и преподавателей математического отделения Всероссийской заочной многопредметной школы, которым автор приносит глубокую благодарность.

Набор и компьютерная верстка Е.Пушкарь.

Контрольная работа

Обязательные задачи: 15, 16б, 18, 22а, 24а, 26, 28, 30, 39, 46а.

• Дополнительные задачи: 20, 21, 23а, 25, 27, 29а, 32, 36, 38а, 42б.

Критерии оценок

	Обязательные задачи			Дополнительные задачи	
Оценка	зачет	4	5	4	5
Количество решенных задач	5, 6	7, 8	9, 10	4, 5	6 – 10

Срок отсылки задания –

Содержание

Введение	3
1. Основные свойства площади	4
2. Разрезание и складывание	7
3. Отношения площадей треугольников	10
4. Площади подобных фигур	15
5. Подсчеты с помощью площадей	18
6. Сравнение площадей	23
7. Площади и координаты	25
8. Разные задачи	30
Ответы, указания	39
Послесловие	44
Контрольная работа	44

Типография ордена "Знак почета" издательства МГУ
119899, Москва, Воробьевы горы
Заказ № 1556 Тираж 1000 экз.

Несколько слов о Н.Б.Васильеве

Автор этой книги – Николай Борисович Васильев ушел из жизни в 1998 году в возрасте 57 лет. Это был не только талантливый математик, энциклопедически образованный, ученый и просветитель. Н.Б.Васильев был прекрасным человеком, и к тому же интеллектуалом самого высокого уровня.

Блестяще обучаясь еще на первом курсе механико–математического факультета МГУ Николай Борисович начал работать со школьниками. Вскоре Николай Борисович стал одним из лидеров работы со школьниками: был одним из руководителей знаменитого математического кружка при МГУ, активно участвовал в организации Всесоюзной, а затем и Всероссийской олимпиады (более 10 лет). Николай Борисович был членом Оргкомитета, а также заместителем академика А.Н.Колмогорова, Председателя Методической комиссии по математике Всесоюзной олимпиады), организовывал вместе с академиками И.М.Гельфандом и И.Г.Петровским первую в стране ВЗМШ- заочную математическую школу при МГУ (ныне ОЛ ВЗМШ).

Автор большого количества книг и статей, он всегда добивался простоты изложения, глубины содержания, умел очень точно наглядно, образно и красиво изложить самые запутанные и трудные вопросы. Николай Борисович умел показать единство и красоту математики.

Пособие, которое Вы держите в руках впервые было издано еще в конце шестидесятых годов, затем перерабатывалось автором. Книга не потеряла своей актуальности и сейчас.



А. Шен. с. Ж. Ш. Р. 55000
Насколько важно и интересно было по математике
Задачи обязательной контрольной работы в ВЗМШ 1990 г.

1. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через час. Прибыв в пункты A и B соответственно, велосипедисты сразу же повернули назад и встретились вновь. Через сколько времени после первой встречи это произошло?

2. Дана квадратная таблица размером 4×4 клетки. Можно ли пометить некоторые клетки крестиками так, чтобы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой большой диагонали стояло: а) по два крестика? б) по три крестика?

3. Натуральное число, делящееся на 37, должно иметь в десятичной записи 2 1990 цифр, причем первые 1990 цифр должны быть одинаковы и последние 1990 цифр должны быть одинаковы. Какими могут быть эти цифры?

4.

4. а) Докажите, что сумма катетов прямоугольного треугольника равна сумме диаметров, вписанной в него и описанной около него окружностей.

б) Высота h прямоугольного треугольника делит его на два меньших треугольника. Во все три треугольника вписаны окружности. Найдите сумму радиусов этих окружностей.

5. Два пешехода вышли навстречу друг другу одновременно из пунктов A и B . Через два часа они встретились и продолжили путь в том же направлении, причем первый пришел в B через три часа после того, как второй пришел в A . Сколько времени шел каждый?

6. В точках P и Q посреди океана находятся два корабля. Расстояние PQ равно 50 км, корабли одновременно начинают двигаться прямолинейно в неизвестных направлениях с постоянными скоростями 15 км/ч и 20 км/ч, пока не встречаются друг с другом. Каково наибольшее возможное время их движения до встречи?

7. В квадрате $ABCD$ со стороной a расположена четверть окружности с центром A . Отрезок MN касается этой кривой (точки M и N лежат на сторонах BC и CD соответственно). Докажите, что $AM + CN > a$.

8. Среди всех дробей p/q таких, что

$$\frac{1}{1990} < \frac{p}{q} < \frac{1}{1989}$$

найдите дробь с наименьшим возможным знаменателем q (p и q — натуральные числа.)

9. В городе Буле некоторые жители — лжецы, и они всегда лгут, а все остальные всегда говорят правду. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей этого города, и между ними состоялся следующий разговор.

— Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы.

— Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

— Нас тут пятеро. Трое из нас — лжецы.

Определите, сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов.

10. Найдите числа x, y из уравнения:

$$2x^4 + 2y^4 = 4xy - 1$$

11. Найдите все такие пары натуральных чисел $(a; b)$, что число $3a+2$ делится на $b+1$, а число $3b+2$ делится на $a+1$.

12. Начнем строить последовательность цифр 1, 2, 5, 3... следующим образом. Первая цифра равна 1, далее — если написано сколько-то первых членов последовательности, то очередной член вычисляется так: к сумме всех уже написанных цифр прибавляется последняя из написанных цифр и берется последняя цифра полученной таким образом суммы — она и есть очередной член последовательности. (Проверьте, что написанные нами цифры получены по этому правилу.) Какая цифра будет стоять на 1990 — м месте?

13. Для каждого четырехзначного числа составляется дробь: отношение суммы цифр числа к самому числу. Для какого четырехзначного числа эта дробь наибольшая?